ISSN 2312-475X

ZHUBANOV UNIVERSITY

IX ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҒЫЛЫМИ КОНФЕРЕНЦИЯ
Қ.ЖҰБАНОВ АТЫНДАҒЫ АҚТӨБЕ ӨҢІРЛІК УНИВЕРСИТЕТІ
"ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР, АНАЛИЗ ЖӘНЕ АЛГЕБРА ПРОБЛЕМАЛАРЫ"
АҚТӨБЕ - 2022
24-28 мамыр

Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университетінің ХАБАРШЫСЫ

арнайы шығарылым

Дифференциалдық теңдеулер, анализ және алгебра проблемалары

IX Халықаралық ғылыми конференция
МАТЕРИАЛДАРЫ

Problems of differential equations, analysis and algebra

PROCEEDINGS
IX International scientific conference

Ғылыми журнал

2022

2

Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университетінің
ХАБАРШЫСЫ
ғылыми журналы

научный журнал
ВЕСТНИК
Актюбинского регионального университета им. К.Жубанова

ҚР Мәдениет және ақпарат министрлігінде 2014 жылдың 16 қаңтарында тіркелген, куәлік №14089-Ж
Зарегистрирован в Министерстве культуры и информации РК 16 января, 2014 года, свидетельство №14089-Ж

№ 2 (67)
20
маусым **2022**

Жазылу индексі: 74646 Подписной индекс: 74646

Үш айда бір рет шығады Выходит один раз в три месяца

МАЗМҰНЫ СОДЕРЖАНИЕ LIST OF CONTENT

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ҒЫЛЫМДАРЫ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ҒЫЛЫМДАРЫ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

UDC 517.968.7
IRSTI 27.33.19

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH BOUNDARY CONDITIONS AS A BIOLOGICAL MODEL

A.T. ASSANOVA [0000-0001-8697-8920]
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
e-mail: assanova@math.kz; anartasan@gmail.com

Annotation. A boundary value problem for integro-differential equation is considered. The method proposed by D.S. Dzhumabaev for solving this problem is described and its results are commented. A new general solution of integro-differential equations is constructed and its properties are established. Algorithms for finding solutions to the boundary value problems for integro-differential equations are constructed and conditions for unique solvability are established in the terms of initial data. The results are illustrated by examples.

Keywords: integro-differential equations, boundary value problems, new general solution, algorithm, solvability.

On the interval $[0,T]$ consider the following boundary value problem for system of integro-differential equations

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,s)x(s)ds + f(t), \qquad t \in (0,T), \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \qquad d \in R^n, \tag{2}$$

where $x(t)$ is unknown vector function, the $(n \times n)$ matrix $A(t)$, the n vector function $f(t)$ are continuous on $[0,T]$, the $(n \times n)$ matrix $K(t,s)$ is continuous on $[0,T] \times [0,T]$, the B, C are constant $(n \times n)$ matrices.

The solution of problem (1), (2) is defined as a function $x(t) \in C([0,T], R^n)$ continuously differentiable on $(0,T)$ and satisfying the integro-differential equation (1) and the boundary condition (2).

The main methods used for the investigation and solution of the boundary-value problem (1), (2) are the Nekrasov method [1] and the method of Green functions [2]. The application of these methods requires the unique solvability of certain auxiliary problems.

In the Nekrasov method, it is assumed that the Fredholm integral equation of the second kind

$$x(t)=\int_0^T M(t,s)x(s)ds+F(t), \qquad t\in[0,T],$$

with the kernel $M(t,s)=\int_s^T K(t,\tau)X(\tau)d\tau\, X^{-1}(s)$, where $X(t)$ is the fundamental matrix of the differential part of IDE (1) and $F(t)\in C([0,T],R^n)$, is uniquely solvable.

If the latter one is uniquely solvable, then the general solution to Fredholm integro-differential equation (IDE) can be written down via the resolvent of integral equation. The solvability of problem (1), (2) is equivalent to the solvability of linear system of algebraic equations compiled by the general solution and condition (2).

The method of Green functions can be used for the solution of problem (1), (2) under the assumption of unique solvability of the boundary-value problem for the differential part of the IDE (1), i.e., according to this method, problem (1), (2) with $K(t,s)=0$ must be uniquely solvable.

In this method, the integral term also refers to the right-hand side of differential equation. Under assumption on unique solvability of boundary value problem for the differential equation we construct its Green's function and then reduce the origin boundary value problem for Fredholm integro-differential equation (1), (2) to the Fredholm integral equation of second kind. Solving this equation, we find the desired function.

Since the unique solvability of auxiliary problems is not a necessary condition for the existence of the solution of the original boundary value problem, the Nekrasov method and the method of Green functions do not enable us to establish necessary and sufficient conditions for the solvability of problem (1), (2) [3].

In the present communication we are described the Dzhumabaev parametrization method [4] for finding of solutions to the boundary value problem for Fredholm integro-differential equation.

Given a step $h>0: Nh=T$, we introduce the partition $[0,T)=\bigcup_{r=1}^{N}[(r-1)h,rh)$.

Necessary and sufficient conditions for solvability, including the unique solvability of problem (1), (2) were obtained in terms of a matrix $Q_{*,*}(h)$ constructed from the fundamental matrix of the differential part of system (1), the matrices in boundary conditions (2), and the resolvent of an auxiliary Fredholm integral equation of the second kind [5].

Thus, if the parametrization method is applied to problem (1), (2), we also have to solve an intermediate problem, namely, the special Cauchy problem for integro-differential equations or the equivalent system of integral equations [5]. However, in contrast to the above methods, the partition step $h>0: Nh=T$ can always be chosen so that special Cauchy problem for integro-differential equations is uniquely solvable.

Conditions for the convergence of algorithms of the Dzhumabaev parametrization method for finding of solutions to the boundary value problems for Fredholm integro-differential equation were determined [6-9].

A concept of new general solution to Fredholm integro-differential equations were introduced and its properties were established [10]. Criterions for the unique solvability of the boundary value problem for Fredholm integro-differential equation were obtained in the terms of the initial data and new general solution [10-12]. This approach are extended to the boundary value problems for loaded differential equations [13], for nonlinear integro-differential equations [14]. A modification this method for solving to the boundary value problem for Fredholm integro-differential equation and some numerical approximation its solution are offered [15-16]. Finally, we are also extended Dzhumabaev parametrization method to solve problem with parameter for Fredholm integro-differential equations [17-20].

Acknowledgment. This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09258829)

References

1. Некрасов А.И. Об одном классе линейных интегро--дифференциальных уравнений // Труды ЦАГИ. - 1934. Вып. 190. - С. 1-25.

2. Вираненко Т.И. Об одной граничной задаче для линейных интегро-дифференциальных уравнений // Записки Ленинградского горн. ин-та. - 1956. - Т. 33. вып. 3. - С. 177-187.

3. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. - Utrecht, Boston: VSP. The Netherlands, 2004.

4. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics. -1989. -Vol. 29. No 1. - P. 34-46.

5. Dzhumabaev D.S. A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. -2010. -Vol. 50. No 7. -P. 1150–1161.

6. Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value

problem for an integrodifferential equation // Computational Mathematics and Mathematical Physics. -2013. -Vol. 53. No 6. -P. 736–758.

7. Dzhumabaev D.S. Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary-value problems for the Fredholm integro-differential equations // Ukrainian Mathematical Journal. -2015. -Vol. 66. No 8. -P. 1200-1219.

8. Dzhumabaev D.S. Solvability of a linear boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with impulsive inputs // Differential Equations. -2015. -Vol. 51. No 9. -P. 1180-1196.

9. Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. -2016. -Vol. 294. No 2. -P. 342–357.

10. Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems // Journal of Computational and Applied Mathematics. - 2018. -Vol. 327. - P. 79-108.

11. Dzhumabaev D.S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations // Mathematical Methods in the Applied Sciences. -2018. -Vol. 41. No 4. -P. 1439-1462.

12. Dzhumabaev D.S. New general solutions of ordinary differential equations and the methods for the solution of boundary-value problems // Ukranian Mathematical Journal. - 2019. -Vol. 71. - No 7. -P. 1006-1031.

13. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences. -2020. -Vol. 43. No 2. -P. 1788-1802.

14. Dzhumabaev D.S., Mynbayeva S.T. A method of solving a nonlinear boundary value problem for the Fredholm integro-differential equation // Journal of Integral Equations and Applications. First available: 26 May 2020. -2021. -Vol. 33. No 1. -p. 53-75.

15. Dzhumabaev D.S., Nazarova K.Zh., and Uteshova R.E. A modification of the parameterization method for a linear boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation // Lobachevskii Journal of Mathematics. -2020. -Vol. 41. No 9. -P. 1791–1800.

16. Bakirova E.A., Iskakova N.B., Assanova A.T. Numerical method for the solution of linear boundary-value problems for integrodifferential equations based on spline approximations // Ukrainian Mathematical Journal. -2020. -Vol. 71. No 9. -P. 1341–1358.

17. Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. Numerical solution to a control problem for integro-differential equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. -2020. -Vol. 60. No 2. -p. 203-221.

18. Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M., Uteshova R.E. A computational method for solving a problem with parameter for linear systems of integro-differential equations // Computational and Applied Mathematics. -2020. -Vol. 39. no. 248.

19. Assanova A.T., Bakirova E.A., Vassilina, G.K. Well-posedness of problem with parameter for an integro-differential equation // Analysis (Germany). -2020. -Vol. 40. No 4. -P. 175-191.

20. Bakirova E.A., Assanova A.T., Kadirbayeva, Z.M. A problem with parameter for the integro-differential equations // Mathematical Modelling and Analysis.- 2021. -Vol. 26. No 1. -p. 34–54.

ШЕТТІК ШАРТТАРЫ БАР ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР БИОЛОГИЯЛЫҚ МОДЕЛЬ РЕТІНДЕ

А.Т. Асанова[1]

[1] *Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан*

E-mail: assanova@math.kz; anartasan@gmail.com

Аңдатпа. Интегралдық-дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп қарастырылады. Осы есепті шешуге Д.С.Жұмабаев ұсынған әдіс сипатталады және оның нәтижелеріне түсініктеме беріледі. Интегралдық-дифференциалдық теңдеулердің жаңа жалпы шешімі тұрғызылады және оның қасиеттері орнатылады. Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептердің шешімін табуға арналған алгоритмдер құрылады және бірмәнді шешілімділігінің шарттары бастапқы берілімдер терминінде орнатылады. Нәтижелер мысалдармен көрнекіленеді.

Кілттік сөздер: интегралдық-дифференциалдық теңдеулер, шеттік есептер, жаңа жалпы шешім, алгоритм, шешілімділік.

Осы зерттеу Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі Ғылым комитеті тарапынан қаржыландырылады (Грант No. AP09258829)

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ КАК БИОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

А.Т. Асанова[1]

[1] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

E-mail: assanova@math.kz; anartasan@gmail.com

Аннотация. Рассматривается краевая задача для интегро-дифференциального уравнения. Описывается предложенный Д.С. Джумабаевым метод решения этой задачи и даются комментарии его результатов. Строится новое общее решение интегро-дифференциальных уравнений и устанавливаются его свойства. Строятся алгоритмы для нахождения решений краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений и устанавливаются условия их однозначной разрешимости в терминах исходных данных. Результаты иллюстрируются примерами.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, краевые задачи, новое общее решение, алгоритм, разрешимость.

Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Грант No. AP09258829)

UDC 517.956

IRSTI 27.31.17

ON THE EXISTENCE AND STABILITY OF UNPREDICTABLE OSCILLATIONS FOR A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH PIECEWISE ALTERNATELY RETARDED AND ADVANCED ARGUMENT OF GENERALIZED TYPE

D. ARUĞASLAN ÇINÇIN[1], M. TLEUBERGENOVA[2,3], Z. NUGAYEVA[2,3], M. AKHMET[4]

[1] *Süleyman Demirel University, Isparta, Turkey*

[2] *K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*

[3] *Institute of Information and Computational Technologies, Almaty, Kazakhstan*

[4] *Middle East Technical University, Ankara, Turkey*

E-mail: duyguarugaslan@sdu.edu.tr; madina_1970@mail.ru; zahira2009.85@mail.ru; marat@metu.edu.tr

Annotation. Recent studies have shown that existence of an unpredictable oscillation for a differential equation amounts to the presence of Poincaré chaos [1,2]. Stimulated by this fact, it is aimed in this study to analyze unpredictable oscillations for a nonlinear differential equation with generalized type piecewise alternately retarded and advanced argument. Existence-uniqueness and exponential stability of the unpredictable oscillations are verified for the considered equation. Since the argument is of mixed type being retarded and advanced, it offers numerous advantages for the theoretical investigations as well as many real-world applications. The results are confirmed by example and simulation.

Keywords: Unpredictable Oscillations; Poincaré Chaos; Exponential Stability; Piecewise Constant Argument

1. Introduction and Preliminaries

Theory of differential equations provides indispensable tools to study and understand real world processes. Existence of discontinuous characters in nature pushes scientists for developing this theory further. This development enables to obtain more natural features of the real problems modeled by differential equations including discontinuous items. As is well known, the class of differential equations involving discontinuities contains differential equations with piecewise constant argument

(PCA) [3] as a subclass [4]. This subclass has been broadened in [5] by addressing a wider range for PCA, which is entitled as piecewise constant argument of generalized type (PCAG). Although most prior findings for differential equations with PCA were achieved through reduction to discrete equations or numerical approaches [1, 6], equivalent integral equations were employed for the first time in [5] to examine differential equations with PCAG. Thanks to the use of equivalent integral equations, qualitative characteristics of differential equations with PCAG has begun to be examined in a more general manner. This topic has been the focus of various theoretical and practical studies [7–14].

After unpredictable oscillations have been defined as a new type of oscillations in the past few years, a rapid progress has been achieved on the subject [1, 2, 15–21]. This is because, it is seen that they are very useful for the simplification of the chaos analysis for differential equations and also for processes modeled by differential equations. Due to the demands of science and technology, differential equations theory pays great attention to the oscillation phenomena. Accordingly, solutions being periodic, quasi-periodic as well as almost periodic are studied extensively by the researchers [22–24]. It was confirmed for a differential equation that if an unpredictable oscillation exists, then there is Poincaré chaos [1]. As a result of this significant aspect, research on unpredictable solutions is just as beneficial as research on chaos. The main objective of this study is to investigate unpredictable oscillations of a nonlinear differential equation having piecewise alternately retarded and advanced argument of generalized form, which can be considered as the most general case of PCAG since it is of mixed type. Due to the remarkable position of differential equations with PCAG in various applications [9, 10, 25, 26, 27], it is momentous to link these equations with the chaos concept through unpredictable oscillations.

We shall use the abbreviations R, Z and N to represent the set of real numbers, integers and natural numbers, respectively. We pick sequences $\{\chi_j\}_{j\in Z}$ and $\{\eta_j\}_{j\in Z}$ whose elements are real numbers and meet the properties: $\chi_j \le \eta_j \le \chi_{j+1}$ for each $j \in Z$, and $|\chi_j| \to \infty$ as $|j| \to \infty$. The following nonlinear differential equation with piecewise alternately retarded and advanced argument of generalized type is the major focus of the present research:

$$x'(t) = \alpha x(t) + u\big(x(t)\big) + v\Big(x\big(h(t)\big)\Big) + w(t). \tag{1}$$

Here, t, x belong to the set R, $\alpha < 0$ and $h(t) = \eta_j$ for $t \in [\chi_j, \chi_{j+1})$, $j \in Z$; the functions u, v : $(-a, a) \to R, a > 0$, are assumed to be continuous. Furthermore, $w: R \to R$ is considered as a bounded and uniformly continuous function.

Definition 1 A bounded, uniformly continuous function $f\colon R \to R$ is called as unpredictable if one can find two sequences t_{n}, s_{n}, both of them diverging to ∞ and positive constants π_0, ρ such that $f(t + t_{\mathrm{n}}) \to f(t)$ uniformly when $n \to \infty$ on the compact subsets of R and $\pi_0 \leq |f(t + t_{\mathrm{n}}) \to f(t)|$ for each $t \in [s_{\mathrm{n}} - \rho, s_{\mathrm{n}} + \rho]$, $n \in N$.

The following criteria are considered to be met during the present investigation.

(H1) $|u(x) - u(y)| \leq L_1|x - y|$, $|v(x) - v(y)| \leq L_2|x - y|$ for every $x, y \in (-a, a)$ with Lipschitz constants L_u, L_v.

(H2) There exist constants $M_u > 0$, $M_v > 0$ such that $\sup\limits_{x\in(-a,a)}|u(x)| \leq M_u$ and $\sup\limits_{x\in(-a,a)}|v(x)| \leq M_v$.

(H3) There is a constant $M_w > 0$ so that $\sup\limits_{t\in R}|w(t)| \leq M_w$.

(H4) $-\frac{1}{\alpha}(M_u + M_v + M_w) < a$.

(H5) $\frac{1}{\alpha}(L_u + L_v) < 1$.

(H6) For each $\chi_{j+1} - \chi_j \leq \chi$, $j \in Z$ for a positive constant χ.

(H7) $\alpha + L_u + \mathcal{H}L_v < 0$, where $\mathcal{H} = \left(1 - \chi(-\alpha + L_u)(1 + L_v\chi)e^{(-\alpha+L_u)\chi} + L_v\right)^{-1}$.

(H8) $\chi\left((-\alpha + L_u)(1 + L_v\chi)e^{(-\alpha+L_u)\chi} + L_v\right) < 1$.

(H9) For a sequence k_n satisfying $k_n \to \infty$ as $n \to \infty$ and for the sequence t_{n} specified in Definition 1, $\chi_{j-k_n} + t_{\mathrm{n}} - \chi_j \to 0$ and $\eta_{j-k_n} + t_{\mathrm{n}} - \eta_j \to 0$ as $n \to \infty$ on each interval, which is finite and comprised of integers.

2. Existence, Uniqueness and Stability of Unpredictable Oscillations

We take a set $\mathcal{D}$ whose elements are real valued functions given by $\Omega\colon R \to R$ together with the norm defined as $\|\Omega\|_1 = \sup\limits_{t\in R}|\Omega(t)|$. It is adopted that an element Ω of the set $\mathcal{D}$ admits the features listed below:

(D1) Ω is continuous uniformly.

(D2) $\|\Omega\|_1 < a$;

(D3) a sequence t_{n} divergent to ∞ can be found to satisfy the limit $\Omega(t + t_{\mathrm{n}}) \to \Omega(t)$ uniformly on each closed and also bounded interval of real numbers.

Lemma 1 [28]. A necessary and sufficient condition for a bounded function $x(t), t \in R$, to be a solution of (1) is that the integral equation given by

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\alpha(t-\tau)} \left(u\big(x(\tau)\big) + v\left(x\big(h(\tau)\big)\right) + w(\tau)\right) d\tau, \qquad (2)$$

holds true for $x(t)$.

On the set $\mathcal{D}$, Construct an operator Γ formulated by

$$\Gamma\Omega(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\alpha(t-\tau)} \left(u\big(\Omega(\tau)\big) + v\left(\Omega\big(h(\tau)\big)\right) + w(\tau)\right) d\tau.$$

Theorem 1 Γ is invariant on $\mathcal{D}$.

Proof. We are required to demonstrate that the set $\mathcal{D}$ involves $\Gamma\mathcal{D}$ in it. If we find the derivative of $\Gamma\Omega(t)$ along the independent variable t and then take the absolute value of this derivative, we get

$$\left|\frac{d\Gamma\Omega(t)}{dt}\right| \le \left|u\big(\Omega(t)\big)\right| + \left|v\left(\Omega\big(h(t)\big)\right)\right| + |w(t)| -$$

$$-\alpha \int_{-\infty}^{t} e^{\alpha(t-\tau)} \left(u\big(\Omega(\tau)\big) + v\left(\Omega\big(h(\tau)\big)\right) + w(\tau)\right) d\tau \le 2(M_u + M_v + M_w)$$

for each real number t. This means that $\Gamma\Omega$ meets the property (D1), since it is continuous uniformly due to having a bounded derivative.

Note that any element Ω of the set $\mathcal{D}$ satisfies

$$|\Gamma\Omega(t)| \le -\frac{1}{\alpha}(M_u + M_v + M_w).$$

This implies together with (H4) that (D2) is true for $\Gamma\Omega$.

Now, we are only left to consider (D3). For this purpose, we pick $\delta > 0$ and consider the interval $[\lambda, \mu]$ with $\lambda < \mu$ We can find $\nu < \lambda$ and $\sigma > 0$ in order to fulfill the following four inequalities:

$$-\frac{2}{\alpha}(L_u a + L_v a + M_w)e^{\alpha(\lambda-\nu)} < \frac{\delta}{4}, \qquad (3)$$

$$-\frac{\sigma}{\alpha}(1 + L_u) < \frac{\delta}{4}. \qquad (4)$$

It is true for sufficiently large values of n that $|\Omega(t+t_{\mathrm{n}})-\Omega(t)|<\sigma$ and $|w(t+t_{\mathrm{n}})-w(t)|<\sigma$ whenever $t\in[\nu,\mu]$ and $\left|\chi_{j-k_n}+t_{\mathrm{n}}-\chi_j\right|<\sigma$ whenever $\chi_j\in[\nu,\mu]$, $j\in Z$. Therefore, we have

$$|\Gamma\Omega(t+t_{\mathrm{n}})-\Gamma\Omega(t)|\leq\int_{-\infty}^{c}e^{\alpha(t-\tau)}(L_u|\Omega(\tau+t_{\mathrm{n}})-\Omega(\tau)|+$$
$$+L_v\left|\Omega\big(h(\tau+t_{\mathrm{n}})\big)-\Omega\big(h(\tau)\big)\right|+|w(t+t_{\mathrm{n}})-w(t)|\big)d\tau+$$
$$\int_{c}^{t}e^{\alpha(t-\tau)}(L_u|\Omega(\tau+t_{\mathrm{n}})-\Omega(\tau)|+$$
$$+L_v\left|\Omega\big(h(\tau+t_{\mathrm{n}})\big)-\Omega\big(h(\tau)\big)\right|+|w(t+t_{\mathrm{n}})-w(t)|\big)d\tau$$
$$\leq-\frac{2}{\alpha}(L_u a+L_v a+M_w)e^{\alpha(\lambda-\nu)}-\frac{1}{\alpha}(1+L_u)\sigma+$$
$$+L_v\int_{c}^{t}e^{\alpha(t-\tau)}\left|\Omega\big(h(\tau+t_{\mathrm{n}})\big)-\Omega\big(h(\tau)\big)\right|d\tau.$$

For $t\in[\lambda,\mu]$ fixed, we assume that $\chi_j\leq\chi_{j-k_n}+t_{\mathrm{n}}$ and $\chi_j\leq\chi_{j-k_n}+t_{\mathrm{n}}=c<\chi_{j+1}<\chi_{j+2}<\cdots<\chi_{j+r}\leq\chi_{j+r-k_n}+t_{\mathrm{n}}\leq t<\chi_{j+r+1}$, which does not lose the generality. Thuswise, there exist only r discontinuity moments on $[\nu,t]$: $\chi_{j+1},\chi_{j+2},\dots,\chi_{j+r}$. Moreover, assume that

$$-\frac{2(r+1)L_v\,\sigma}{\alpha}(1-e^{\alpha\chi})<\frac{\delta}{4},\qquad(5)$$

$$-\frac{2rL_v\,a}{\alpha}(e^{-\alpha\sigma}-1)<\frac{\delta}{4}.\qquad(6)$$

Next, we shall focus on the integral

$$\int_{c}^{t}e^{\alpha(t-\tau)}\left|\Omega\big(h(\tau+t_{\mathrm{n}})\big)-\Omega\big(h(\tau)\big)\right|d\tau.$$

In fact, this integral can be written as follows

$$\sum_{j=k}^{k+r-1} \int_{\chi_{j-k_n}+t_\mathrm{n}}^{\chi_{j+1}} e^{\alpha(t-\tau)} \left|\Omega\big(h(\tau+t_\mathrm{n})\big)-\Omega\big(h(\tau)\big)\right| d\tau +$$

$$+\sum_{j=k}^{k+r-1} \int_{\chi_{j+1}}^{\chi_{j+1-k_n}+t_\mathrm{n}} e^{\alpha(t-\tau)} \left|\Omega\big(h(\tau+t_\mathrm{n})\big)-\Omega\big(h(\tau)\big)\right| d\tau +$$

$$+\int_{\chi_{k+r-k_n}+t_\mathrm{n}}^{t} e^{\alpha(t-\tau)} \left|\Omega\big(h(\tau+t_\mathrm{n})\big)-\Omega\big(h(\tau)\big)\right| d\tau.$$

If $\chi_{i-k_n}+t_\mathrm{n} \le t < \chi_{i+1}$ for some $i \in Z$, then it can be seen that $h(t)=\eta_i$, and in turn it is true due to condition (H9) that $h(t+t_\mathrm{n})=\eta_{i+k_n}$. Thus, we attain that

$$\int_{\chi_{i-k_n}+t_\mathrm{n}}^{\chi_{i+1}} e^{\alpha(t-\tau)} \left|\Omega\big(\eta_{i+k_n}\big)-\Omega(\eta_i)\right| d\tau =$$

$$=\int_{\chi_{i-k_n}+t_\mathrm{n}}^{\chi_{i+1}} e^{\alpha(t-\tau)} |\Omega(\eta_i+t_\mathrm{n})-\Omega(\eta_i)+\Omega(\eta_i+t_\mathrm{n}+o(1))-\Omega(\eta_i+t_\mathrm{n})|\, d\tau$$

$$\le \int_{\chi_{i-k_n}+t_\mathrm{n}}^{\chi_{i+1}} e^{\alpha(t-\tau)} \left|\sigma+\left|\Omega\big(\eta_i+t_\mathrm{n}+o(1)\big)-\Omega(\eta_i+t_\mathrm{n})\right|\right| d\tau.$$

Recall that Ω is continuous uniformly. As a result, given $\sigma > 0$ and for big enough n, there is a $\kappa > 0$ so that $\left|\Omega\big(\eta_i+t_\mathrm{n}+o(1)\big)-\Omega(\eta_i+t_\mathrm{n})\right| < \sigma$ as long as $\left|\eta_{i-k_n}+t_\mathrm{n}-\eta_i\right| < \kappa$. After all, we conclude that

$$\sum_{j=k}^{k+r-1} \int_{\chi_{j-k_n}+t_\mathrm{n}}^{\chi_{j+1}} e^{\alpha(t-\tau)} \left|\Omega\big(h(\tau+t_\mathrm{n})\big)-\Omega\big(h(\tau)\big)\right| d\tau \le 2p\sigma \int_{\chi_{i-k_n}+t_\mathrm{n}}^{\chi_{i+1}} e^{\alpha(t-\tau)}\, d\tau \le -\frac{2p\sigma}{\alpha}(1-e^{\alpha\chi})$$

for the integer values of i that lies in the range $l \le i \le l+r-1$. Analogously, it can be achieved that

$$\int_{\chi_{i+r-1-k_n}+t_\mathrm{n}}^{t} e^{\alpha(t-\tau)} \left|\Omega\big(\eta_{i+k_n}\big)-\Omega(\eta_i)\right| d\tau = -\frac{2\sigma}{\alpha}(1-e^{\alpha\chi}).$$

Likewise, owing to the assumption given by (H9), we find that

$$\sum_{j=k}^{k+r-1}\int_{\chi_{j+1}}^{\chi_{j+1-k_n}+t_{\mathrm{n}}} e^{\alpha(t-\tau)}\left|\Omega\big(h(\tau+t_{\mathrm{n}})\big)-\Omega\big(h(\tau)\big)\right|d\tau \leq 2ra\int_{\chi_{i+1}}^{\chi_{i+1-k_n}+t_{\mathrm{n}}} e^{\alpha(t-\tau)}\,d\tau$$

$$=-\frac{2ra}{\alpha}(e^{-\alpha\sigma}-1)$$

for the integer values of i lying in the range $k \leq i \leq k+r-1$. As a result of these computations performed above, we get

$$\int_{c}^{t} e^{\alpha(t-\tau)}\left|\Omega\big(h(\tau+t_{\mathrm{n}})\big)-\Omega\big(h(\tau)\big)\right|d\tau \leq -\frac{2(r+1)\sigma}{\alpha}(1-e^{\alpha\chi})-\frac{2ra}{\alpha}(e^{-\alpha\sigma}-1).$$

Hence, the following inequality

$$|\Gamma\Omega(t+t_{\mathrm{n}})-\Gamma\Omega(t)| \leq -\frac{2}{\alpha}(L_u a+L_v a+M_w)e^{\alpha(\lambda-\nu)}-\frac{\sigma}{\alpha}(1+L_u)+$$
$$-\frac{2(r+1)\sigma}{\alpha}(1-e^{\alpha\chi})-\frac{2ra}{\alpha}(e^{-\alpha\sigma}-1)$$

is valid for all $t \in [\lambda,\mu]$.

Using the inequalities (3)-(6), we obtain for each $t \in [\lambda,\mu]$ that $|\Gamma\Omega(t+t_{\mathrm{n}})-\Gamma\Omega(t)| < \delta$. This shows that (D3) is fulfilled by Γ as well. The proof is completed.

It is not difficult to prove by assumption (H5) that Γ is a contractive operator on $\mathcal{D}$. Hence, we give this result below and omit the proof here.

Theorem 2 Γ is a contractive operator on $\mathcal{D}$.

Next, we state an auxiliary result which can be proven by using a classical theory of differential equations and condition (H8) [2,4].

Lemma 2. Assume that the conditions (H1), (H6) and (H8) are fulfilled. If $\psi(t)$ is a solution of

$$\psi'(t) = \alpha\psi(t) + u\big(\psi(t) + \varphi(t)\big)u - \big(\psi(\varphi(t)\big) +$$
$$+v\Big(\psi\big(h(t)\big) + \varphi\big(h(t)\big)\Big) - v\Big(\varphi\big(h(t)\big)\Big), \tag{7}$$

where $\varphi(t)$ is a continuous function with $\|\varphi(t)\|_1 < a$, then $\big|\psi\big(h(t)\big)\big| \leq \mathcal{H}$ is satisfied for all $t \in (-\infty, \infty)$.

Now, we are ready to state the main result of the present paper.

Theorem 3. Let all conditions from (H1) to (H9) hold true and the function w be unpredictable. Then, equation (1) possesses a unique exponentially stable unpredictable oscillation.

Proof. It follows from the results in [2, 28] that $\mathcal{D}$ is complete. Hence, the operator Γ has a unique fixed point $\varphi(t)$ which belongs to the set $\mathcal{D}$. Actually, $\varphi(t)$ is the unique solution of (1).

Next, we will show that the function $\varphi(t)$ is unpredictable. m_1, m_2 and ϵ are chosen to satisfy

$$\epsilon < \rho, \tag{8}$$

$$\epsilon\left((\alpha - L_u)\left(\frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2}\right) - 2L_v + \frac{1}{2}\right) < \frac{3}{2m_1}, \tag{9}$$

$$|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)| < \pi_0 min\left\{\frac{1}{4m_1}, \frac{1}{m_2}\right\}, t \in R, |\tau| < \epsilon. \tag{10}$$

We fix ϵ, m_1, m_2 and $n \in N$ and define $\Pi = |\varphi(s_n + t_n) - \varphi(s_n)|$.

Case I: Let $\Pi \geq 0$. Then, we obtain for $t \in [s_n - \epsilon, s_n + \epsilon]$, $n \in N$, that

$$|\varphi(t + t_n) - \varphi(t)| \geq |\varphi(s_n + t_n) - \varphi(s_n)| - |\varphi(s_n) - \varphi(t)| -$$
$$-|\varphi(t + t_n) - \varphi(s_n + t_n)| > \frac{\pi_0}{m_1} - \frac{\pi_0}{4m_1} - \frac{\pi_0}{4m_1} = \frac{1}{2m_1}\pi_0.$$

Case II: Let $\Pi < 0$. Then, the inequality (10) implies for $t \in [s_n, s_n + \epsilon]$, $n \in N$ that

$$|\varphi(t + t_n) - \varphi(t)| \leq |\varphi(s_n + t_n) - \varphi(s_n)| + |\varphi(s_n) - \varphi(t)| +$$
$$+|\varphi(t + t_n) - \varphi(s_n + t_n)| < \frac{\pi_0}{m_1} + \frac{\pi_0}{m_2} + \frac{\pi_0}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{2}{m_2}\right)\pi_0.$$

Since the integral equation given by

$$\varphi(t)=\varphi(s_{\mathrm{n}})+\int\limits_{s_{\mathrm{n}}}^{t}\Big(\alpha\varphi(\tau)+u\big(\varphi(\tau)\big)+v\Big(\varphi\big(h(\tau)\big)\Big)+w(\tau)\Big)\,d\tau.$$

is valid, we can conlude for $t\in\left[s_{\mathrm{n}}+\frac{\epsilon}{2},s_{\mathrm{n}}+\epsilon\right]$, $n\in N$, that

$$|\varphi(t+t_{\mathrm{n}})-\varphi(t)|=|\varphi(s_{\mathrm{n}}+t_{\mathrm{n}})-\varphi(s_{\mathrm{n}})+a\int\limits_{s_{\mathrm{n}}}^{t}\big(\varphi(\tau+t_{\mathrm{n}})-\varphi(\tau)\big)d\tau+$$
$$+\int\limits_{s_{\mathrm{n}}}^{t}\Big(u\big(\varphi(\tau+t_{\mathrm{n}})\big)-\big(\varphi(\tau)\big)\Big)\,d\tau+$$
$$+\int\limits_{s_{\mathrm{n}}}^{t}\Big(v\Big(\varphi\big(h(\tau+t_{\mathrm{n}})\big)\Big)-v\Big(\varphi\big(h(\tau)\big)\Big)\Big)\,d\tau+\int\limits_{s_{\mathrm{n}}}^{t}\big(w(\tau+t_{\mathrm{n}})-w(\tau)\big)d\tau\Big|\geq$$
$$-\frac{\pi_0}{m_1}+\alpha\epsilon\left(\frac{1}{m_1}+\frac{2}{m_2}\right)\pi_0-L_u\epsilon\left(\frac{1}{m_1}+\frac{2}{m_2}\right)\pi_0-$$
$$-L_v\int\limits_{s_{\mathrm{n}}}^{t}\Big|\varphi\big(h(\tau+t_{\mathrm{n}})\big)-\varphi\big(h(\tau)\big)\Big|d\tau+\frac{\epsilon}{2}\pi_0.$$

Next, we fix t from the interval $t\in\left[s_{\mathrm{n}}+\frac{\epsilon}{2},s_{\mathrm{n}}+\frac{\epsilon}{2}\right]$ and pick ϵ sufficiently small in order to satisfy $\chi_{j-k_n}+t_{\mathrm{n}}\leq s_{\mathrm{n}}<s_{\mathrm{n}}+\frac{\epsilon}{2}\leq t\leq s_{\mathrm{n}}+\epsilon<\chi_{j+1}$ for some integer j. For $t\in\left[s_{\mathrm{n}}+\frac{\epsilon}{2},s_{\mathrm{n}}+\epsilon\right]$, it is true that $h(t)=\eta_i$ and hence $h(t+t_{\mathrm{n}})=\eta_{i+k_n}$ because of the assumption (H9). Since the function $\varphi(t)\in\mathcal{D}$ is continuous uniformly, given $\pi_0>0$ and for big enough n a number $\beta>0$ can be found satisfying $\left|\varphi(\eta_{i+k_n})-\varphi(\eta_i)\right|\leq 2\pi_0$ as long as $\left|\eta_{i+k_n}-\eta_i-t_{\mathrm{n}}\right|<\beta$. Therefore, it follows that

$$\int\limits_{s_{\mathrm{n}}}^{t}\Big|\varphi\big(h(\tau+t_{\mathrm{n}})\big)-\varphi\big(h(\tau)\big)\Big|d\tau\leq 2\pi_0.$$

If we use inequality (9), then we see that

$$|\varphi(t+t_n)-\varphi(t)| \geq -\frac{\pi_0}{m_1}+\alpha\left(\frac{1}{m_1}+\frac{2}{m_2}\right)\epsilon\pi_0 - L_u\left(\frac{1}{m_1}+\frac{2}{m_2}\right)\epsilon\pi_0 -$$
$$-2L_v\epsilon\pi_0+\frac{\epsilon}{2}\pi_0 \geq -\frac{\pi_0}{m_1}+\frac{3\pi_0}{2m_1} \geq \frac{\pi_0}{2m_1},$$

which means that $\varphi(t)$ is an unpredictable oscillation according to the Definition 1.

Lastly, we are left to show that this unpredictable oscillation is exponentially stable. Let $y(t)$ be another solution of (1). Construct the difference $\psi(t)=y(t)-\varphi(t)$. It can be shown easily that $\psi(t)$ is a solution of (7). Hence, we have

$$|\psi(t)| \leq e^{\alpha(t-t_0)}|\psi(t_0)| + \int_c^t e^{\alpha(t-t_0)}\left(L_u|\psi(\tau)|+L_v\left|\psi\left(h(\tau)\right)\right|\right)d\tau.$$

Rearranging the last inequality and applying the Gronwall-Bellman Lemma, we find that

$$|y(t)-\varphi(t)| \leq e^{\alpha(t-t_0)}|y(t_0)-\varphi(t_0)| + e^{(\alpha+L_u+L_v\mathcal{H})(t-t_0)}.$$

which gives together with (H7) that the solution $\varphi(t)$ is stable exponentially. The proof is completed.

3. Example and Simulation

We give example with numerical simulations to illustrate the theoretical results. To investigate the presence of an unpredictable solution, we need to use the logistic map $z_{i+1}=cz_i(1-z_i), i\in\mathbb{Z}$. According to the Theorem 4.1 [29], for each $c\in[3+(2/3)^{1/2},4]$, the logistic map possesses an unpredictable solution. Let z_i, $t\in[\chi_i,\ \chi_{i+1}), i\in\mathbb{Z}$ be an unpredictable solution of the logistic map with $\mu=3.92$.

As a perturbation, we will use an unpredictable function $\Phi(t)$ [30]:

$$\Phi(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-4(t-\tau)}\Omega(\tau)d\tau\,, t\in R,$$

where $\Omega(t)=z_i$ for $t\in[\chi_i,\ \chi_{i+1}), i\in\mathbb{Z}$. It is worth noting that $\Phi(t)$ is bounded on the whole real axis such that $\sup_{t\in\mathbb{R}}|\Phi(t)|\leq 1/4$.

Consider the following scalar nonlinear differential equation with piecewise constant argument of generalized type,

$$x'(t) = -0.5x(\mathrm{t}) + 0.04\tanh\left(\frac{x(\mathrm{t})}{4}\right) + 0.04\tanh\left(\frac{x(\mathrm{h}(\mathrm{t}))}{5}\right) - 18\Phi^3(t) + 1.4, \quad (11)$$

where the argument function $h(t) = \eta_k$ is defined by the sequences $\chi_k = k, \quad \eta_k = \frac{\chi_k + \chi_{k+1}}{2} + z_k = \frac{2k+1}{2} + z_k,\ k \in Z$. Moreover, $w(\mathrm{t}) = -18\Phi^3(t) + 1.4$ is unpredictable functions in accordance with Lemmas 1.4 and 1.5 given in [15].

We can see that the conditions $(H1)$ -(H9) are valid for the system (11) with $L_u = 0{,}01$, $L_v = 0.008$, $M_u = M_v = 0.04$ and $M_w = 1.68$, $a = 4$. Thus, by the Theorem 3, system (11) has a unique exponentially stable unpredictable solution.

This is typically an unsolvable problem of finding the initial value of the solution, since it is impossible. According to the property of exponential stability, any solution from the domain approaches to the unpredictable solution. That is, to imagine the behavior of the unpredictable solution $x(t)$, we consider the simulation of another solution $\theta(t)$, with initial values $\theta(0) = 1.859$ in Fig 1.

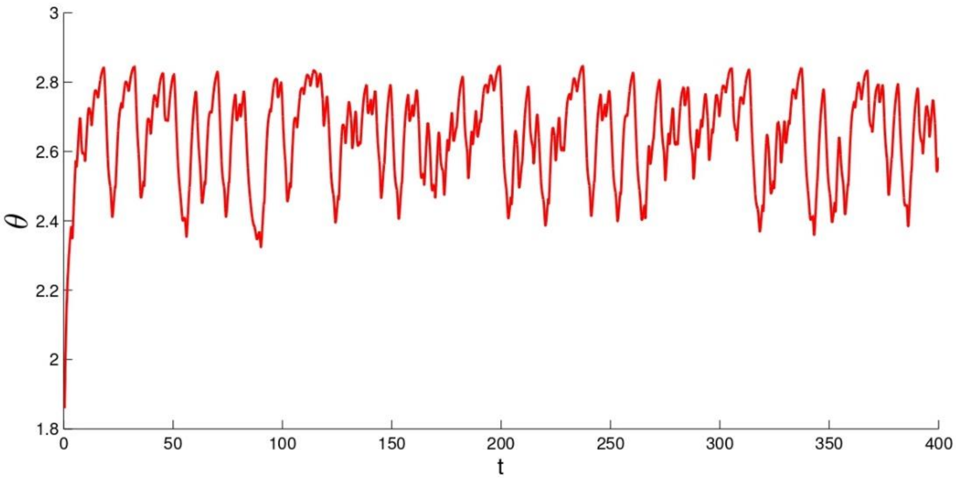


Fig. 1 Graph of the function $\theta(t)$.

ACKNOWLEDGEMENTS

M. Tleubergenova and Z. Nugayeva are supported by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grants No. AP09258737 and No. AP08856170). M. Akhmet is supported by 2247-A National Leading Researchers Program of TUBITAK, Turkey, N 120C138.

References

1. Akhmet, M., Fen, M.O. Existence of unpredictable solutions and chaos // Turk. J. Math. – 2017. – Vol. 41, – P. 254-266.

2. Akhmet, M., Aruğaslan Çinçin, D., Tleubergenova, M., Nugayeva, Z. Unpredictable oscillations for Hopfield-type neural networks with delayed and advanced arguments // Mathematics. –2021. – Vol. 9, №571. – P. 1-19.

3. Wiener, J. Generalized Solutions of Functional Differential Equations // World Scientific – Singapore, 1993.

4. Akhmet, M. Nonlinear Hybrid Continuous/Discrete-Time Models. // Atlantis Press – Paris, 2011.

5. Akhmet, M.U. Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument of generalized type // Nonlinear Analysis – 2007. –Vol. 66, – P. 367–383.

6. Cooke, K.L.,Wiener, J. Retarded differential equations with piecewise constant delays // J. Math. Anal. Appl. – 1984. –Vol. 99, – P. 265–297.

7. Akhmet, M.U. (2008). Stability of differential equations with piecewise constant arguments of generalized type // Nonlinear Analysis – 2008. –Vol. 68, –P. 794–803.

8. Akhmet, M.U., Aruğaslan, D. (2009). Lyapunov-Razumikhin method for differential equations with piecewise constant argument // Discrete and Contiunous Dynamical Systems-Series A. – 2009. –Vol. 25, – P. 457–466.

9. Akhmet, M.U., Aruğaslan, D., Yılmaz, E. Stability analysis of recurrent neural networks with piecewise constant argument of generalized type // Neural Networks. – 2010. –Vol. 23, – P. 805–811.

10. Akhmet, M.U., Aruğaslan, D., Yılmaz, E. Stability in cellular neural networks with a piecewise constant argument // J. Comput. Appl. Math. – 2010. –Vol. 233, – P. 2365–2373.

11. Akhmet, M.U., Aruğaslan, D., Cengiz, N. Exponential stability of periodic solutions of recurrent neural networks with functional dependence on piecewise constant argument // Turk. J. Math. – 2018. –Vol. 42, – P. 272–292.

12. Aruğaslan Çinçin, D., Cengiz, N. Qualitative behavior of a Lienard-type differential equation with piecewise constant delays // Iran. J. Sci. Technol. Trans. Sci. – 2020. –Vol. 44, – P. 1439–1446.

13. Wu, A., Liu, L., Huang, T., Zeng, Z. Mittag-Leffler stability of fractional-order neural networks in the presence of generalized piecewise constant arguments // Neural Networks – 2017. – Vol. 85, – P. 118–127.

14. Xi, Q. Razumikhin-type theorems for impulsive differential equations with piecewise constant argument of generalized type // Adv. Differ. Equ. – 2018. –Vol. 267, – P. 1–16.

15. Akhmet, M., Fen, M.O., Tleubergenova, M., Zhamanshin, A. Unpredictable solutions of linear differential and discrete equations // Turk. J. Math. – 2019. –Vol. 43, – P. 2377–2389.

16. Akhmet, M., Tleubergenova, M., Zhamanshin, A. Quasilinear differential equations with strongly unpredictable solutions // Carpathian J. Math. – 2020. –Vol. 36, – P. 341–349.

17. Akhmet, M., Tleubergenova, M., Fen, M.O., Nugayeva, Z. Unpredictable solutions of linear impulsive systems // Mathematics. – 2020. –Vol. 8, №1798.

18. Akhmet, M., Tleubergenova, M., Nugayeva, Z. (2020). Strongly unpredictable oscillations of Hopfield-type neural networks // Mathematics. – 2020. –Vol. 8, №1791.

19. Akhmet, M., Seilova, R., Tleubergenova, M., Zhamanshin, A. Shunting inhibitory cellular neural networks with strongly unpredictable oscillations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. – 2020. –Vol. 89, №105287.

20. Akhmet, M., Tleubergenova, M., Zhamanshin, A. Inertial neural networks with unpredictable oscillationsr // Mathematics. – 2020. –Vol. 8, №1797.

21. Akhmet, M., Fen, M.O., Tleubergenova, M., Zhamanshin, A. Poincare chaos for a hyperbolic quasilinear system // Miskolc Mathematical Notes. – 2019. –Vol. 20, – P. 33–44.

22. Farkas, M. Periodic Motion // Springer – New York, 1994.

23. Corduneanu, C. Almost Periodic Oscillations and Waves // Springer – New York, 2009.

24. Akhmet, M.U. Almost Periodicity, Chaos, and Asymptotic Equivalence. Springer –New York, 2020.

25. Pinto, M., Sepulveda, D., Torres, R. Exponential periodic attractor of impulsive Hopfield-type neural network system with piecewise constant argument // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. – 2018. –Vol. 34, – P. 1–28.

26. Aruğaslan, D., Cengiz, N. Existence of periodic solutions for a mechanical system with piecewise constant forces // Hacet. J. Math. Stat. – 2018. –Vol. 47, – P. 521–538.

27. Aruğaslan, D., Özer, A. Stability analysis of a predator-prey model with piecewise constant argument of generalized type using Lyapunov functions //
J. Math. Sci. (N. Y.) – 2014. –Vol. 203, – P. 297–305.

28. Hartman, P. Ordinary Differential Equations. Birkhauser – Boston, 1982.

29. Akhmet M., Fen M.O. Poincare chaos and unpredictable functions // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2017. – № 48. - P. 85-94.

30. Akhmet M., Fen M.O. Non-autonomous equations with unpredictable solutions // Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. – 2018. – №59.– P. 657-670.

СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ЖАЛПЫЛАНҒАН ТИПТІ КЕЗЕКПЕН КЕШІКТІРІЛГЕН ЖӘНЕ ІЛГЕРІЛЕГЕН БӨЛІКТІ АРГУМЕНТТІ БОЛЖАНБАЙТЫН ТЕРБЕЛІСТЕРІНІҢ БАР БОЛУЫ ЖӘНЕ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ ТУРАЛЫ

Д. АРУГАСЛАН ЧИНЧИН[1], М. ТЛЕУБЕРГЕНОВА[2,3], З. НУГАЕВА[2,3], М. АХМЕТ[4]

[1] *Сулейман Демирель Университеті, Испарта, Түркия*

[2] *Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан*

[3] *Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институты, Алматы, Қазақстан*

[4] *Орталық-Шығыс Техникалық Университеті, Анкара, Түркия*

E-mail: duyguarugaslan@sdu.edu.tr; madina_1970@mail.ru; zahira2009.85@mail.ru; marat@metu.edu.tr

Аңдатпа. Соңғы зерттеулер дифференциалдық теңдеу үшін болжанбайтын тербелістің бар болуы Пуанкаре хаосының бар болуымен бірдей екенін көрсетті [1,2]. Осыған байланысты, бұл жұмыста жалпыланған типтегі кезекпен кешіктірілген және ілгерілеген бөлікті аргументі сызықтық емес дифференциалдық теңдеу үшін болжанбайтын тербелістерді талдау негізі мақсат болып табылады. Қарастырылып отырған теңдеу үшін болжанбайтын тербелістердің бар болуы-жалғыздығы мен экспоненциалды орнықтылығы тексеріледі. Аргумент аралас, яғни, кешіктірілген және ілгерілеген түрге ие болғандықтан, ол теориялық зерттеулер үшін де, нақты қосымшалар үшін де көптеген артықшылықтарды ұсынады. Нәтижелер мысалдар мен модельдеу арқылы расталады.

Түйін сөздер: болжанбайтын тербелістер; Пуанкаре хаосы; экспоненциалды орнықтылық; бөлікті-тұрақты аргумент.

О СУЩЕСТВОВАНИИ И УСТОЙЧИВОСТИ НЕПРЕДСКАЗУЕМЫХ КОЛЕБАНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КУСОЧНО-ПООЧЕРЕДНО ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ И ОПЕРЕЖАЮЩИМ АРГУМЕНТАМ ОБОБЩЕННОГО ТИПА

Д. АРУГАСЛАН ЧИНЧИН[1], М. ТЛЕУБЕРГЕНОВА[2,3], З. НУГАЕВА[2,3], М. АХМЕТ[4]

[1] *Университет Сулеймана Демиреля, Испарта, Турция*

[2] *Актюбинский региональный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан*

[3] *Институт информационных и вычислительных технологий, Алматы, Казахстан*

[4] *Средневосточный технический университет, Анкара, Турция*

E-mail: duyguarugaslan@sdu.edu.tr; madina_1970@mail.ru; zahira2009.85@mail.ru; marat@metu.edu.tr

Аннотация. Недавние исследования показали, что наличие непредсказуемого колебания для дифференциального уравнения равносильно наличию хаоса Пуанкаре [1,2]. В связи с этим в данной работе ставится цель проанализировать непредсказуемые колебания для нелинейного дифференциального уравнения с кусочно-поочередно запаздывающим и опережающим аргументом обобщенного типа. Для рассматриваемого уравнения проверяются существование-единственность и экспоненциальная устойчивость непредсказуемых колебаний. Поскольку аргумент имеет смешанный тип, запаздывающий и опережающий, он предлагает многочисленные преимущества для теоретических исследований, а также для многих реальных приложений. Результаты подтверждены примером и моделированием.

Ключевые слова: непредсказуемые колебания; хаос Пуанкаре; экспоненциальная устойчивость; кусочно-постоянный аргумент.

UDC 517.52

IRSTI 27.31.17

ON NON-INCREASING REARRANGEMENTS OF GENERALIZED FRACTIONAL MAXIMAL FUNCTIONS

N.A. BOKAYEV[1[0000-0002-7071-1882]], A.GOGATISHVILI[2[0000-0003-3459-0355]], A.N. ABEK[1]

[1] L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

[2] Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences, Prague, Czech Republic

e-mail: bokayev2011@yandex.ru, gogatish@math.cas.cz, azhar.abekova@gmail.com

Annotation. In this paper we consider the generalized fractional-maximal functions. We give an estimates of non-increasing rearrangements of generalized fractional maximal functions. The study of various properties of operators using a generalized fractional-maximal function is sometimes easier than the study of such operators using a generalized potential.

Keywords: non-increasing rearrangement, generalized fractional-maximal function, generalized Riesz potentials

Let $L_0 = L_0(R^n)$ be the set of all Lebesgue measurable functions $f : R^n \to C$; $\tilde{L}_0 = \tilde{L}_0(R^n)$ is the set of functions $f \in L_0$, for which the non-increasing rearrangement of the f^* is not identical to infinity. Non-increasing rearrangement f^* defined by the equality:

$$f^*(t) = \inf\left\{y \in [0,\infty) : \lambda_f(y) \le t\right\}, \quad t \in R_+ = (0,\infty),$$

where

$$\lambda_f(y) = \mu_n\left\{x \in R^n : \left|f(x)\right| > y\right\}, \quad y \in [0,\infty)$$

is the Lebesgue distribution function [1].

The function $f^{**} : (0,\infty) \to [0,\infty]$ is defined as

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(\tau)d\tau; \quad t \in R_+$$

Throughout this work, we will denote by C positive constants, generally speaking, different in different places.

We define the following classes of function.

Definition 1. Let $n \in N$, $R \in (0,\infty]$ and $\Phi : (0,R) \to R_+$. We say that the function Φ belongs to the class $A_n(R)$ if: Φ decreases and is continuous on $(0,R)$, the function $\Phi(r)r^n \uparrow$ is quasi-increasing on (0,R);

the function Φ belongs to the class $B_n(R)$ if Φ decreases and is continuous on $(0,R)$; there exists a constant $C \in R_+$ such that

$$\int_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1}d\rho \le C\Phi(r)r^n,\ r \in (0,R);$$

the function Φ belongs to the class $E_n(R)$ if

$$\int_0^{r^n} \frac{ds}{\Phi(s^{1/n})s} \le \frac{C}{\Phi(r)},\ \forall t \in (0,R).$$

For example, $\Phi(t) = t^{-\alpha} \in A_n(\infty),\ 0<\alpha<n$.

$$\Phi(\rho) = \rho^{\alpha-n} \in B_n(\infty)\,(0<\alpha<n);\quad \Phi(\rho) = ln\frac{eR}{\rho} \in B_n(R),\ R \in R_+.$$

Note that $\Phi \in E_n(R)$ is equivalent to the inequality:

$$\int_0^r \frac{dt}{\Phi(t)t} \le \frac{C}{\Phi(t)}$$

Lemma 1. $E_n(R) \subset B_n(R) \subset A_n(R)$.

Definition 4. Let $\Phi \in A_n(\infty)$. The *generalized fractional-maximal function* $M_\Phi f$ is defined for the function $f \in L_1^{loc}(R^n)$ by the equality

$$(M_\Phi f)(x) = \sup_{r>0} \Phi(r) \int_{B(x,r)} |f(y)|dy,$$

where $B(x,r)$ is a ball with the center at the point x and radius r.

That is, consider the operator $M_\Phi: L_1^{loc}(R^n) \to L_0(R^n)$.

In the case $\Phi(r) = r^{\alpha-n}$, $\alpha \in (0,n)$ we obtain the classical fractional-maximal function $M_\alpha f$:

$$(M_\alpha f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n-\alpha}} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy.$$

Other types of generalized fractional-maximal functions were considered in [2], [3].

In the works [4]-[6] the generalized Riesz potential was considered using the convolution operator

$$Af(x) = (G * f)(x) = 2\pi^{-n/2} \int_{R^n} G(x-y)f(y)dy;\ f \in E_1(R^n)$$

where the kernel $G(x)$ satisfies the conditions:

$G(x) \cong \Phi(|x|),\ x \in R^n,\qquad \int_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1}d\rho \le c\Phi(r)r^n, r \in R_+.$

In the case $G(x) = |x|^{\alpha-n},\ \alpha \in [0, n)$ we have the classical Riesz potential $I_\alpha f$:

$$I_\alpha f(x) = \int_{R^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy,$$

Theorem 1. Let $\Phi \in B_n(\infty)$. Then

$$M_\Phi f(x) \lesssim (G * |f|)(x), x \in R^n$$

for every $f \in L_1^{loc}(R^n)$.

Theorem 2. Let $\Phi \in A_n(\infty)$. Then there exist a positive constant C depending from n such that

$$(M_\Phi f)^*(t) \le C \sup_{t<s<\infty} s\Phi(s^{1/n}) f^{**}(s),\ t \in (0, \infty)$$

for every $f \in L_1^{loc}(R^n)$.

Theorem 3. Let $\Phi \in A_n(\infty)$. Inequality (10) is sharp in the sense that for every $\varphi \in L_0^+(0,\infty;\downarrow)$ there exists a function $f \in L_1(R^n)$ such that $f^* = \varphi$ a.e. on $(0,\infty)$ and

$$(M_\Phi f)^*(t) \ge C \sup_{t<s<\infty} s\Phi(s^{1/n}) f^{**}(s),\ t \in (0, \infty),$$

where, C is a positive constant which depends only on n.

Theorem 4. Let $\Phi \in B_n(\infty)$. Then there exists a positive constant C depending from n such that

$$(M_\Phi f)^{**}(t) \le C \sup_{t<s<\infty} s\Phi(s^{1/n}) f^{**}(s), \; t \in (0,\infty) \quad (1)$$

for every $f \in L_1^{loc}(R^n)$.

Remark 1. It is known [7] that for generalized Riesz potential satisfies the O'Neill inequality

$$(G * f)^{**}(t) \le C_0 \left(\frac{1}{t}\int_0^t G^*(s)ds\right)\int_0^t f^*(\tau)d\tau + \int_t^\infty G^*(\tau)f^*(\tau)d\tau$$

By Theorem 1 it follows that

$$(M_\Phi f)^{**}(t) \le C_0 \left(\frac{1}{t}\int_0^t G^*(s)ds\right)\int_0^t f^*(\tau)d\tau + \int_t^\infty G^*(\tau)f^*(\tau)d\tau \qquad (2)$$

Note that inequality (1) is more precise than inequality (2).

References

1. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970

2. Gogatishvili A., Neves J. S., Opitz B., Optimality of embeddings of Bessel-potential- type spaces, // Function spaces, differential operators and nonlinear analysis. Math Inst. Acad. Sci. Chech Republic, (2005), 97-102.

3. Mustafayev R.Ch., Bilgicli N. Generalized fractional maximal functions in Lorentz spaces // Journal of Mathematical Inequalities, Volume 12, №3, 2018,

4. Goldman M. L.On the cones of rearrangements for generalized Bessel and Riesz potentials.// Complex Variables and Elliptic Equations 55, 8-10 (2010), 817-832.

5. Goldman M. L., On optimal embeddings of Bessel and Riesz potentials. //Proc. of the Steklov Inst. Math., 269 (2010), 91-111.

6. Bokayev N.A., Goldman M.L., Karshygina G. Zh. Cones of functions with monotonocity conditions for generalized Bessel and Riesz potetials // Mathem. Notes, 104, 3 (2018), 356-373.

7. O'Neil R., Convolution Operators and L(p, q) Spaces. // Duke Math. J., 30 (1963), 129-142.

ЖАЛПЫЛАНҒАН БӨЛШЕКТІ МАКСИМАЛДЫ ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ ОНЫҢ ӨСПЕЙТІН АУЫСТЫРУЫН БАҒАЛАУ

Н.А. БОКАЕВ[1], А. ГОГАТИШВИЛИ[2], А.Н. АБЕК[1]

1 Л.Н. Гумелов атындағы Еурозия ұлттық университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

2 Чех ғылым академиясының математика институты, Прага, Чех Республикасы

e-mail: bokayev2011@yandex.ru, gogatish@math.cas.cz, azhar.abekova@gmail.com

Аңдатпа. Бұл жұмыста біз жалпыланған бөлшекті максималды функцияларды қарастырамыз. Біз жалпыланған бөлшекті максималды функциялардың өспейтін ауыстыруларының бағаларын береміз. Жалпыланған бөлшекті-максималды функцияны қолданатын операторлардың әр түрлі қасиеттерін зерттеу кейде осындай операторларды жалпыланған потенциалмен зерттеуден оңайырақ.

Түйін сөздер: : өспейтін ауыстыру, бөлшекті максималды функция.

ОБОБЩЕННАЯ ДРОБНО-МАКСИМАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ОЦЕНКА ЕЕ НЕВОЗРАСТАЮЩЕЙ ПЕРЕСТАНОВКИ

Н.А. БОКАЕВ[1], А. ГОГАТИШВИЛИ[2], А.Н. АБЕК[1]

[1] Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, НурСултан, Казахстан

[2] Институт математики Чешской академии наук, Прага, Чешская Республика

e-mail: bokayev2011@yandex.ru, gogatish@math.cas.cz, azhar.abekova@gmail.com

Аннотация. В данной работе мы рассматриваем обобщенные дробно-максимальные функции. Мы даем некоторые оценки невозрастающих перестановок обобщенных дробных максимальных функций. Изучение различных свойств операторов, использующих обобщенную дробно-максимальную функцию, иногда проще, чем изучение таких операторов, использующих обобщенный потенциал.

Ключевые слова: невозрастающая перестановка, обобщенная дробно-максимальная функция .

UDC 517.955
IRSTI 27.31.55

INVERSE CAUCHY PROBLEMS FOR POLYHARMONIC HEAT EQUATIONS

M. KARAZYM, D. SURAGAN[0000-0003-4789-1982]
Nazarbayev University, Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail: mukhtar.karazym@nu.edu.kz; durvudkhan.suragan@nu.edu.kz

Annotation. We recover a time-dependent coefficient in inverse problems for polyharmonic heat equations. This method can be applied to many evolution equations.

Keywords: polyharmonic heat equations, inverse Cauchy problems, fundamental solutions.

We consider the following inverse Cauchy problems

$$\partial_t u_1(x,t) + a(t)(-\Delta_x)^m u_1(x,t) = 0, \quad x \in R^n,\ 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$u_1(x,0) = \Phi(x), \quad x \in R^n, \tag{2}$$

$$u_1(q,t) = h_1(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

and

$$\partial_t u_2(x,t) + a(t)(-\Delta_x)^m u_2(x,t) = 0, \quad x \in R^n,\ 0 < t \le T, \tag{4}$$

$$u_2(x,0) = -(-\Delta_x)^m \Phi(x), \quad x \in R^n, \tag{5}$$

$$u_2(q,t) = h_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

where $a(t)$ is unknown, $\Omega \subseteq R^n$, $q \in \Omega$ is an arbitrarily fixed point and

First, we show existence and uniqueness of the Cauchy problem (1)-(2). If $a(t)$ is continuous, then the equation (1) is parabolic in the sense of Petrovskii [1, 2].

Theorem 1 ([1]) *Let* $a(t)$ *be* continuous *on* $[0,T]$. *Let* $\Phi \in C^{2m,\gamma}, 0 < \gamma < 1$ *be defined by*

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases} \tag{7}$$

Then, the Cauchy problem (1) – (2) has the following unique solution

$$u(x,t) = \int_{R^n} E_a(x-y,t)\Phi(y)dy = \int_{\Omega} E_a(x-y,t)\varphi(y)dy$$

and it belongs to $C^{2m,\gamma,0}(\Omega \times [0,T])$, *where the fundamental solution of (1) is given by*

$$E_a(x,t) := (2\pi)^{-n} \int_{R^n} e^{ix\cdot s - |s|^{2m} a_1(t)} ds \,.$$

Also, it can be reduced to the one-dimensional integral

$$E_a(x,t) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (a_1(t))^{-\frac{n}{2m}} \int_0^{\infty} e^{-r^{2m}} r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}\left(r\,|\,x\,|\, a_1(t)^{-\frac{1}{2m}} \right) dr,$$

where, J_k is the Bessel function of the first kind (see, [2, 183-184 pp.]). Now we present our main result.

Theorem 2 ([3]) *Let* $\Phi(x)$ *be a function of* $C^{4m,\gamma}$. *Let the additional data* h_1 *and* h_2 *satisfy the assumptions:*

i. $h_1 \in C^1[0,T]$;

ii. $h_2 \in C[0,T]$ *such that* $h_2(t) \neq 0$ *for all* $0 \le t \le T$ *(which also implies* $h_2(0) = u_2(x,0)|_{x=q} = -(-\Delta_y)^m \Phi(x)|_{x=q} \neq 0$*);*

iii. $\dfrac{h_1'(t)}{h_2(t)}$ *ensures that the equation (1) is uniformly parabolic in the sense of Petrovskii.*

Then the inverse problem (1)-(6) has a unique solution and the coefficient $a(t)$ *is given explicitly*

$$a(t) = \frac{h_1'(t)}{h_2(t)}, \qquad 0 \le t \le T.$$

References

1. S. D. Eidelman, Parabolic Systems. – Nauka, Moscow, 1964 (in Russian).
2. S. D. Eidelman, N. V. Zhitarashu. Parabolic Boundary Value Problems. –Oper. Theory Adv. Appl. 101, Birkhauser, Basel, 1998.
3. M. Karazym, T. Ozawa and D. Suragan. Multidimensional inverse Cauchy problems for evolution equations //Inverse Problems in Science & Engineering. – DOI 10.1080/17415977.2020.1739034. – 2020.

ПОЛИГАРМОНИЯЛЫҚ ЖЫЛУ ТЕҢДЕУЛЕРІНЕ АРНАЛҒАН КОШИДІҢ КЕРІ ЕСЕПТЕРІ

М. КАРАЗЫМ, Д. СҰРАГАН

Назарбаев Университеті, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

Аңдатпа. Полигармониялық жылу теңдеулері үшін кері есептердегі уақытқа тәуелді коэффициентті қалпына келтіріледі. Бұл әдісті көптеген эволюциялық теңдеулерге қолдануға болады.

Түйінді сөздер: жылуөткізгіштіктің полигармоникалық теңдеулері, Кошидің кері есептері, іргелі шешімдер.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

М. КАРАЗЫМ, Д. СҰРАГАН

Назарбаев университет, Нур-Султан, Казахстан

Аннотация. Восстанавливливается зависящий от времени коэффициент в обратных задачах для полигармонических уравнений теплопроводности. Этот метод может быть применен ко многим эволюционным уравнениям.

Ключевые слова: полигармонические уравнения теплопроводности, обратные задачи Коши, фундаментальные решения.

УДК 517.956.3
МРНТИ 27.41.19

ON A NUMERICAL METHOD FOR SOLVNIG BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A LOADED HYPERBOLIC EQUATION

S. S. KABDRAKHOVA[1][0000-0003-0247-5985], ZH. ASSAN[2]

[1,2] Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

e-mail: symbat2909.sks@gmail.com; zh.assanova98@gmail.com

Annotation. In this communication, we consider a semi-periodic boundary value problem for a loaded linear hyperbolic equation. To find a numerical solution, the problem is approximated by the finite difference method using a semi-implicit scheme. The sweep method is used to solve the difference problem.

Keywords: laded hyperbolic equation, boundary value problem, numerical method, semi implicit scheme, finite difference method, sweep method.

We consider the semi-periodic boundary value problems for the linear loaded hyperbolic equation

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x} = A(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + B(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + C(x,t)u(x,t) + f(x,t) + A_0(x,t)\frac{\partial (x_0,t)}{\partial x}, (x,t) \in [0,2] \times [0,2\pi] \qquad (1)$$

subject to the initial condition

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad t \in [0,2\pi], \qquad (2)$$

and boundary condition

$$u(x,0) = u(x,2\pi) = 0, \quad x \in [0,2], \qquad (3)$$

where $A(x,t), B(x,t), C(x,t)$ and $f(x,t)$ are continuous on Ω, $\varphi(t)$ is continuous differentiable on $[0,2]$ and x_0 is loaded point.

The development of a numerical technique for a hyperbolic equation combining classical, integral boundary conditions and nonlocal conditions has been studied by many authors [1-5]. In [6], a new numerical method is presented, which is used to solve the wave equation with nonlocal boundary conditions. In many works, initial-boundary value problems are considered for hyperbolic, loaded - hyperbolic equations of the second and third orders, but the equations do not contain a mixed derivative. In [7], equations with a mixed derivative of the third order are considered and the solution of the Goursat problem for a loaded hyperbolic equation of the second order, proposed as a mathematical model of the Aller equation under certain conditions, is written out in an explicit form.

For numerical simulations, we introduce a space time grid with steps h, τ respectively, in the variables x, t:

$$\omega_{h,\tau} = \{x_i = ih, i = \overline{0, N}; t_k = k\tau, k = \overline{0, M};\} \qquad (4)$$

Where $h = \frac{l}{N}, \tau = \frac{T}{M}$.

On this grid we approximate the problem (1)–(3) using the finite difference method.

Consider the semi implicit scheme for the problem (1)–(3).

$$\frac{u_{i+1}^{k+1} - u_{i+1}^{k} - u_{i-1}^{k+1} - u_{i-1}^{k}}{2h\tau} = A_i^k \frac{u_{i+1}^{k+1} - u_{i-1}^{k+1}}{2h} + B_i^k \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\tau} + C_i^k u_i^k + f_i^k + A_{0}{}_i^k \frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2h} \qquad (5)$$

For $(i, k) \in \omega_{h,\tau}$, with initial condition

$$u_0^k = \varphi_k \qquad (6)$$

and with boundary conditions

$$u_i^0 = 0, u_N^0 = 0 \qquad (7)$$

It is well-known, that the implicit scheme and it has accuracy order $O(\tau + |h|^2)$.

Equation (5) can be reduced to the most general form:

$$a_i u_{i+1}^{k+1} - b_i u_i^{k+1} + c_i u_{i-1}^{k+1} = F_i \qquad (8)$$

where

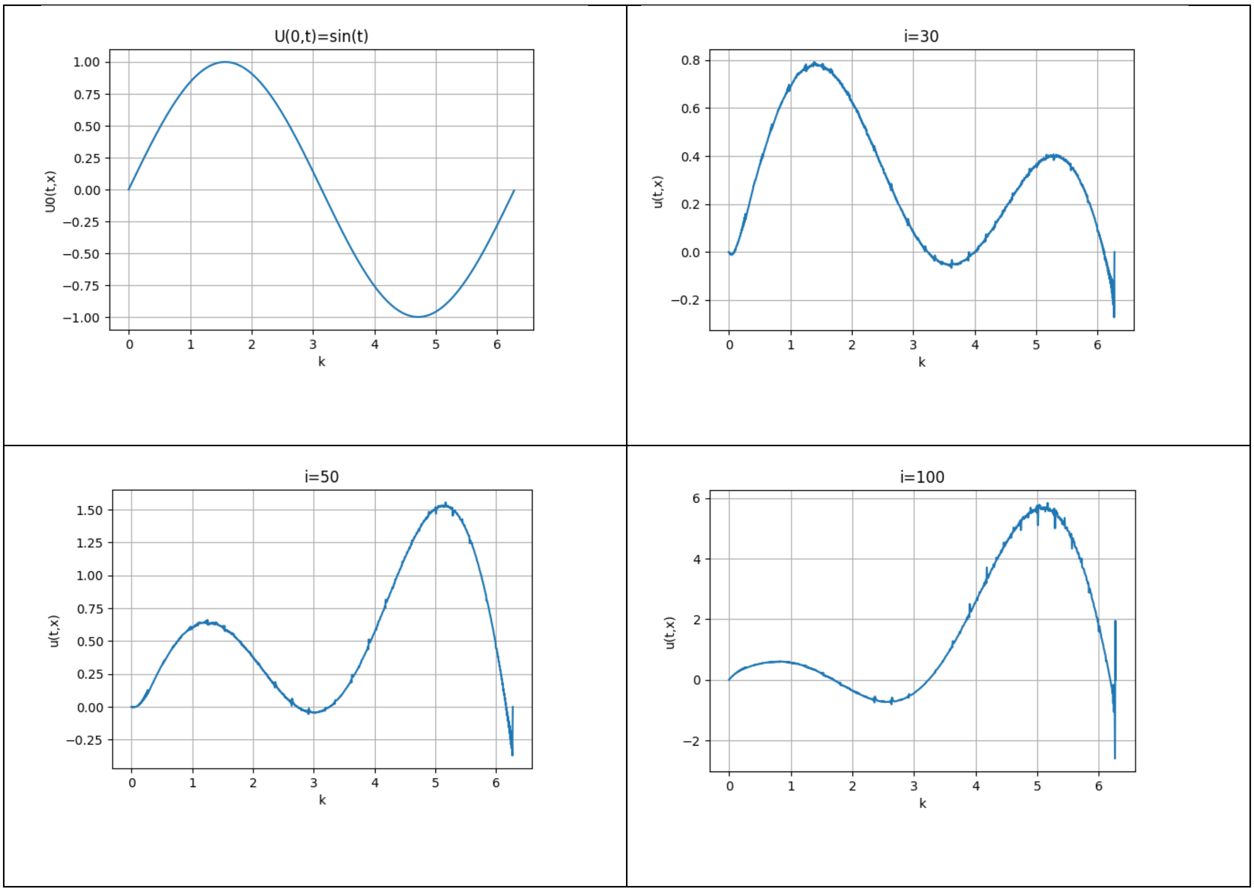
$$a_i = 1 - \tau A_i^k; b_i = 2hB_i^k + 2h\tau C_i^k;\ c_i = \tau A_i^k - 1;$$

$$F_i = \tau A_i^k \left(u_{i+1}^k - u_{i-1}^k\right) - 2\mathrm{h}B_i^k u_i^k + 2h\tau f_i^k + \tau A_{0}{}_i^k (u_{i+1}^k - u_{i-1}^k)$$

Such equations are called three-point difference equations of the second order. System (8) has a tridiagonal structure and Equation (8) is linear equation systems of the form [A]U = f as shown in Equation (9).

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ c_1 & b_2 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & c_2 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2} & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & b_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & c_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Because a non-stationary problem is considered, system (8) must be solved at each time step. We solve the difference equation (8) by sweep method [8].



References

1. A. Saadatmandi and M. Dehghan, Numerical Solution of the One-Dimensional Wave Equation with An integral Condition, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Vol, 23, no.2, pp. 282-292, 2007

2. M. Dehghan, On the Solution of An initial-boundary Value Problem tha Combines Neumann and Integral Condition for the Wave Equation, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Vol. 21, no. 1, pp:2440

3. P. R. Sharma and GirirajMethi, Analysis of Homotopy Perturbation Method for Solution of Hyperbolic Equation with An integral Condition, Journal of Applied Mathematics 5(2):85-95, 2012, Knowledgia Review, Malysia.

4. Siddique, M. (2010). Numerical computation of two dimensional diffusion equations with nonlocal boundary conditions. IAENG International Journal of Applied Mathematics, 40(1), 26-[51] He, J. H. (1999). Variational iteration method-a kind of nonlinear analytical technique: some examples. Int. J. Nonlin. Mech., 34, 699-708.

5. P. R. Sharma and GirirajMethi, Analysis of Homotopy Perturbation Method for Solution of Hyperbolic Equation with An integral Condition//Journal of Applied Mathematics 5(2):85-95, 2012, Knowledgia Review, Malysia.

6. Ahmed Cheniguel Numerical Method for Solving Wave Equation with Non Local Boundary Conditions. Mathematics //Proceedings of the International MultiConference of Engineers and Computer Scientists 2013 Vol II, IMECS 2013, March 13 - 15, 2013, Hong Kong

7. Хубиев К.У. О математической модели уравнения Аллера //Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016. № 4-1(16). С. 56-65. DOI: 10.18454/2079-6641-201616-4-1-56-65

8. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: Учеб, пособие для вузов,—М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит., 1989.— 432 с.— ISBN 5-02-013996-3.

ЖҮКТЕЛГЕН ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПТІ ШЕШУДІҢ САНДЫҚ ӘДІСІ ТУРАЛЫ

С.С. КАБДРАХОВА[1], Ж. АССАН[2]

[1,2] Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

e-mail: symbat2909.sks@gmail.com; zh.assanova98@gmail.com

Андатпа. Бұл хабарламада жүктелген сызықтық гиперболалық теңдеу үшін жартылай периодты шеттік есеп қарастырылады. Есептің сандық шешімін табу үшін жартылай айқын схема қолданылады, ақырлы айырымдар әдісі көмегімен есеп жуық есепке келтіріледі. Қуалау әдісі арқылы айырымдық есеп шығарылады.

Түйінді сөздер: жүктелген гиперболалық теңдеу, шеттік есеп, сандық әдіс, жартылай айқын схема, ақырлы айырымдар әдісі, қуалау әдісі.

О ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

С.С. КАБДРАХОВА[1][0000-0003-0247-5985], Ж. АССАН[2]

[1,2] Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, Алматы, Казахстан

e-mail: symbat2909.sks@gmail.com; zh.assanova98@gmail.com

Аннотация. В этом сообщении рассматривается полупериодическая краевая задача для нагруженного линейного гиперболического уравнения. С использованием полуявной схемы находятся численное решение задачи, задача аппроксимируется методом конечных разностей. Метод прогонки используется для решения разностной задачи.

Ключевые слова: нагруженное гиперболическое уравнение, краевая задача, численный метод, полуявная схема, метод конечных разностей, метод прогонки.

УДК 517.91

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR IMPULSIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MAXIMA

T. K. YULDASHEV[0000-0002-9346-5362]

National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Abstract. In this report it is considered the questions of one value solvability of nonlocal boundary value problems for nonlinear impulsive differential equations with mixed maxima. The problem is reduced to the nonlinear functional integral equations. The method of successive approximations is applied combining it with the method of compressing mapping.

Keywords: impulsive differential equations, one value solvability, method of successive approximations, integral condition.

In this paper we will talk about the features of solving differential equations with maxima and about the unique solvability of a nonlocal boundary value problem for an impulsive system of differential equations with maxima.

1. Monotone solutions of differential equations with maxima

We consider on the interval $[0,T]$ the functional-differential equations of the following form

$$x'(t) = f\left(t, x(t), \max\left\{x(\tau)\middle|\tau \in \left[h_1(t); h_2(t)\right]\right\}\right),$$

where $h_1(t) < h_2(t),\ t \in [0;T].$ This type functional-differential equations are called as differential equations with maxima. We tell how to find monotone solutions of this equation with maxima. The set of increasing solutions of these differential equation with maxima coincides with the set of increasing solutions of the following differential equation with deviation

$$x'(t) = f\left(t, x(t), x\left[h_2(t)\right]\right),\ t \in [0,T].$$

But the decreasing solutions of this differential equation does not satisfy the differential equation with maxima.

The set of decreasing solutions of differential equation with maxima coincides with the set of decreasing solutions of the following differential equation with deviation

$$x'(t) = f\left(t, x(t), x\left[h_1(t)\right]\right),\ t \in [0,T].$$

But the increasing solutions of this differential equation does not satisfy the differential equation with maxima. These facts are important in studying oscillation properties of differential equations with maxima.

The following type differential equations

$$x'(t) = f\left(t, x(t), \max\left\{x(\tau)\middle|\tau \in \left[h_1(t):|:h_2(t)\right]\right\}\right),\ t \in [0,T], \tag{1}$$

where $\left[h_1(t):|:h_2(t)\right] = \left[\min_t\left\{h_1(t);h_2(t)\right\};\max_t\left\{h_1(t);h_2(t)\right\}\right]$, we call as a differential equation with mixed maxima. We suppose that there exist some points $t_i \in (0,T),\ i = 1,2,...,p$, at which $h_1(t_i) = h_2(t_i)$. Then on the interval

$$\Omega_1^p = [0,t_1] \cup [t_2,t_3] \cup [t_4,t_5] \cup ... \cup [t_{p-1},t_p]$$

the differential equation with mixed maxima (1) has the form

$$x'(t) = f\left(t, x(t), \max\left\{x(\tau)\middle|\tau \in \left[h_1(t);h_2(t)\right]\right\}\right). \tag{2}$$

On the interval

$$\Omega_2^p = [t_1,t_2] \cup [t_3,t_4] \cup [t_5,t_6] \cup ... \cup [t_p,T]$$

the differential equation with mixed maxima (1) has the form

$$x'(t) = f\left(t, x(t), \max\left\{x(\tau)\middle|\tau \in \left[h_2(t);h_1(t)\right]\right\}\right). \tag{3}$$

The set of solutions of the differential equation with mixed maxima (1) on the interval $[0,T]$ coincides with the union of sets of the solutions of two differential equations (2) and (3) on the intervals Ω_1^p and Ω_2^p, respectively. At the points $t_1,t_2,t_3,...,t_{p-1},t_p$ the solutions of differential equation (1) with mixed maxima have discontinuities depending from the posed problem for differential equations (2) and (3) with deviations.

Example 1. On the interval $[0,\infty)$ we consider the following differential equation with mixed maxima

$$x'(t) = 2\max\left\{x(\tau)\middle|\tau \in \left[t:|:\sqrt{t}\right]\right\},\ t \in [0,\infty). \tag{4}$$

On the interval $[0,1]$ the differential equation (4) with mixed maxima has the form

$$x'(t) = 2\max\left\{x(\tau)\middle|\tau \in \left[t;\sqrt{t}\right]\right\},\ t \in [0,1]. \tag{5}$$

On the interval $[1,\infty)$ the differential equation (4) with mixed maxima has the following form

$$x'(t) = 2\max\left\{x(\tau)\middle|\tau \in \left[\sqrt{t};t\right]\right\},\ t \in [1,\infty). \tag{6}$$

Therefore, solutions of the differential equation (4) with mixed maxima on the interval $[0,\infty)$ have the form

$$x(t) = \begin{cases} \begin{cases} A \cdot t^2,\ t \in [0,1], & A > 0, \\ A \cdot e^{2t},\ t \in [0,1], & A < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} B \cdot t^2,\ t \in [1,\infty) & B < 0, \\ B \cdot e^{2t},\ t \in [1,\infty), & B > 0. \end{cases} \end{cases}$$

In finding these solutions we solved the differential equations (5) and (6) with maxima.

If we do not specify a continuous gluing condition at a point $t = 1$, then naturally, the solution of a differential equation (4) with mixed maxima suffers a discontinuity of the first kind at this point. For example, if we solve the differential equation (4) with mixed maxima with condition $x(0) = -2$ on the first interval $[0,1]$ and solve the differential equation (4) with mixed maxima with condition $x(1) = 2$ on the second interval $[1,\infty)$, then we have corresponding solutions $x(t) = -2e^{2t}$ on $[0,1]$ and $x(t) = 2e^{2(t-1)}$ on $[1,\infty)$. So, from these solutions we have

$$\lim_{t\to 1-0} x(t) = \lim_{t\to 1-0}\left(-2e^{2t}\right) = -2e^2,\quad \lim_{t\to 1+0} x(t) = \lim_{t\to 1+0}\left(2e^{2(t-1)}\right) = 2.$$

Consequently, for the difference of limit values of these solutions we obtained discontinuity

$$\lim_{t\to 1+0} x(t) - \lim_{t\to 1-0} x(t) = 2 + 2e^2.$$

Example 2. On the interval $[0,\infty)$ we consider the following differential equation with mixed maxima

$$x'(t) = \frac{e^t}{(e^t+1)^2} \cdot \frac{e^{\left(1+(-1)^{[t]}\right)t} + 1}{e^{\left(1+(-1)^{[t]}\right)t}} \max\left\{x(\tau)\middle|\tau \in \left[t:|:\left(1+(-1)^{[t]}\right)t\right]\right\}, \tag{7}$$

where $[t]$ is the integer part of t.

On the interval $\Omega_1 = [0,1] \cup [2,3] \cup [4,5] \cup \ldots$ the differential equation (7) with mixed maxima has the form

$$x'(t) = \frac{2e^t}{(e^t+1)^2} \max\left\{x(\tau)\middle|\tau \in [0;t]\right\}. \tag{8}$$

On the interval $\Omega_2 = [1,2] \cup [3,4] \cup [5,6] \cup \ldots$ the differential equation (7) with mixed maxima has the following form

$$x'(t) = \frac{e^{2t}+1}{e^t(e^t+1)^2} \max\left\{ x(\tau) \middle| \tau \in [t;2t] \right\}. \tag{9}$$

Therefore, solutions of the differential equation (7) with mixed maxima on the interval $[0,\infty)$ have the form

$$x(t) = \begin{cases} \begin{cases} x(t) = C_i \cdot e^{-2(e^t+1)^{-1}}, \ t \in \Omega_1, \ C_i > 0, \\ x(t) = C_j \cdot \dfrac{e^t}{e^t+1}, \ t \in \Omega_1, \ C_j < 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x(t) = D_i \cdot \dfrac{e^t}{e^t+1}, \ t \in \Omega_2, \ D_i > 0, \\ x(t) = D_j \left(1 + e^{-t}\right) \cdot e^{-2e^{-t}(e^t+1)^{-1}}, \ t \in \Omega_2, \ D_j < 0. \end{cases} \end{cases}$$

In finding these solutions we solved the differential equations (8) and (9) with maxima.

It is required to set conditions at each of points $t_k = t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots$ If we do not specify the continuous gluing conditions at these points, the solution of a differential equation (7) with mixed maxima suffers a discontinuity of the first kind at these points.

2. Nonlocal inverse boundary value problem

Impulsive differential equations have important role in the developing of applied sciences [1-7]. So, on the interval $[0,T]$ for the $t \neq t_i$, $i = 1,2,\ldots,p$ we consider the following system of ordinary differential equations

$$x'(t) = Ax(t) + f\left(t, x(t), \max\left\{ x(\tau) \mid \tau \in \left[h_1(t,x(t)) :|: h_2(t,x(t)) \right] \right\}\right) \tag{10}$$

with nonlinear boundary value condition

$$B(t)x(0) + \int_0^T K(t,s)\,x(s)\,ds = C + \varphi\left(t, \int_0^T H(t,s,x(s))\,ds \right), \tag{11}$$

impulsive effect

$$x\left(t_i^+\right) - e^{-At_i} x\left(t_i^-\right) = e^{-At_i} F_i\left(x\left(t_i\right)\right), \qquad i = 1,2,\ldots,p \tag{12}$$

and additional condition

$$x(\bar{t}) = D \in R^n, \quad D = const, \quad \bar{t} \in (0,T), \quad \bar{t} \neq t_i, \; i = 1,2,...,p, \tag{13}$$

where $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p < t_{p+1} = T$, $A, B(t) \in R^{n\times n}$, $K(t,s) \in R^{n\times n}$ are given matrix and

$$\det E(t) \neq 0, \; E(t) = B(t) + \int_0^T K(t,s)ds, \quad f:[0,T]\times R^n \times R^n \to R^n, \; \varphi:[0,T]\times R^n \to R^n,$$

$F_i : R^n \to R^n$ are given functions; $C \in R^n$, $0 < h_1 < h_2 < t$, $h_j = h_j(t, x(t))$, $j = 1,2$, $x\left(t_i^+\right) = \lim\limits_{\eta\to 0^+} x\left(t_i + \eta\right)$, $x\left(t_i^-\right) = \lim\limits_{\eta\to 0^-} x\left(t_i - \eta\right)$ are right-sided and left-sided limits of function $x(t)$ at the point $t = t_i$, respectively.

Formulation of problem. To find a pair of quantities $\left\{x(t) \in PC\left([0,T], R^n\right), \; C \in R^n\right\}$, which of first is continuous function for all $t \in [0,T]$, $t \neq t_i$, $i = 1,2,...,p$ satisfying differential equation (10), nonlocal integral condition (11) and for $t = t_i$ $i = 1,2,...,p$, $0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < T$ satisfies the limit condition (12) and additional condition (13).

$$x(t) = J(t;x) \equiv \psi(t) + \sum_{0<t_i<T} W(t,t_i) F_i\left(x\left(t_i\right)\right) +$$

$$+E^{-1}(t)\left[\varphi\left(t, \int_0^T H(t,s,x(s))\,ds\right) - \varphi\left(\bar{t}, \int_0^T H(\bar{t},s,x(s))\,ds\right)\right] +$$

$$+\int_0^T W(t,s)\, f\left(s, x(s), \max\left\{x(\tau) \mid \tau \in \left[h_1(s,x(s)) :|: h_2(s,x(s))\right]\right\}\right) ds \tag{14}$$

for $t \in \left(t_i, t_{i+1}\right]$, $i = 0,1,...,p$, where $\psi(t) = E^{-1}(t)\cdot D \cdot E(\bar{t})$,

$$W(t,s) = \left[G(t,s) - E^{-1}(t)\bar{G}(s)\right] e^{A(T-s)}, \; E(t) = B(t) + \int_0^T K(t,s)ds,$$

$$G(t,s) = \begin{cases} E^{-1}(t) e^{A(t-s)} \left(B(t) + \int\limits_0^t K(t,\theta)d\theta\right), & 0 \le s \le t, \\ -E^{-1}(t) \int\limits_s^T K(t,\theta)\,d\theta\, e^{A(T-s)}, & t < s \le T, \end{cases}$$

$$\overline{G}(s)=\begin{cases} e^{A(\overline{t}-s)}\left(B(\overline{t})+\int\limits_0^{\overline{t}}K(\overline{t},\theta)d\theta\right), & 0\le s\le \overline{t}, \\ -\int\limits_s^T K(\overline{t},\theta)\,d\theta\, e^{A(T-s)}, & \overline{t}<s\le T. \end{cases}$$

Theorem. Suppose the following conditions are fulfilled:

(Y1). The constant matrix A such that there holds estimate

$$\left\| e^{At} \right\| \le e^{-at},\ 0<a=const,\ t\in[0,T];$$

(Y2). For all $t,s\in[0,T]$ holds

$$\left\| E^{-1}(t)\right\|\cdot\left\|\varphi\left(t,\int\limits_0^T H(t,s,\psi(s))\,ds\right)\right\|_{PC}\le M_{\varphi}<\infty;$$

(Y3). $\left\| f\left(t,\psi(t),\psi(t)\right)\right\|_{PC}\le M_f<\infty,\ \max\limits_{i\in\{1,2,\dots,p\}}\left\| F_i\left(\psi(t_i)\right)\right\|\le M_F<\infty;$

(Y4). For all $t\in[0,T],\ x,y\in R^n$ holds

$$\left| f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)\right|\le L_1(t)\left| x_1-x_2\right|+L_2(t)\left| y_1-y_2\right|;$$

(Y5). For all $t\in[0,T],\ x\in R^n$ holds

$$\left|\varphi(t,x_1)-\varphi(t,x_2)\right|\le L_3\left| x_1-x_2\right|;$$

(Y6). For all $t,s\in[0,T],\ x\in R^n$ holds

$$\left| H(t,s,x_1)-H(t,s,x_2)\right|\le L_4(s)\left| x_1-x_2\right|,\ 0<\int\limits_0^T L_4(s)\,ds<\infty;$$

(Y7). For all $t\in[0,T],\ x\in R^n$ holds

$$\left| h_j(t,x_1)-h_j(t,x_2)\right|\le L_{5j}(t)\left| x_1-x_2\right|,\ \ j=1,2;$$

(Y8). For all $x,y\in R^n,\ i=0,1,\dots,p$ holds

$$\left| F_i(x_1)-F_i(x_2)\right|\le L_{6i}\left| x_1-x_2\right|;$$

(Y9). $\rho<1,$ where

$$\rho=S_1+2L_3\left\| E^{-1}(t)\right\|^2\int\limits_0^T L_4(s)ds+S_2,\ \ S_1=\sum_{i=1}^{p}L_{6i}\max_{t\in[0,T]}\left| W(t,t_i)\right|,$$

$$S_2 = \int_0^T \max_{t\in[0,T]} \left|W(t,s)\right| \cdot \left[L_1(s) + L_2(s)\left(1 + M_f \left(L_{51}(s) + L_{52}(s)\right)\right)\right] d\,s.$$

Then the nonlocal inverse boundary value problem (10)-(13) has a unique pair of solution $\left\{x(t) \in PC\left(\left[0,T\right], R^n\right); C \in R^n\right\}$. The solution $x(t) \in PC\left(\left[0,T\right], R^n\right)$ can be founded from the following iterative process:

$$\begin{cases} x^k(t) = J\left(t; x^{k-1}\right), \ k = 1,2,3,... \\ x^0(t) = \psi(t), \ t \in (t_i, t_{i+1}), \ i = 0,1,2,..., p. \end{cases}$$

The solution we denote by $\omega(t)$, i.e., $x(t) = \omega(t) \in PC\left([0,T], R^n\right)$. Then to find vector C this solution $\omega(t)$ of the equation (14) we substitute into following presentation:

$$C = D \cdot E(\bar{t}) - \varphi\left(\bar{t}, \int_0^T H(\bar{t}, s, x(s))\, ds\right) - \sum_{0<t_i<T} \bar{G}\left(t_i\right) e^{A(T-t_i)} F_i\left(x\left(t_i\right)\right) -$$

$$-\int_0^T \bar{G}(s) e^{A(T-s)} f\left(s, x(s), \max\left\{x(\tau) \mid \tau \in \left[h_1(s, x(s)) :|: h_2(s, x(s))\right]\right\}\right) ds$$

for $t \in \left(t_i, t_{i+1}\right], \ i = 0,1,..., p.$

References

1. Benchohra M., Henderson J., Ntouyas S.K. Impulsive differential equations and inclusions. Contemporary mathematics and its application. – New York: Hindawi Publishing Corporation, 2006.
2. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and fredholm boundary-value problems. – Utrecht; Brill, 2004.
3. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems (2nd ed.). – Berlin - Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2016. 314p.
4. Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Scientific, 1989. 434 p.
5. Perestyk N.A., Plotnikov V.A., Samoilenko A.M., Skripnik N.V. Differential equations with impulse effect: multivalued right-hand sides with discontinuities. DeGruyter Stud. V.40. Math. – Berlin: Walter de Gruter Co., 2011.

6. Samoilenko A.M., Perestyk N.A. Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1995.
7. Halanay A., Veksler D. Qualitative theory of impulsive systems. – Moscow: Mir, 1971, 309 p. (in Russian).

МАКСИМУМДАРЫ БАР ИМПУЛЬСТІК ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРГЕ АРНАЛҒАН ЛОКАЛДЫ ЕМЕС ШЕТТІК ЕСЕПТЕР

ЮЛДАШЕВ Т.К.

Өзбекстан ұлттық университеті, Ташкент, Өзбекстан

E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Аңдатпа. Осы баяндамада аралас максимумдары бар сызықтық емес импульстік дифференциалдық теңдеулер үшін локалды емес шеттік есептердің бірмәнді шешілу мәселелері қаралады. Есеп сызықтық емес функционалды интегралдық теңдеулерге келтіріледі. Компрессиялық бейнелеу әдісімен біріктірілген біртіндеп жуықтау әдісі қолданылады.

Түйін сөздер: импульстік дифференциалдық теңдеулер, бірмәнді шешілімділік, біртіндеп жуықтау әдісі, интегралдық шарт.

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИМПУЛЬСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАКСИМУМАМИ

ЮЛДАШЕВ Т.К.

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

E-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Аннотация. В настоящем докладе рассматриваются вопросы однозначной разрешимости нелокальных краевых задач для нелинейных импульсных дифференциальных уравнений со смешанными максимумами. Задача сводится к нелинейным функциональным интегральным уравнениям. Применяется метод последовательных приближений, сочетающийся с методом компрессионного отображения.

Ключевые слова: импульсные дифференциальные уравнения, однозначная разрешимость, метод последовательных приближений, интегральное условие.

УДК 517.97

СИНТЕЗ РАСПРЕДЕЛЕННОГО И ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЙ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА

А. КЕРИМБЕКОВ

[1]*Кыргызско-Российский Славянский университет, Бишкек, Кыргызстан.*

E-mail: akl7@rambler.ru

Аннотация. В статье исследованы вопросы разрешимости задачи синтеза, распределенного и граничного управлений при минимизации кусочно-линейного функционала, в случае управления колебательными процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма. Функции внешнего и граничного воздействий нелинейны относительно управлений. Для функционала Беллмана получено интегро-дифференциальное уравнение специфического вида. Описан алгоритм построения решения задачи синтеза, распределенного и граничного управлений, изложена процедура определения уравнений как функции (функционалы) от состояния управляемого процесса.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, оператор Фредгольма, обобщенное решение, функционал Беллмана, дифференциал Фреше, синтез оптимального управления.

Рассмотрим задачу минимизации кусочно-линейного функционала

$$I[u(t,x),\vartheta(t,x)]=\int_Q\Big[\big(v(T,x)-\xi_1(x)\big)^2+\big(v_t(T,x)-\xi_2(x)\big)^2\Big]dx$$
$$+\int_0^T\left(\alpha\int_Q|u(t,x)|\,dx+\beta\int_\gamma|\vartheta(t,x)|\,dx\right)dt,\ \ \alpha,\beta>0 \tag{1}$$

на множестве обобщенных решений краевой задачи

$$v_{tt}-Av=\lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau+f[t,x,u(t,x)],\ \ x\in Q,\ 0<t<T, \tag{2}$$

$$v(0,x)=\psi_1(x),\ v_t(0,x)=\psi_2(x),\ x\in Q, \tag{3}$$

$$\Gamma v(t,x)\equiv\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)v_{x_k}(t,x)\cos(v,x_i)+a(x)v(t,x)=p[t,x,\vartheta(t,x)],\ x\in\gamma,0<t<T, \tag{4}$$

где $A-$ эллиптический оператор

$$Av(t,x)=\sum_{i,k=1}^n(a_{ik}(x)v_k(t,x))_{x_i}-c(x)v(t,x),$$

Q -область пространства R^n ограниченная кусочно-гладкой кривой γ ; $Q_T = Q\times[0,T)$ функции $K(t,\tau)\in H(D),\ D=\{0\le t,\tau\le T\}$, $\xi_1(x)\in H(Q),\ \xi_2(x)\in H(Q),\ \psi_1(x)\in H_1(Q),$ $\psi_2(x)\in H\ (Q),\ a_{ik}(x), a(x)\ge 0, c(x)\ge 0$ считаются известными; ν - вектор нормали выходящей из точки $x\in y$, $f[t,x,u(t,x)]\in H(Q_T),\forall$ распределенного управления $u(t,x)\in H(Q_T),$ $p[t,x,\vartheta(t,x)]\in H(\gamma_T),$, $\forall$ граничного управления $\vartheta(t,x)\in H(\gamma_T),\ \gamma_T=\gamma\times(0,T)$; При этом $a(x)$ и $c(x)$ измеримые функции, $H(Y)$ -гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на множестве Y ; $H_1(Y)$ -пространство Соболева первого порядка; λ -параметр; T -фиксированный момент времени; относительно функции внешнего и граничного воздействий будем считать, что

$$f_u[t,x,u(t,x)]\neq 0\ \forall(t,x)\in Q_T;\ \ p_\vartheta[t,x,\vartheta(t,x)]\neq 0\ \forall(t,x)\in\gamma_T; \tag{5}$$

т.е. они монотонные по функциональной переменной.

Определение. *Под обобщенным решением краевой задачи (2)-(5) понимается функция* $v(t,x)\in H(Q_T)$ *, которая вместе с обобщенными производными* $v_t(t,x)$ *и* $v_{x_i}(t,x)$ *удовлетворяет интегральному тождеству.*

$$\begin{aligned}&\int_Q (v_t(t,x)\phi(t,x))_{t_1}^{t_2}dx=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_Q[v_t(t,x)\phi_t(t,x)-\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}(x)v_{xk}(t,x)\phi_{x_i}(t,x)\right.\\&-c(x)v(t,x)\phi(t,x)+\left(\lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau+f[t,x,u(t,x)]\phi(t,x)\right)dx\\&\left.+\int_\gamma\left(p[t,x,\vartheta(t,x)]\right)-a(x)v(t,x)\phi(t,x)dx\right\}dt\end{aligned}\tag{6}$$

при любых t_1 и $t_2(0<t_1\le t\le t_2\le T)$ для любой функции $\phi(t,x)\in H_1(\bar{Q}_T)$, а также начальным условиям в слабом смысле, т.е. равенства

$$\lim_{t\to 0}\int_Q[v(t,x)-\psi_1(x)]\phi_0(x)dx=0,\ \lim_{t\to 0}\int_Q[v_t(t,x)-\psi_1(x)]\phi_1(x)dx=0$$

выполняются для любых функций $\phi_0(x)\in H(Q)$ и $\phi_1(x)\in H(Q)$.

Теорема 1. [3,4] *Краевая задача (2)-(5) при каждой паре управлений* $\{u(t,x),\vartheta(t,x)\}\in H(Q_T)\times H(\gamma_T)$ *имеет единственное обобщенное решение* $v(t,x)\in H_1(Q_T)$.

В задаче синтеза искомые управления $u^0(t,x)\in H(Q_T)$ и $\vartheta^0(t,x)\in H(\gamma_T)$ следует находить как функцию (функционал) от состояния управляемого процесса т.е. в виде

$$u^0(t,x)=u[t,x,v(t,x),v_t(t,x)],\ (t,x)\in Q_T,\quad \vartheta^0(t,x)=\vartheta[t,x,v(t,x),v_t(t,x)],\ (t,x)\in\gamma_T,$$

Заметим, что согласно условиям (5) устанавливается взаимно-однозначное соответствие между элементами пространства управлений $\{[u(t,x),\vartheta(t,x)]\}$ и пространства состояний управляемого процесса $\{v(t,x)\}$.

Для функционала (1) определяем функционал Беллмана в виде

$$S[t,x,\omega(t,x)]=\min_{u\in U,\vartheta\in V}\left\{\int_t^T\left(\alpha\int_Q|u(t,x)|dx+\beta\int_\gamma|\vartheta(t,x)|dx\right)dt+\int_Q\|\omega(T,x)-\xi(x)\|^2dx\right\} \qquad (7)$$

Здесь $\omega(t,x)=\{v(t,x),v_t(t,x)\}$ -вектор-функция состояния; а $\xi(x)=\{\xi_1(x),\xi_2(x)\}$ -вектор-функция желаемого состояния управляемого процесса в момент времени T; $\|\cdot\|$ -норма вектора; U - множество допустимых значений управления $u(t,x)$, $(t,x)\in Q_T$; V - множество допустимых значений управления $\vartheta(t,x)$, $(t,x)\in\gamma_T$.

Согласно схеме Беллмана-Егорова [1;2] предполагая, что $S[t,x,\omega(t,x)]$ как функция дифференцируема по t и как функционал дифференцируем по Фреше перепишем (7) в виде

$$-\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t}\Delta t=\min_{u\in U,\vartheta\in V}\left\{\int_t^T\left(\alpha\int_Q|u(t,x)|dx+\beta\int_\gamma|\vartheta(t,x)|dx\right)dt\right.$$
$$\left.+ds[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)]+o(\Delta t)+\delta[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)]\right\}, \qquad (8)$$

где $\Delta\omega(t,x)=\Delta\omega[t+\Delta t,x]-\omega[t,x]$, $ds[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)]$ - дифференциал Фреше, а $o(\Delta t)$ и $\delta[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)]$ - бесконечно малые величины относительно Δt.

Поскольку дифференциал Фреше относительно $\Delta\omega(t,x)\in H^2(Q_T)=H(Q_T)\times H(Q_T)$, $\forall(t,x)\in Q_T$, является линейным функционалом, то имеет место равенство

$$ds[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)]=\int_Q m^*(t,x)\Delta\omega(t,x)dx\equiv\int_Q\left(m_1(t,x)\Delta v(t,x)+m_2(t,x)\Delta v_t(t,x)\right)dx \qquad (9)$$

где символ * - знак транспонирования; вектор-функция $m(t,x)=\{m_1(t,x),m_2(t,x)\}$ является градиентом функционала $S[t,x,\omega(t,x)]$ и принадлежит пространству $H^2(Q_T)=H(Q_T)\times H(Q_T)$ почти при всех $(t,x)\in Q_T$. Заметим, что $m(t,x)$ определяется в зависимости от функционала $S[t,x,\omega(t,x)]$, т.е.

$$m(t,x)=m(t,x,S[t,x,\omega(t,x)]). \qquad (10)$$

Легко проверить, что справедливо тождество

$$\int_Q m^*(t,x)\Delta\omega(t,x)dx - \int_Q \left(m_2(t,x)\Delta v_t(t,x)\right)_t^{t+\Delta t} dx$$
$$+\int_Q \left(m_1(t,x)\Delta v(t,x)\right)dx - \int_Q \left(m_2(t,x)\Delta v_t(t+\Delta t,x)\right)_t^{t+\Delta t} dx. \quad (11)$$

С учетом соотношений (9)-(11) равенство (8) перепишем в виде

$$-\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t}\Delta t = \min_{u\in U,\vartheta\in V}\left\{\int_t^T\left(\alpha\int_Q|u(t,x)|dx + \beta\int_\gamma|\vartheta(t,x)|dx\right)dt + \int_Q\left(m_2(\tau,x)\Delta v_t(\tau,x)\right)_t^{t+\Delta t}dx\right.$$
$$\left.+\int_Q\left[m_1(t,x)\Delta v(t,x) - m_2(t,x)\Delta v_t(t+\Delta t,x)\right]dx + o(\Delta t) + \delta[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)]\right\}. \quad (12)$$

Пусть $m_2(t,x)\in H_1(Q_T)$. Тогда в интегральном тождестве (1.6) полагая $\phi(t,x)\equiv m_2(t,x)$ и $t_1=t, t_2=t+\Delta t$ имеем

$$\int_Q\left(m_2(\tau,x)\Delta v_t(\tau,x)\right)_t^{t+\Delta t}dt \equiv \int_t^{t+\Delta t}\left\{\int_Q\left[m_{2t}(\tau,x)v_t(\tau,x) - \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)v_{x_k}(\tau,x)m_{2_{x_i}}(\tau,x)\right.\right.$$
$$\left.-c(x)v(\tau,x)m_2(\tau,x) + \left(\lambda\int_0^T K(\tau,\sigma)v(\tau,\sigma)d\sigma + f[\tau,x,u(\tau,x)]\right)m_2(\tau,x)\right]dx$$
$$\left.+\int_\gamma\left(p[\tau,x,\vartheta(\tau,x)] - a(x)v(\tau,x)\right)m_2(\tau,x)dx\right\}d\tau.$$

С учетом этого тождества равенство (12) представим в виде

$$-\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t}\Delta t = \min_{u\in U,\vartheta\in V}\left\{\int_t^T\left(\alpha\int_Q|u(t,x)|dx + \beta\int_\gamma|\vartheta(t,x)|dx\right)dt\right.$$
$$+\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\left(\int_Q\left[m_{2t}(\tau,x)v_t(\tau,x) - \sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)v_{x_k}(\tau,x)m_{2_{x_i}}(\tau,x) - c(x)v(\tau,x)m_2(\tau,x)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(\lambda\int_0^T K(\tau,\sigma)v(\tau,\sigma)d\sigma + f[\tau,x,u(\tau,x)]\right)m_2(\tau,x)\right]dx + \int_\gamma\left(p[\tau,x,\vartheta(\tau,x)] - a(x)v(\tau,x)\right)m_2(\tau,x)dx\right)d\tau.$$
$$\left.+\int_Q\left[m_1(t,x)\frac{\Delta v(t,x)}{\Delta t} - \frac{m_2(t,x)}{\Delta t}\Delta v_t(t+\Delta t,x)\right]dx + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} + \frac{\delta[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)]}{\Delta t}\right\}.$$

Отсюда переходя к пределу при $\Delta t\to+0$ и после приведения подобных слагаемых, а также учитывая соотношения

$$\lim_{t\to+0}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}=0,\quad \lim_{t\to+0}\frac{\delta[t,x,\omega(t,x);\Delta\omega(t,x)]}{\Delta t} = \lim_{t\to+0}\frac{o_2(\Delta t)}{\Delta t}=0$$

получим искомое функциональное уравнение типа Беллмана

$$-\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t} = \min_{u\in U,\vartheta\in V}\left\{\int_Q\left(\alpha|u(t,x)| + m_2(t,x)f[t,x,u(t,x)]\right)dx +\right.$$
$$+\int_\gamma\left(\beta|\vartheta(t,x)| + m_2(t,x)p[t,x,\vartheta(t,x)]\right)dx + \int_Q\left(\lambda\int_0^T K(t,\tau)v(\tau,x)d\tau\right)m_2(t,x)dx \quad (13)$$
$$\left.+\int_Q m_1(t,x)v_t(t,x) - \int_Q\left[\sum_{i,k=1}^n a_{ik}(x)v_{x_k}(t,x)m_{2_{x_i}}(t,x) + c(x)v(t,x)m_2(t,x)\right]dx - \int_\gamma a(x)v(t,x)m_2(t,x)dx\right\},$$

которое имеет место почти для всех $(t,x)\in Q_T$ и $(t,x)\in \gamma_T$. Далее используя разложения

$$v(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) z_n(x), \quad v_n(t)=\int_Q v(t,x) z_n(x)dx,$$

$$m_2(t,x)=\sum_{j=1}^{\infty} m_{2_j}(t) z_j(x), \quad m_{2_j}(t,x)=\int_Q m_2(t,x) z_j(x)dx,$$

а также определение обобщенных собственных функций $z_n(x)$ [3 получим соотношение

$$\int_Q \left[\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x) v_{x_k}(t,x) m_{2_{x_i}}(t,x) + c(x)v(t,x)m_2(t,x)\right]dx + \int_\gamma a(x)v(t,x)m_2(t,x)dx$$
$$= \int_Q\int_Q m_2(t,x) D(\lambda,x,y) v(t,y)dydx,$$

где
$$D(\lambda,x,y)=\sum_{j=1}^{\infty} z_i(x)\lambda_i^2 z_i(y).$$

Теперь уравнение (13) перепишем в следующем виде

$$-\frac{\partial S[t,x,\omega(t,x)]}{\partial t} = \min_{u\in U, \vartheta\in V}\left\{\int_Q \Big(\alpha\left|u(t,x)\right| + m_2(t,x) f[t,x,u(t,x)]\Big)dx\right.$$
$$+\int_\gamma \Big(\beta\left|\vartheta(t,x)\right| + m_2(t,x) p[t,x,\vartheta(t,x)]\Big)dx + \int_Q \left(\lambda\int_0^T K(t,\tau)\vartheta(\tau,x)d\tau\right) m_2(t,x)dx \tag{14}$$
$$\left.+\int_Q \left(m_1(t,x)\vartheta_t(t,x) - m_2(t,x)\int_Q D(\lambda,x,y)v(t,y)dy\right)dx\right\}.$$

Согласно (2.1) это уравнение следует рассматривать вместе с условием

$$S[T,x,\omega(T,x)] = \int_Q \left\|\omega(T,x)-\xi(x)\right\|^2 dx. \tag{15}$$

Таким образом $S[T,x,\omega(T,x)]$ следует находить как решение задачи (14)-(15), которая называется задачей Коши-Беллмана. Для построения решения этой задачи сначала решаем задачу минимизации правой части уравнения (14). При этом следует различать следующие случаи:

1. U и V - открытые множества;
2. U - открытое, а V -замкнутое множество;
3. U - замкнутое, а V - открытое множество;
4. U и V - замкнутые множества.

Рассмотрим задачу минимизации в уравнении (2.7) в случае, когда U и V - открытые множества. Применяя классический метод решения задачи экстремума, находим, что «подозрительное на оптимальность» распределенное управление $u^0(t,x)$ определяется следующим образом.

1. В области $Q_T^+ \subset Q_T$, где $u(t,x) > 0$, искомое управление $u_+^0(t,x)$ определяется согласно условиям оптимальности в виде равенства

$$\alpha + m_2(t,x)\, f_u[t,x,u(t,x)] = 0, \quad (t,x) \in Q_T^+,$$

(16)

и дифференциального неравенства

$$m_2(t,x)\, f_{uu}[t,x,u(t,x)] > 0, \quad (t,x) \in Q_T^+,$$

которые выполняются одновременно почти для всех $(t,x) \in Q_T^+$.

Дифференциальное неравенство является трудно проверяемым условием. Однако, согласно (2.10), его можно преобразовать к виду

$$f_u^{-1}[t,x,u(t,x)]\, f_{uu}[t,x,u(t,x)] < 0, \quad (t,x) \in Q_T^+. \qquad (17)$$

Пусть выполнены условия оптимальности (16) и (17). Тогда согласно теореме о неявных функциях из равенства (16) управление $u(t,x)$ определяется однозначно, т.е. существует однозначная функция $\varphi_1(\cdot)$ такая, что

$$u_+^0(t,x) = \varphi_1[t,x,m_2(t,x,\omega(t,x)),\alpha], \quad (t,x) \in Q_T^+. \qquad (18)$$

2. В области $Q_T^- \subset Q_T$, где $u(t,x) < 0$, искомое управление $u_-^0(t,x)$, согласно условиям оптимальности в виде равенства

$$-\alpha + m_2(t,x)\, f_u[t,x,u(t,x)] = 0, \quad (t,x) \in Q_T^-,$$

(19)

и дифференциального неравенства

$$f_u^{-1}[t,x,u(t,x)]\, f_{uu}[t,x,u(t,x)] > 0, \quad (t,x) \in Q_T^-, \qquad (20)$$

определяется по формуле

$$u_-^0(t,x) = \varphi_2[t,x,m_2(t,x,\omega(t,x)),\alpha], \quad (t,x) \in Q_T^-. \qquad (21)$$

Таким образом имеет место утверждение:

Теорема 2. *Пусть U является открытым множеством. Если функция $f[t,x,u(t,x)]$ в области $Q_T^+ \subset Q_T$, где $u(t,x) > 0$, удовлетворяет условию (17), то существует функция $\varphi_1(\cdot)$ которая однозначно осуществляет синтез распределенного оптимального управления по формуле (17).*

Если функция $f[t,x,u(t,x)]$ *в области* $Q_T^- \subset Q_T$*, где* $u(t,x)<0$*, удовлетворяет условию (19), то существует функция* $\varphi_2(\cdot)$ *которая однозначно осуществляет синтез распределенного оптимального управления по формуле (21).*

Аналогично «подозрительные на оптимальность» граничное управление $\vartheta^0(t,x)$ определяется следующим образом.

1. В области $\gamma_T^+ \subset \gamma_T$, где $\vartheta(t,x)>0$, искомое управление $\vartheta_+^0(t,x)$, согласно условиям оптимальности в виде равенства

   $\beta + m_2(t,x)p_u[t,x,u(t,x)] = 0, \quad (t,x)\in\gamma_T^+,$

   (22)

   и дифференциального неравенства

   $p_u^{-1}[t,x,u(t,x)]f_{uu}[t,x,u(t,x)]<0, \quad (t,x)\in\gamma_T^+.$ (23)

   определяется по формуле

   $\vartheta_+^0(t,x) = h_1[t,x,m_2(t,x,\omega(t,x)),\beta], \quad (t,x)\in\gamma_T^+.$ (24)

   где $h_1(\cdot)$ функция однозначно определяемая из равенства (22).

2. В области $\gamma_T^- \subset \gamma_T$, где $\vartheta(t,x)<0$, искомое управление $\vartheta_-^0(t,x)$, согласно условиям оптимальности в виде равенства

   $-\beta + m_2(t,x)p_u[t,x,u(t,x)] = 0, \quad (t,x)\in\gamma_T^-,$

   (25)

   и дифференциального неравенства

   $p_u^{-1}[t,x,u(t,x)]f_{uu}[t,x,u(t,x)]<0, \quad (t,x)\in\gamma_T^-.$ (26)

   определяется по формуле

   $\vartheta_-^0(t,x) = h_2[t,x,m_2(t,x,\omega(t,x)),\beta], \quad (t,x)\in\gamma_T^-.$ (27)

   где $h_2(\cdot)$ функция однозначно определяемая из равенства (25). Относительно граничного управления имеет место утверждение.

Теорема 3. *Пусть множество* V *является открытым. Если функция* $p[t,x,u(t,x)]$ *в области* $\gamma_T^+ \subset \gamma_T$*, где* $\vartheta(t,x)>0$*, удовлетворяет условию (23), то существует функция* $h_1(\cdot)$ *которая однозначно осуществляет синтез граничного оптимального управления по формуле (24).*

Если функция $p[t,x,u(t,x)]$ *в области* $\gamma_T^- \subset \gamma_T$, *где* $\vartheta(t,x) < 0$, *удовлетворяет условию (26), то существует функция* $h_2(\cdot)$ *которая однозначно осуществляет синтез распределенного оптимального управления по формуле (27).*

Список использованной литературы

1. Kerimbekov A., Seidakmat kyzy E. On Solvability of Tracking Problem Under Nonlinear Boundary Control //Trends in Mathematics Research Perspectives (Analysis, Probability, Applications, and Computation. Proceeding97s of the 11th ISAAC Congress, Vaxjo (Sweden) 2017). Switzerland, Birkhauser. - 2019, P. 207-218
2. Sachs E.W., Strauss A.K. Efficient solution of a partial integro-differntial equation in finance // Appl. Numer. Math. 2008. Vol. 58, iss. 11. P. 1687–1703.
3. Kerimbekov A., Tairova O.K. On the solvability of synthesis problem for optimal point control of oscillatory processes // IFAC- PapersOnLine. 2018. Vol. 51, iss. 32. P. 754–758
4. Kerimbekov A.K., Abdyldaeva E.F. Optimal distributed control for the processes of oscillation described by Fredholm integro-differential equations // Eurasian Math. J. 2015. Vol. 6, iss. 2. P. 28–40.

БӨЛІК-СЫЗЫҚТЫҚ ФУНКЦИОНАЛДЫЛЫҚТЫ АЗАЙТУ КЕЗІНДЕ ҮЛЕСТІРІЛГЕН ЖӘНЕ ШЕКАРАЛЫҚ БАСҚАРУ СИНТЕЗІ

А. КЕРИМБЕКОВ

Қырғыз-Ресей Славян Университеті, Бішкек, Қырғызстан

E-mail: akl7@rambler.ru

Аңдатпа. Мақалада Фредгольм интегралды операторымен ішінара туындылардағы интегралды дифференциалдық теңдеулермен сипатталған тербелмелі процестерді басқару жағдайында бөлік-сызықтық функционалдылықты азайту кезінде синтез, үлестірілген және шекаралық басқару мәселесінің шешілу мәселелері зерттелген. Сыртқы және шекаралық әсерлердің функциялары басқаруға қатысты сызықты емес. Беллманның функционалы үшін белгілі бір түрдің интегралды-дифференциалдық теңдеуі алынды. Синтез, үлестірілген және шекаралық басқару есептерін шешудің алгоритмі сипатталған, теңдеулерді басқарылатын процестің күйінен функциялар (функционалдар) ретінде анықтау процедурасы көрсетілген.

Түйінді сөздер: интегралды-дифференциалдық теңдеу, Фредгольм операторы, жалпыланған шешім, Беллман функционалы, Фреше дифференциалы, оптималды басқару синтезі.

SYNTHESIS OF DISTRIBUTED AND BOUNDARY CONTROL WHILE MINIMIZING PIECEWISE LINEAR FUNCTIONAL

A. KERIMBEKOV

Kyrgyz-Russian Slavic University, Bishkek, Kyrgyzstan

E-mail: akl7@rambler.ru

Annotation. The article investigates the solvability of the problem of synthesis, distributed and boundary control while minimizing the piecewise linear functional, in the case of control of oscillatory processes described by integro-differential partial differential equations with the Fredholm integral operator. The functions of external and boundary influences are nonlinear with respect to controls. An integro-differential equation of a specific type is obtained for the Bellman functional. The algorithm for constructing a solution to the problem of synthesis, distributed and boundary controls is described, the procedure for determining equations as functions (functionals) of the state of the controlled process is described.

Keywords: integro-differential equation, Fredholm operator, generalized solution, Bellman functional, Frechet differential, synthesis of optimal control.

УДК 517.518.45
МРНТИ 27.39.19

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ-ХААРА В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

А.Н. БАШИРОВА[1], Е.Д. НУРСУЛТАНОВ[2], Н.Т.ТЛЕУХАНОВА[1]

[1]Евразийский национальный университет имени Л,Н,Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

[2]Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, Нур-Султан, Казахстан

E-mail: anar_bashirova@mail.ru; er-nurs@yandex.ru; tleukhanova@rambler.ru

Аннотация. Исследованы мультипликаторы двойных рядов Фурье-Хаара в анизотропных пространствах Лоренца. Получены необходимые и достаточные условия для того чтобы последовательность $\lambda = \left\{\lambda_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}\right\}$ принадлежала классу мультипликаторов $m\left(L_{\bar{p},\bar{r}} \ \rightarrow \ L_{\bar{q},\bar{s}}\right)$

Ключевые слова: ряд Фурье, система Хаара, мультипликаторы рядов Фурье, анизотропное пространство Лоренца

Пусть X, Y - пространства функций, определенных на отрезке $[0,1]$, таких, что $X \hookrightarrow L_1$. Пусть $\{\varphi_k\}$ - полная ортонормированная система. Пусть функции $f \in X$ соответствует ее ряд Фурье по данной системе $\{\varphi_k\}$

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k,$$

где a_k - коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\varphi_k\}$. Будем говорить, что последовательность комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ является мультипликатором рядов Фурье по системе $\{\varphi_k\}$ из пространства X в пространство Y, если для функции f ∈ X с рядом Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k$$

найдется функция $f_\lambda \in$ Y, ряд Фурье которой совпадает с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k \varphi_k$$

и оператор $\Lambda f = f_\lambda$ является ограниченным оператором из X в Y.

Множество $m(X \to Y)$ всех определенных таким образом мультипликаторов является линейным нормированным пространством с нормой

$$\|\lambda\|_{m(X\to Y)} = \|\Lambda\|_{X\to Y}.$$

Для тригонометрических рядов известна фундаментальная теорема Марцинкевича [1]:

Теорема. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\lambda = \{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *- последовательность вещественных чисел, удовлетворяющих условию*

$$F_0(\lambda) = \sup_{m\in\mathbb{N}}\left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}}|\lambda_k - \lambda_{k+1}| + |\lambda_{-k} - \lambda_{-k-1}|\right) + \sup_{m\in\mathbb{Z}}|\lambda_m| < \infty,$$

тогда λ *- мультипликатор в* $L_p[0,2\pi)$ *и*

$$\|\lambda_m\| \leq cF_0(\lambda).$$

Дальнейшее развитие теории мультипликаторов тригонометрических рядов Фурье можно найти в работах Лизоркина П.И. [2, 3], Нурсултанова Е.Д. и Тлеухановой Н.Т. [4-6], Смаилова Е.С. и Тлеухановой Н.Т. [7], Юдина В.А. [8].

Рассмотрим последовательность $\lambda = \{\lambda_k^j\}_{(k,j)\in\Omega}$. Всякая последовательность λ порождает оператор Λ, который на полиномах по системе Хаара определяется следующим образом:

$$\Lambda\left(\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{2^k} a_k^j(f)\,\chi_k^j(x)\right) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{2^k}\lambda_k^j a_k^j\,\chi_k^j(x).$$

Согласно классической теореме Пэли-Марцинкевича [9], если $1 < p < \infty$ и $\sup_{(k,j)\in\Omega}|\lambda_k^j| < \infty$, то

$$\|\Lambda f\|_{L_p} \leq c_p\|f\|_{L_p}$$

для всех $f \in L_p$. Точное значение $c_p = \max(p,p') - 1$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ найдено Буркхолдером Д. [10]. Мультипликаторы по системе Хаара изучались в работах С. Яно [11], Новикова И.Я., Семенова Е.М. [12], Кротова В.Г. [13] и др.

Согласно [12, с.127, теорема 12.1], если $1 < p < q < \infty$, то

$$\|\Lambda\|_{m(L_p \to L_q)} \asymp \sup_{(k,j)\in\Omega}|\lambda_k^j| 2^{k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}, \tag{2}$$

где константы эквивалентности зависят только от p, q.

Исследованию мультипликаторов рядов Фурье по системе Хаара в более общих пространствах посвящены работы [14-18]. Вопрос о мультипликаторах кратных рядов Фурье-Хаара оставался открытым.

Целью нашей работы является исследование мультипликаторов двойных рядов Фурье-Хаара в анизотропных пространствах Лоренца.

Пусть f измеримая функция, принимающая почти всюду конечные значения:

$$m(\sigma,f)=\mu(\{x: x\in[0,1], |f|>\sigma\})$$

её функция распределения. Функция:

$$f^*(t)=\inf\{\sigma: m(\sigma,f)\le t\},\quad t>0$$

называется невозрастающей перестановкой функции f.

Пусть $f(x_1,x_2)$ - измеримая на $[0,1]^2$ функция, через $f^{*_1*_2}(t_1,t_2)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки к функции $f(x_1,x_2)$ последовательно по переменным x_1, x_2.

Пусть $\bar{p}=(p_1,p_2)$, $\bar{\tau}=(\tau_1,\tau_2)$ такие, что если $0<p_i<\infty$, то $0\le\tau_i\le\infty$, если $p_i=\infty$, то и $\tau_i=\infty$, $i=1,2$. Анизотропным пространством Лоренца $L_{\bar{p},\bar{\tau}}[0,1]^2$ [19] назовем множество функций, для которых конечна величина:

$$\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{\tau}}[0,1]^2}=\left(\int_0^1\left(\int_0^1\left(t_2^{\frac{1}{p_2}}t_1^{\frac{1}{p_1}}f^{*_1*_2}(t_1,t_2)\right)^{\tau_1}\frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}}\frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{\tau_2}}.$$

Здесь и далее, когда $\tau=\infty$, интеграл $\left(\int_0^1(\varphi(t))^\tau\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\tau}}$понимается как $\sup\limits_{t>0}\varphi(t)$.

Тогда верна следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $1<\bar{p}<\bar{q}<\infty$, $0<\bar{r},\bar{s}\le\infty$, $\frac{1}{\xi_i}=\left(\frac{1}{s_i}-\frac{1}{r_i}\right)_+=max\left\{\frac{1}{s_i}-\frac{1}{r_i},0\right\}$, $i=1,2$. *Тогда последовательность комплексных чисел* $\lambda=\left\{\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right\}_{(k_i,j_i)\in\Omega}$ *является мультипликатором из* $L_{\bar{p},\bar{r}}[0,1]^2$ *в* $L_{\bar{q},\bar{s}}[0,1]^2$ *тогда и только тогда, когда*

$$\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)}\sup_{\substack{1\le j_i\le 2^{k_i}\\ i=1,2}}\left|\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|\right)^{\xi_1}\right)^{\frac{\xi_2}{\xi_1}}\right)^{\frac{1}{\xi_2}}<\infty$$

и верно

$$\|\lambda\|_{m\left(L_{\overline{p},\overline{r}}[0,1]^2\to\ L_{\overline{q},\overline{s}}[0,1]^2\right)} \asymp \left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)} \sup_{\substack{1\le j_i\le 2^{k_i}\\ i=1,2}}\left|\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|\right)^{\xi_1}\right)^{\frac{\xi_2}{\xi_1}}\right)^{\frac{1}{\xi_2}}.$$

Здесь и далее в случае, когда $\xi_i = +\infty$, соответствующая сумма в выражении справа заменяется на супремум.

Следствие 1. *Пусть* $1 < p < q < \infty$, $0 < r, s \le \infty$, $\frac{1}{\xi} = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r}\right)_+ = max\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{r}, 0\right\}$. *Тогда последовательность комплексных чисел* $\lambda = \left\{\lambda_k^j\right\}_{(k,j)\in\Omega}$ *является мультипликатором из* $L_{p,r}\,[0,1]$ *в* $L_{q,s}[0,1]$ *тогда и только тогда, когда*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)k} \sup_{1\le j\le 2^k}\left|\lambda_k^j\right|\right)^{\xi}\right)^{\frac{1}{\xi}} \le K,$$

причем

$$\|\lambda\|_{m(L_{p,r}\,[0,1]\to\ L_{q,s}[0,1])} \asymp \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)k} \sup_{1\le j\le 2^k}\left|\lambda_k^j\right|\right)^{\xi}\right)^{\frac{1}{\xi}}.$$

Замечание 1. *В отличие от результатов работ* [14, 16], *утверждение следствия 1 охватывает случай, когда* $r > s$, *а так же случай* $0 < r, s < 1$

Список использованной литературы

1 Marcinkiewicz J. Sur les multiplicateurs des series de Fourier // Studia Math. – 1939. – Vol. 8. – P. 78-91.

2 Лизоркин П.И. О мультипликаторах интегралов Фурье в пространствах $L_{p,\theta}$ // Тр. МИАН СССР. – 1967. – Т. 89. – С. 231-248.

3 Лизоркин П.И. К теории мультипликаторов Фурье // Тр. МИАН СССР. – 1986. – Т. 173. – С. 149-163.

4 Нурсултанов Е.Д. О мультипликаторах рядов Фурье по тригонометрической системе // Матем. заметки. – 1998. – Т. 63, №2. – С. 235-247.

5 Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. О мультипликаторах кратных рядов Фурье // Тр. МИАН. – 1999. – Т. 227. – С. 237-242.

6 Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. Нижние и верхние оценки нормы мультипликаторов кратных тригонометрических рядов Фурье в пространствах Лебега // Функц. анализ и его прил. – 2000. – Т. 34, №2. – С. 86-88.

7 Smailov E.S., Tleukhanova N.T. Estimation of error of cubature formula in Besov space // Eurasian Math. J. – 2010. – Vol. 1, №1. – P. 147-156.

8 Юдин В.А. Сферические суммы рядов Фурье в L_p // Мат. Заметки. – 1989. – Т. 46, №2. – С. 145-146.

9 Кашин Б.С., Саакян А.Л. Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 496 с.

10 Burkholder D.L. A nonlinear partial differential equation and unconditional constant of the Haar system in L_p // Bull. Amer. Math. Soc. – 1982. – Vol. 7. – P. 591-595.

11 Yano S. On a lemma of Marcinkiewicz and its applications to Fourier series // Tohoku Math. J. – 1959. – Vol. 11. – P. 195-215.

12 Novikov I., Semenov E. Haar series and linear operators. – Dordrecht: Cluver Acad. Publ. – 1997. – 218 p.

13 Кротов В.Г. О безусловной сходимости рядов Хаара в Λ_ω^p // Мат. заметки. – 1978. – Т. 23, №5. – С. 685-695.

14 Брыскин И.Б., Лелонд О.В., Семенов Е.М. Мультипликаторы рядов Фурье – Хаара // Сиб. мат. журнал. – 2000. – Т. 41, №4. – С. 758-766.

15 Girardi M., Operator-valued Fourier Haar multipliers // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – Vol. 325. – P. 1314-1326.

16 Лелонд О.В., Семенов Е.М., Уксусов С.Н. Пространство мультипликаторов Фурье-Хаара // Сиб. мат. журнал. – 2005. – Т. 46, №1. – С. 130-138.

17 Семенов Е.М., Уксусов С.Н. Мультипликаторы рядов по системе Хаара // Сиб. матем. журнал. – 2012. – Т. 53, №2. – С. 388-395.

18 Wark H.M. Operator-valued Fourier Haar multipliers on vector-valued L_1 spaces // J. Math. Anal. Appl. – 2017. – Vol. 450. – P. 1148-1156.

19 Нурсултанов Е.Д. Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Докл. РАН. – 2004. – Т. 394(1). – С. 1-4.

ҚОС ФУРЬЕ-ХААР ҚАТАРЛАРЫНЫҢ АНИЗОТРОПТЫ ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІКТЕРІНДЕГІ МУЛЬТИПЛИКАТОРЛАРЫ

А.Н.БАШИРОВА[1], Е.Д.НУРСУЛТАНОВ[2], Н.Т.ТЛЕУХАНОВА[1]

[1]Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұрсұлтан, Қазақстан

[2]М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университетінің Қазақстан филиалы, Нұрсұлтан, Қазақстан

E-mail: anar_bashirova@mail.ru; er-nurs@yandex.ru; tleukhanova@rambler.ru

Аңдатпа. Қос Фурье-Хаар қатарларының анизотропты Лоренц кеңістіктеріндегі мультипликаторлары зерттелді. $\lambda = \left\{\lambda_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}\right\}$ тізбегі $m\left(L_{\bar{p},\bar{r}} \rightarrow L_{\bar{q},\bar{s}}\right)$ мультипликаторлар класына тиісті болуы үшін қажетті және жеткілікті шарттар анықталды.

Түйінді сөздер: Фурье қатары, Хаар жүйесі, Фурье қатарларының мультипликаторлары, анизотропты Лоренц кеңістігі

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ-ХААРА В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

А.Н.БАШИРОВА[1], Е.Д.НУРСУЛТАНОВ[2], Н.Т.ТЛЕУХАНОВА[1]

[1]Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұрсұлтан, Қазақстан

[2]М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университетінің Қазақстан филиалы, Нұр-Сұлтан, Қазақстан

E-mail: anar_bashirova@mail.ru; er-nurs@yandex.ru; tleukhanova@rambler.ru

Аннотация. Исследованы мультипликаторы двойных рядов Фурье-Хаара в анизотропных пространствах Лоренца. Получены необходимые и достаточные условия для того чтобы последовательность $\lambda = \left\{\lambda_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}\right\}$ принадлежала классу мультипликаторов $m\left(L_{\bar{p},\bar{r}} \rightarrow L_{\bar{q},\bar{s}}\right)$

Ключевые слова: Ряд Фурье, система Хаара, мультипликаторы рядов Фурье, анизотропное пространство Лоренца

УДК 517.927.25
МРНТИ 27.29.19

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ БЕЗУСЛОВНОЙ БАЗИСНОСТИ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Ә.М. СӘРСЕНБІ[0000-0003-4709-2777]

Южно-Казахстанский университет им М. Ауэзова, г. Шымкент, Казахстан

E-mail: abzhahan@gmail.com

Аннотация. В натоящей заметке установлены новые достаточные условия безусловной базисности корневых функций дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией.

Ключевые слова: Собственные значения, собственные функции, базис, дифференциальные операторы порядка с инволюцией.

Одним из сложных вопросов спектральной теории дифференциальных операторов остаются вопросы базисности корневых функций таких операторов с бесконечным числом кратных собственных значений. В таких случаях пока нет результатов, позволяющих судить о базисности корневых функций в терминах краевых условий. Для дифференциальных операторов с кратным спектром В.А.Ильиным разработан метод [1], позволяющий изучать вопросы базисности корневых векторов в терминах произведения L_2 -норм корневых корневых функций взаимно сопряженных операторов. В работе [2] указанная теория базисности В.А. Ильина развита на случай дифференциальных операторов с инволюцией следующего вида

$$Lu \equiv -u''(x) + \alpha u''(-x) + q(x)u(x) + q_v(x)u(v(x)), \qquad -1 < x < 1. \qquad (1)$$

Здесь $-1 < \alpha < 1$, коэффициенты $q(x)$ и $q_v(x)$ - произвольные (вообще говоря, комлпексозначные) функции из класса $L_1(-1,1)$, а инволюция $v(x)-$ абсолютно непрерывная функция, производная которой существенно ограничена на $[-1;1]$. Область определения $D(L)$ оператора (1) всюду плотна в $L_2(-1,1)$, причем конкретный вид области определения $D(L)$ для наших рассммотрений не понадобится. Будем считать, что $D(L)$ содержит только функции, абсолютно непрерывные вместе со своими первыми производными на (-1;1).

В натоящей заметке установлены новые достаточные условия безусловной базисности корневых функций оператора L.

Следуя В.А. Ильину [1], собственной функцией (или корневой функцией нулевого порядка) $u_{k0}(x)$ оператора (1), отвечающей комплексному собственному значению λ_k будем называть любое нетривиальное регулярное решение уравнения $Lu=\lambda u$. Т.е., собственной функцией оператора (1) является любая функция $u(x)\in D(L)$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду на интервале (-1,1). Функцию $u_{k1}(x)\in D(L)$ будем называть присоединенной функцией первого порядка, соответствующей собственной функции $u_{k0}(x)$ и тому же комплексному собственному значению λ_k, если

$$Lu_{k1}(x)=\lambda u_{k1}(x)-u_{k0}(x).$$

Присоединенная функция j-го порядка определяется равенством

$$Lu_{ki}(x)=\lambda u_{ki}(x)-u_{k,i-1}(x).$$

Предположим выполнение следующих условий.

1) Пусть $\{u_k(x)\}=\{u_{ki}(x)\}$ система собственных и присоединенных функций оператора L полна и минимальна в $L_2(-1,1)$. Пусть биортогонально сопряженная система $\{\upsilon_k(x)\}$ (также полная) состоит из собственных и присоединенных функций (в вышеуказанном смысле) формально сопряженного к L оператора

$$L^*\upsilon=-\upsilon''(x)+\alpha\upsilon''(-x)+\overline{q(x)}\upsilon(x)-v'(x)\overline{q_v(v(x))}\upsilon(v(x)), \qquad (2)$$

и выполняется условие $(u_k(x),\upsilon_j(x))=\delta_k^j$.

2) Кратность всех собственных значений равномерно ограничено.

3) Собственные значения принадлежат параболе Карлемана, т.е.,

$$\operatorname{Im}\sqrt{\lambda_k} \le const.$$

для всех номеров k.

4) $$\sup_{\lambda \ge 1} \sum_{|\lambda_k - \lambda| \le 1} 1 < \infty.$$

Теорема 1 [2]. Пусть выполнены условия 1) - 4) и инволюция $\nu(x)$ в (1) - произвольная абсолютно непрерывная функция, производная которой существенно ограничена на $[-1,1]$. Тогда каждая из систем $\{u_k(x)\} = \{u_{ki}(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ образует бесусловной базис в $L_2(-1,1)$ в том и только том случае, если справедлива равномерная оценка произведения норм

$$\|u_k\|_2 \cdot \|\upsilon_k\|_2 \le M \;. \tag{3}$$

для всех номеров k.

Заметим, что собственные и присоединенные функции операторов L и L^* с двухточечными краевыми условиями всегда образуют биортогонально сопряженную пару систем. Требование полноты систем собственных и присоединенных функций также не является огрничением, так как без полноты не может быть базисности тех систем.

Сформулируем достаточные условия безусловной базисности систем собственных и присоединенных функций операторов L и L^*.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1) - 4) и инволюция $\nu(x)$ в (1)- произвольная абсолютно непрерывная функция, производная которой существенно ограничена на $[-1,1]$. Тогда каждая из систем $\{u_k(x)\} = \{u_{ki}(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ образует бесусловной базис в $L_2(-1,1)$, если выполнено условие

$$\sup_{-1<x<1} |u_k(x)| \sup_{-1<x<1} |\upsilon_k(x)| \le M, \; \forall k. \tag{4}$$

Справедлива также следующая теорема о безусловной базисности.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1) - 4) и инволюция $\nu(x)$ в (1)- произвольная абсолютно непрерывная функция, производная которой существенно ограничена на $[-1,1]$.

Для бесусловной базисности в $L_2(-1,1)$ каждой из систем $\{u_k(x)\}=\{u_{ki}(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ достаточно, чтобы элементы этих систем были равномерно ограниченными, т.е. достаточно выполнение неравенств

$$\sup_{-1<x<1}|u_k(x)|\le M_1,\ \sup_{-1<x<1}|\upsilon_k(x)|\le M_2,\ \forall k. \qquad (5)$$

Справедливость утверждений теорем 1 и 2 непосредственно следуют из теоремы 1, так как каждое из условий (4), (5) влекут соотношение (3).

Список использованной литературы

1. Il'in V. A. and Kritskov L. V.. Properties of spectral expansions corresponding to nonself-adjoint differential operators. J. Math. Sci. (NY), 116:5 (2003), 3489_3550.

2. Kritskov L. V., Sarsenbi A. M. Riesz basis property of system of root functions of second-order differential operator with involution //Differential Equations. – 2017. – Т. 53. – №. 1. – С. 33-46. http://dx.doi.org/10.1134/S0012266117010049

ИНВОЛЮЦИЯМЕН ЕКІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ШЕКТІ ЕСЕПТЕРДІҢ МЕНШІКТІ ЖӘНЕ ҚОСЫЛҒАН ФУНКЦИЯЛАРЫНЫҢ ШАРТСЫЗ НЕГІЗДЕМЕСІНІҢ ЖЕТКІЛІКТІ ШАРТТАРЫ

Ә.М. СӘРСЕНБІ

М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Шымкент қ., Қазақстан

e-mail: abzhahan@gmail.com

Аннотация. Бұл жазбада инволюциямен екінші ретті дифференциалдық операторлардың түбірлік функцияларының шартсыз негізділігінің жаңа жеткілікті шарттары белгіленген.

Түйінді сөздер: меншікті мәндер, меншікті функциялар, негіз, инволюциясы бар ретті дифференциалдық операторлар.

SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE UNCONDITIONAL BASICITY OF EIGENFUNCTIONS AND ATTACHED FUNCTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH INVOLUTION

A.M. SARSENBI

M. Auezov South Kazakhstan University, Shymkent, Kazakhstan

e-mail: abzhahan@gmail.com

Annotation. In this note, new sufficient conditions for the unconditional basicity of root functions of second-order differential operators with involution are established.

Keywords: eigenvalues, eigenfunctions, basis, differential operators of order with involution.

УДК 372.851

МАТЕМАТИКАДАН ЭЛЕКТРОНДЫҚ ОҚУЛЫҚТЫ ЖӘНЕ ОҚУШЫЛАРДЫҢ БІЛІМІН КРИТЕРИЙАЛДЫ БАҒАЛАУДЫ ЭЛЕКТРОНДЫ ПЛАТФОРМАДА ДАЙЫНДАУ МӘСЕЛЕЛЕРІ

Ә.К. ҚАҒАЗБАЕВА , Ж. ҚАЙДАСОВ , Г. ҚУАНЫШЕВА, А. САРЖАНОВА
Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан
e-mail: aspet-k@mail.ru; jet-k@mail.ru

Аннотация. Білім беру саласында ақпараттық-коммуникациялық технологиялардың аппараттық құралдары ішінен комплексті оқыту пакеті (электрондық оқулықтар) және тестілік ортаны дайынау мен тиімді қолдану мәселесі өзекті болуда. Комплексті оқыту пакеті (*электрондық оқулықтар*) деп оқыту процессін оның, құруда көп еңбекті қажет ететін (сапасы мен пайдалылық деңгейіне жетуде), мұғалім мен оқушының өзіндік қызметтерін мейлінше шектейтін, дәстүрлі формасында мейлінше автоматтандыратын бағдарламалық құралдардың (жалпы мақсаттағы және аппараттық құралдармен байланысты драйверлер және т. б., ақпарат көздері, виртуалды конструкторлар, тренажерлар, тестілік орта) үйлесімдігін айтады.

Түйін сөздер. Білім, ақпараттандыру, элоктронды оқулық, тестік орта, бағалау

Қазіргі таңда компьютерлік технологиялар діуәрі қарқын алуда. Себебі өркениеттің өсуі ақпараттық қағамның өсуімен тікелей байаныстьы және білім мен техниканың даму деңгейі әрбір адамда сапалы да терең білім мен кәсіби құзреттіліктердің болуын, өскелең ұрпақтың белсенді шығармашылықпен жұмыс жасауын талап етеді. Ақпараттандыру - жалпытарихи процесс, заманауи адам осы процесске белсенді араласа білуі керек. Қоғамды ақпараттандыруда білім беру жүйесінің атқаратын ролі ерекше, себебі білім бір жағынан ақпаратты тұтынушы ретінде әрекет етсе, екінші жағынан, жаңа ақпараттық технологияларды жасаушы ретінде (жоғары білікті мамандарды дайындап шығару арқылы) әрекет етеді.

Ақпаратпен жұмыс жасай алу қазіргі заман адамы үшін басымдыққа ие болғандықтан, білім беру жүйесі оқушының сыни ойлау қабілетін мектептен бастап қалыптастыруды (сыни тұрғыдан ойлау білім, түсіну, қолдану, талдау, синтезбен сипатталады, бағалау) көздейді.

Білім беруді ақпараттандыру деп білім беру саласын оқыту мен тәрбиелеудің психологиялық-педагогикалық мақсаттарын іске асыруға бағытталған қазіргі заманғы ИКтехнологияларды денсаулықсақтау шарттарын сақтай отырып қолану мен дайындаудың әдіснамасымен, технологиясымен және әзірлеу тәжірибесімен қамтамасыз ету процесі түсініледі [1].

Қазіргі кезде білім беруді ақпараттандырудың негізгі талаптарының бірі — оқу процесін электронды оқулық немесе оқытудың компьютерлік құралдарын (ОКҚ) жасау және пайдалану. Оқу процессінде компьютерлік оқулықтар, есептер жинақтары, энциклопедиялар, тестілеу мен бақылау, анықтамалық жүйелер және басқа да ОКҚ-лар кеңінен қолданыс табуда. ОКҚ-ны білім берудің ақпараттық технологияларының негізгі бір түрі ретінде қарастыруға болады. Жалпы білім берудің ақпаратгық технологиялары дәстүрлі оқыту әдістері мен тәсілдерінде кейбір педагогикалық мәселелерді шешудің жаңа құралдары ретінде пайданылады [2].

Олай болса, білім беру саласында ақпараттық-коммуникациялық технологиялардың аппараттық құралдары ішінен комплексті оқыту пакеті (электрондық оқулықтар) және тестілік ортаны дайындау мен тиімді қолдану мәселесі өзекті болуда.

Комплексті оқыту пакеті (*электрондық оқулықтар*) – оқыту процессін оның, құруда көп еңбекті қажет ететін (сапасы мен пайдалылық деңгейіне жетуде), мұғалім мен оқушының өзіндік қызметтерін мейлінше шектейтін, дәстүрлі формасында мейлінше автоматтандыратын бағдарламалық құралдардың (жалпы мақсаттағы және аппараттық құралдармен байланысты драйверлер және т. б., ақпарат көздері, виртуалды конструкторлар, тренажерлар, тестілік орта) үйлесімдігі.

Жалпы мақсаттағы және аппараттық құралдармен байланысты драйверлер және т. б. – барлық ақпарат түрлерімен жұмыс жасауға мүмкіндік береді.

Ақпарат көздері -ұйымдастырылған ақпараттық массивтер – компакт дискідегі энциклопедиялар, ақпараттық сайттар және интернеттің іздеу жүйелері, оның ішінде - білім беру қолданысына бейімделгендері.

Виртуалды конструкторлар – математикалық және физикалық көрнекі және символдық модельдер жасауға, осы модельдермен эксперименттер жүргізуге мүмкіндік береді.

Тренажерлар - ақпараттық объектілермен автоматты жұмыс дағдыларын дамытуға, тілдік ортадағы жазбаша және ауызша байланыс жасауға -экранда мәтінді енгізуге, графикалық объектілермен операция жасауға және т.б. енгізуге мүмкіндік береді.

Тестілік орта - оқушылар компьютер арқылы толық немесе ішінара тапсырмалар алатындай және тапсырманы орындау нәтижесі де толық немесе ішінара компьютермен бағаланатындай автоматтандырылған сынақты құруға және қолдануға мүмкіндік береді.

Бұл мәселелерге мән беруіміз, пратикада электронды оқулық пен оқулықтың электрондық нұсқасын шатастыру жағдайлары өте жиі кездеседі.

Пән бойынша электронды оқулық жасау кешенді бағдарламалық құралды үйлесімді қолданумен байланысты, оқулық оқыту процесінде мұғалім мен оқушы қызметтерін автоматтандырып, оқушы өзбетімен білім алуға дағдыланады. Электронды оқулық мұғалім қызметін жеңілдету құралы, әрі оқушының өзіндің танымдық қызметін іске қосу арқылы білімді саналы меңгеру құралы болып табылады.

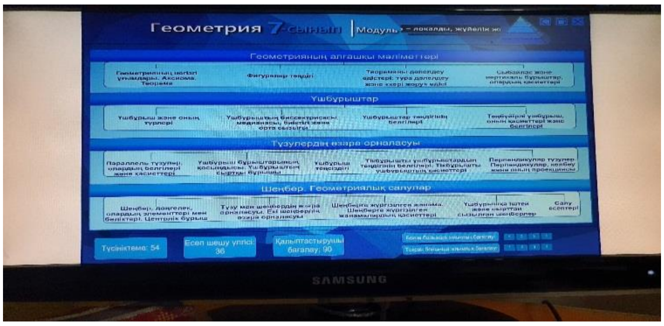
Электрондық оқулық - ол білім алушыларды даралай оқытуда жаңа информацияларды жеткізуге, сондай-ақ игерілген білім мен біліктерді тесттік бақылауға арналған программалық құрал.

Білім беру жүйесінде электронды оқулықтарды пайдаланып, үлкен табыстарға жетуге болады. Электронды оқулықтарды пайдалану барысында оқушы екі жақты білім алады: біріншісі-пәндік білім, екіншісі- компьютерлік білім. Электронды оқулықтарды пайдалану білім алушының өз бетінше шығармашылық жұмыс жасауына, теориялық білімін практикамен ұштастыруына мүмкіндік береді. Электронды оқулық арқылы білім алушы көптеген қосымша материал ала алады, осы алған мәліметтерін компьютерден көргендіктен есінде жақсы сақтайды, өз бетінше жұмыс жасау қабілеті қалыптасады. Осылайша ол жас ұрпақты оқытуда инновацияны пайдаланудың – шығармашылық жетістіктің негізгі көзі.

Сондықтан электрондық оқулық бұл білім беру пәні бойынша жоғары ғылыми-әдістемелік және техникалық деңгейде құрылған, мемлекеттік білім стандартының талаптары мен негізгі дидактикалық бірліктеріне толықтай сәйкес келетін, жоғары динамикалық иллюстрациясы бар негізгі оқу электрондық басылым. Онда негізгі материалдармен қатар интерактивті қолжетімді құралдарды, анимациялар мен мультипликацияларды, сондай-ақ жекелеген процесстер мен құбылыстарды жүзеге асыру принциптері мен әдістерінің динамикасын көрсететін бейне кескіндер енеді.

Электрондық оқулықпен оқытудың негізгі мақсаты-оқыту үрдісін үздіксіз және толық деңгейін бақылау, сонымен қатар оқушылардың ақпараттық-ізденіс қабілетін, шығармашылық қабілетін дамыту. Мұның тиімді жағы: электронды оқулықта әр сабаққа арналған бейне көрініс, анықтама сөздік, диктант, тест тапсырмаларын, қайталау сұрақтарын пайдалана аламыз. Электронды оқулықты қолдану арқылы сабақта техникалық құралдарды, дидактикалық материалдарды қолдану тиімділігі, білім алушының пәнге қызығушылығы, білім, білік, дағды деңгейін қалыптастыруы, білімнің тереңдігі, тексеру түрлері, бағалауы, практикалық дағдыларды игеруі артады. Білім алушылардың өздері де алынған ақпаратты көшіріп алып, онымен өз ыңғайына қарай жұмыс істей алады.

Бідердің тәжіриде 7-сынып геометрисяның электрондық оқулығын дайындау жүзеге асырылды (1-сурет) және сонымен қатар оқушылар білімін критерийалды бағалауда тестілік орта құру жүзеге асырылды [3], [4].



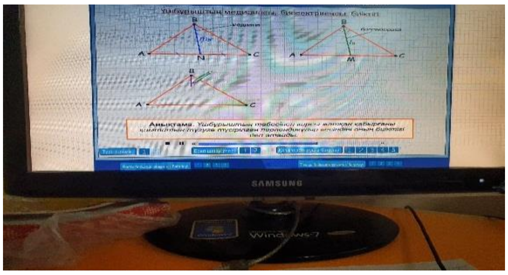
1-сурет. Модульде сынып бағдарламасына сәйкес мазмұны берілген

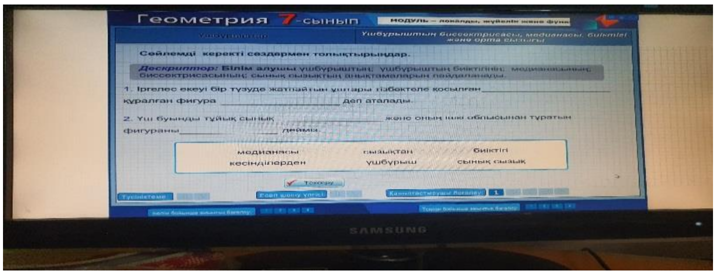
Электронды оқулықты құрудағы негізгі этаптардың бірі ол курстың мазмұны.

Оқулық мазмұнының берілуі мен білімді тексеру жолдарын Геометрия-7 оқулығынына арнап құрылған әдістермен түсіндірелік. Мазмұны сынып бағдарламасына сәйкес модульде берілген. Сонымен қатар осы беттің төменгі бөлігінде білімді тексерудің қалыптастырушы және жиынтық бағалауларға арналған тапсырма реттері көрсетілген. Қалыптастырушы бағалаулар әрбір бөлімше үшін берілген.

Мысалы, «үшбұрыштың биссектрисасы, медианасы, биіктігі және орта сызығы» бөлімінде (2-сурет) қалыптастырушы бағалауға бес тапсырма келтірілген. 1-ші «Сөйлемді керекті сөздермен толықтырыңдар» тапсырмасында керекті сөздерді іліп алып орындарына қою керек (3-сурет). 2-ші «Дұрыс(дұрыс емес) тұжырымдарды белгілеңдер» тапсырмада, оң жағында шаршы ішіндегі жауаптардың дұрысын таңдау керек. Ал 3-ші «Үшбұрыштың элементінің атауына сәйкес анықтаманы анықтаңдар» тапсырмада дөңгелектердегі сұрақ пен дұрыс жауабын кесіндімен қосады (4-сурет). «Үшбұрыштың элементінің атауына сәйкес анықтаманы анықтаңдар» т.с.с. (5-сурет).

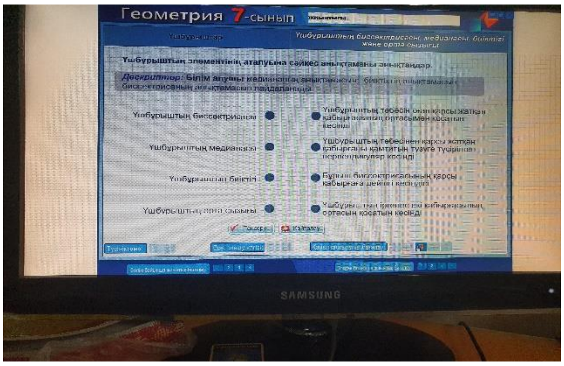
Жиынтық бағалауға қатысты, мысалы, 2-ші тоқсандағы тапсырмалар саны 6, орындауға берілетін уақыт 40 минут, ал барлық ұпай саны 20. Оң жақ жоғарғы бұрышта уақыт көрсетілген.

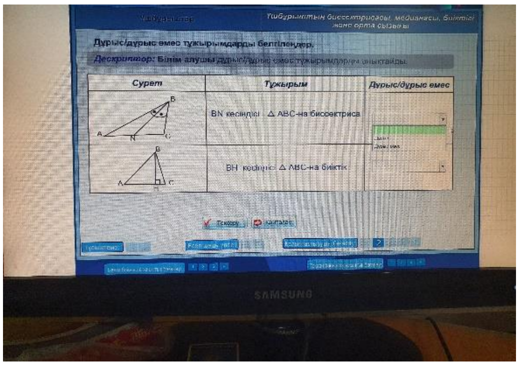




2-сурет. Қалыптастырушы және бағалауларға іліп алып орындарына қою арналған тапсырмалар

3-сурет. Тапсырмада керекті сөздерді жиынтық





4-сурет.Сұрақ пен дұрыс жауабын кесіндімен қосу

5-сурет. Үшбұрыштың элементінің атауын белгілеу

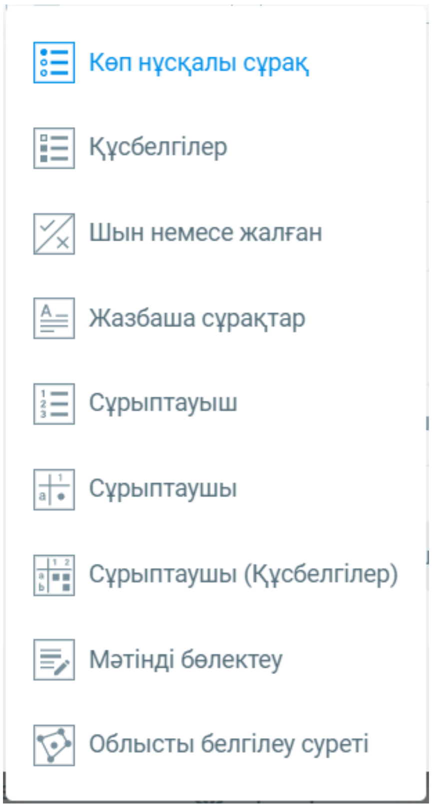
8 сынып алгебра курсы бойынша оқушылардың білімін қалыптастырушы және жиынтық бағалау тапсырмалары жинағының электронды нұсқасы “Classtime” бағдарламасы арқылы жасалды.

Бағдарлама өте қолжетімді және пайдалануға оңай, уақытты, күш-жігерді үнемдейді және бүкіл сабақ барысында оқушылардың жұмысын бақылауды қамтамасыз етеді. Сынып нақты уақыт режимінде жұмыс істейді. Сонымен қатар, бағдарлама әр оқушының жеке жұмыс режимін қамтамасыз етеді. “Classtime” бағдарламасында қазақ тілінде интерфейс қарастырылған. Бағдарламаның негізгі артықшылықтары:

- 8 түрлі сұрақ түрін құруға: бір немесе бірнеше жауабы дұрыс тапсырма; жалған/шындық; мәтін; сәйкестендіру; ашық сұрақтар; сурет арқылы бейнелеу тағы да басқа тапсырмалар құру мүмкіндіктері қарастырылған;
- Бір уақытта 300-ге дейін оқушылардың қатысуымен тест жұмысын өткізу;
- Әр сұраққа ұпай беріп, оқушылардың жауаптарын автоматты түрде бағалау;
- Оқушылардың жауаптарын, нәтижелері мен бағаларын PDF немесе Excel форматында экспорттауға болады.

Сервиспен жұмыс істеу үшін мұғалім өзінің жеке парақшасын ашуы керек. Бұл бірнеше минутты алады.

Тест тапсырмаларының көптеген нысандарын атап өткен жөн:



Тапсырмалардың ішінде бір немесе бірнеше дұрыс жауапты таңдаумен қатар, басқа қызметтерде кездеспейтін немесе басқаша көрінетін келесідей тапсырмалары бар.

1.Мәтінді бөлектеу.

Сіз мәтінді енгізесіз. Оқушы тінтуірмен дұрыс сөзді көрсетуі керек.

Тапсырма құрылысы келесідей: Дұрыс және дұрыс емес жауап нұсқаларын көрсететін мәтінді енгізіңіз. Сіз жасыратын мәтіндегі сөздерді жақшаға жасырасыз. Сөздерді нүктелі үтір арқылы жазыңыз. Жауабы дұрыс сөздің басында * (жұлдызша) белгілеңіз.

2. Сұраптаушы (сәйкестендіру). Оқушы берілген бағандардың тігінен және көлденеңінен сәйкестігін көрсетеді.

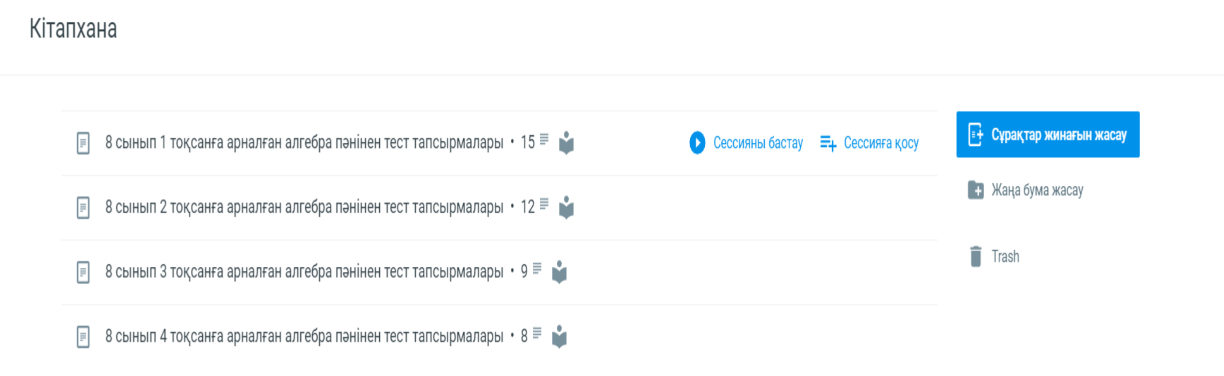
3. Жазбаша сұрақтар. Бұл тапсырмада жауап автоматты түрде бағаланбайды. Мұғалімнің өзі оқушының жұмысын, оның шағын эссесін бағалауы керек.

Мұғалім әр тапсырманы белгілі бір ұпаймен бағалай алады.

Жасаған тапсырмалар жинағында көп нұсқалы сұрақ, құсбелгілер, сұрыптаушы түрлері пайдаланылды.

8 сынып алгебра курсы бойынша оқушылардың білімін бағалау тапсырмалары жинағының электронды нұсқасынан мысалдар қарастырайық

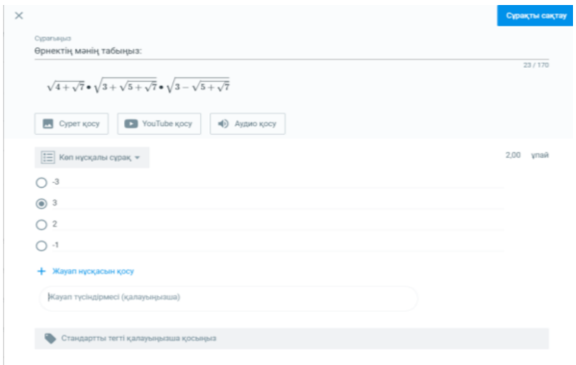
8 сынып алгебра курсы бойынша оқушылардың білімін жиынтық бағалау тапсырмалары жинағының электронды нұсқасын жасау барысында әр тоқсан бойынша жеке тапсырмалар құрылды. Мысалы, 8- суретте Classtime бағдарламасының кітапханасы келтірілген.

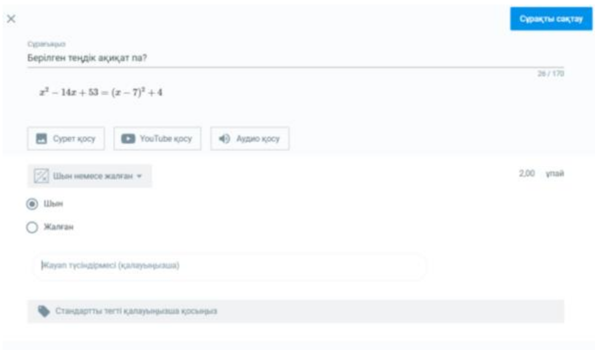


6-сурет. Classtime бағдарламасының кітапханасы

1 тоқсан 8.1А бөлім. «Квадрат түбір және иррационал өрнек» тақырыбы бойынша барлығы 15 тапсырма оның ішінде келесідей есептер қарастырылды (7-сурет, 8-сурет).

2 тоқсан 8.2А бөлім. «Квадрат теңдеулер» тақырыбы бойынша барлығы 12 тапсырма оның ішінде келесідей есептер қарастырылды (9-сурет, 10- сурет).

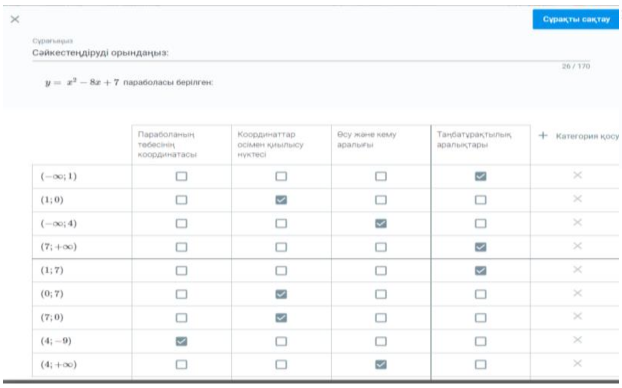




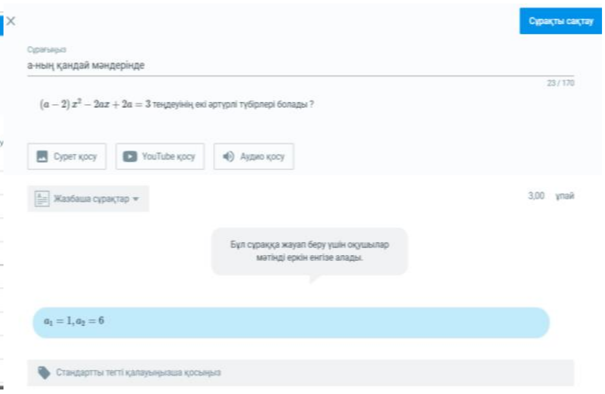
7-сурет. «Көпнұсқалы сұрақ"   8-сурет. «Шын немесе жалған»

3 тоқсан 8.3А бөлім: «Квадрат теңдеулер», 8.3В бөлім: «Квадраттық функция», 8.3С бөлім: «Статистика элементтері» тақырыптары бойынша 9 әр типті тапсырмалар құрастырылды (9-сурет).

4 тоқсан 8.4А бөлім. «Теңсіздіктер» тақырыбы бойынша барлығы 8 тапсырма оның ішінде келесі тапсырмалар жасалды (10-суре).



9-сурет. «Сәйкестендіру+1»



10-сурет. «Жазбаша сұрақтар»

Электронды оқулықты пайдаланғанда компьютер оқыту үрдісінің барлық кезеңдерінде қолданылады: жаңа материалдарды түсіндіргенде, бекіткенде, қайталағанда, білімін, іскерлігін және дағдыларын бақылағанда. Тестілік орта оқушылар білімін тексеру мен бағалауды арнайы бағдарламалар арқылы автоматтандыруды тиімді жүзегеасыруға мүмкіндік береді.

Пайдалаған әдебиеттер тізімі

1. Пегов А.А., Пьяных Е.Г. Информатизация образования как фактор развития общества . Краткий курс лекции

2. Башмаков М.А. Разработка компьютерно- обучающих систем и компьютерных учебников. М. 2012.60 -бет.

3. Кайдасов Ж. және т.б. Электрондық оқулық. Геометрия 7- сынып.- Алматы: БАПТО, 2022

4. Қағазбаева Ә.К., Сержанова А.А. және басқ. 8 сынып алгебра курсы бойынша оқушылардың білімін жиынтық бағалау тапсырмалары жинағын дайындау.- Ақтөбе: «Жубанов университеті баспасы», 2022.- 48 б.

ВОПРОСЫ ПОДГОТОВКИ ЭЛЕКТРОННОГО УЧЕБНИКА ПО МАТЕМАТИКЕ И КРИТЕРИАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ЗНАНИЙ УЧАЩИХСЯ НА ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАТФОРМЕ

А.К. КАГАЗБАЕВА, Ж.КАЙДАСОВ , Г.ҚУАНЫШЕВА , А. СЕРЖАНОВА
Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова. Актобе, Казахстан
e-mail: aspet-k@mail.ru, jet-k@mail.ru

Аннотация. В сфере образования из аппаратных средств информационно-коммуникационных технологий актуальным становится вопрос подготовки и эффективного использования комплексного обучающего пакета (электронных учебников) и тестовой среды. Под комплексным обучающим пакетом (электронными учебниками) понимаются программные средства (драйверы общего назначения и связанные с аппаратными средствами и т.д.), источники информации, виртуальные конструкторы, тренажеры, которые максимально автоматизируют процесс обучения в его, трудоемком построении (достижении уровня качества и полезности), ограничивающие самостоятельную деятельность учителя и ученика, тестовая среда).

Ключевые слова. Образование, информатизация, элоктронный учебник, тестовая среда, оценка.

QUESTIONS OF PREPARATION OF AN ELECTRONIC TEXTBOOK ON MATHEMATICS AND CRITERION ASSESSMENT OF STUDENTS' KNOWLEDGE ON AN ELECTRONIC PLATFORM

A. KAGAZBAYEVA, ZH.KAIDASOV, G. KUANYSHEVA ,A. SERZHANOVA
K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan
e-mail: aspet-k@mail.ru, jet-k@mail.ru

Annotation. In the field of education, the issue of preparation and effective use of a comprehensive training package (electronic textbooks) and a test environment is becoming relevant from the hardware of information and communication technologies. A comprehensive training package (electronic textbooks) is understood as software tools (general-purpose drivers and hardware-related ones, etc.), sources of information, virtual constructors, simulators that automate the learning process as much as possible in its labor-intensive construction (achieving a level of quality and usefulness), limiting the independent activities of the teacher and the student, the test environment).

Keywords. Education, informatization, electronic textbook, test environment, assessment

УДК 517.956

КРИТЕРИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ $l(\cdot) - A$ С ОПЕРАТОРОМ ТРИКОМИ A

Б.Д. КОШАНОВ[0000-0002-0784-5183]*, З. КАНАТБЕККЫЗЫ, Д. РАХЫМБЕКҰЛЫ, С. КУМАРБЕКОВ

Казахский национальный университет им. Аль-Фараби

*e-mail: koshanov@list.ru

Аннотация. В настоящей статье исследуется вопрос единственности решения регулярной по времени задачи для дифференциально-операторного уравнения $\mathrm{l}(\cdot) - A$ с оператором Трикоми A. Порядок дифференциального выражения $\mathrm{l}(\cdot)$ считается произвольным натуральным числом n. Для дифференциального выражения $\mathrm{l}(\cdot)$ задаются регулярные краевые условия по временной переменной t. Оператор A является порожденной уравнением Трикоми $Av = yv_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y)$. Граничные условия для оператора Трикоми задаются условием Дирихле на эллиптической части и дробными производными следами решения вдоль характеристик на гиперболической части. Указывается, что данный оператор является самосопряженным оператором в $L_2(\Omega)$. Самосопряженность оператора A гарантирует существование полной ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системы собственных функций, если Ω -- область, ограниченной кривой Ляпунова и характеристиками волнового уравнения.

Ключевые слова: гиперболические операторы второго порядка, регулярные краевые задачи по времени, краевая задача со смещением, единственность решения, собственные функций, полные ортонормированные системы. **2010 Mathematics Subject Classification**: 35G05, 35G10, 35P05

1. В функциональном пространстве $L_2(0,T)$ рассмотрим оператор B, порожденный дифференциальным выражением

$$\mathrm{l(w)} \equiv \frac{d^n w}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}w}{dt^{n-1}} + \cdots + p_n(t)w(t), \qquad 0 < t < T \tag{1}$$

с регулярными краевыми условиями

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\alpha_{kj}w^{(k)}(0) + \beta_{kj}w^{(k)}(T)\right] = 0\,, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{2}$$

где $p_j(t) \epsilon\, C^{(n-j)}[0,T]$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Требование I. Предположим, что область определения оператора B задается регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями [1]. Иначе говоря, в случае нечетного $\mathrm{n} = 2\mathrm{p} - 1$ следующие два определителя θ_0, θ_1 отличны от нуля; в случае четного $\mathrm{n} = 2\mathrm{p}$ следующие два определителя θ_{-1}, θ_1 отличны от нуля.

Сопряженный оператор B^* задается дифференциальным выражением

$$B^*R(t) = l^+(R), \qquad 0 < t < T$$

и областью определения

$$D(B^*) = \{R \epsilon W_2^n[0,T] : V_1(R) = 0, \dots, V_n(R) = 0\}.$$

В работе [1] доказано следующее утверждение.

Теорема 1 [1]. *Пусть область определения оператора B задается регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями. Тогда область определения оператора сопряженного B^* задается также регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями.*

Нам потребуется также следующее утверждение [3].

Теорема 2 [3]. *Пусть оператор B порожден регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями. Тогда система собственных и присоединенных функций оператора B является полной системой в пространстве $L_2(0,T)$.*

Применяя теорему 1 и теорему 2 к сопряженному оператору B^* , можем сформулировать утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены требование I. Тогда система собственных и присоединенных функций оператора B^* полна в пространстве $L_2(0,T)$.*

2. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^2$ - конечная область, ограниченная при $y > 0$ кривой Ляпунова σ, оканчивающейся в окрестности точек $O(0,0)$ и $B(1,0)$ малыми дугами "нормальной кривой" σ_0, а при $y < 0$ – характеристиками OC: $\mathrm{x} - \frac{2}{3}(-\mathrm{y})^{\frac{3}{2}} = 0$, BC: $\mathrm{x} + \frac{2}{3}(-\mathrm{y})^{\frac{3}{2}} = 1$ уравнения

$$Av = yv_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y) = f(x,y). \qquad (3)$$

Задача T. Найти в Ω решение уравнения (17), удовлетворяющие условию

$$u(x,y;t)|_{\sigma_0} = 0, \quad \sigma_0: (x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{4}{9}y^3 = \tfrac{1}{4}\ , \qquad (4)$$

$$\mathrm{x}^{5/6}\mathrm{D}_{0+}^{1/6}(u(\chi_0(\mathrm{x}))\mathrm{x}^{-2/3}) + (1-\mathrm{x})^{5/6}\mathrm{D}_{1-}^{1/6}(\mathrm{u}(\chi_1(\mathrm{x}))(1-\mathrm{x})^{-2/3}) = 0, \qquad (5)$$

где

$$\mathrm{u}(\chi_0(\mathrm{x})) = \mathrm{u}\left(\mathrm{x}, -\left[\frac{3\mathrm{x}}{2}\right]^{2/3}\right), \qquad 0 \le \mathrm{x} \le \frac{1}{2},$$

$$\mathrm{u}(\chi_1(\mathrm{x})) = \mathrm{u}\left(\mathrm{x}, -\left[\frac{3(1-\mathrm{x})}{2}\right]^{2/3}\right), \qquad \frac{1}{2} \le \mathrm{x} \le 1.$$

Здесь граничные условия задаются с помощью дробных производных Римана-Лиувилля [2]

$$\mathrm{D}_{0+}^{1/6}\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\int_{\mathrm{o}}^{\mathrm{x}} \frac{\mathrm{g}(\mathrm{t})}{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{1/6}}\,\mathrm{dt}\,,$$

$$\mathrm{D}_{1-}^{1/6}\mathrm{g}(\mathrm{x}) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\int_{\mathrm{x}}^{1}\frac{\mathrm{g}(\mathrm{t})}{(\mathrm{t}-\mathrm{x})^{\frac{1}{6}}}\mathrm{dt}.$$

Оператор, соответствующий краевой задаче T обозначим через A. Собственные значения оператора A будем нумеровать парой целочисленных индексов η_{m}. Собственные функции оператора A обозначим через $v_m(x,y)$ соответствующих собственным значением η_{m}.

В работе [4] доказано следующее утверждение.

Теорема 4 [4]. Оператор A является самосопряженным в пространстве $L_2(\Omega)$.

Как следствие данной теоремы К заключаем, что собственные функций $\{v_m(x,y), m = 1,2,\ldots,\}$ оператора A образуют полную систему функций в $L_2(\Omega)$.

3. Пусть Ω - конечная область из предыдущего пункта. В области $Q = \Omega\times(0,T)$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^{\mathrm{n}}\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y};\mathrm{t})}{\partial\mathrm{t}^{\mathrm{n}}} + \sum_{j=1}^{n}p_j(t)\frac{\partial^{n-j}u(x,y;t)}{\partial t^{n-j}} == \mathrm{y}\frac{\partial^2\mathrm{u}(x,\mathrm{y};\mathrm{t})}{\partial\mathrm{x}^2} + \frac{\partial^2\mathrm{u}(x,\mathrm{y};\mathrm{t})}{\partial\mathrm{y}^2} + \mathrm{f}(x,\mathrm{y};\mathrm{t}), (x,\mathrm{y})\in\Omega,\ 0 < \mathrm{t} < \mathrm{T} \quad (6)$$

с краевыми условиями по t

$$\mathrm{U}_v\big(u(x,\mathrm{y};\cdot)\big) = 0, \qquad v = 1,2,\ldots,\mathrm{n},\ (x,\mathrm{y})\in\Omega \qquad (7)$$

и с условиями по (x,y)

$$u(x,y;t)|_{\sigma_0} = 0, \quad \sigma_0: (x-\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{4}{9}y^3 = \tfrac{1}{4}, \qquad (8)$$

$$x^{5/6}D_{0+}^{5/6}(u(\chi_0(x);t)x^{-2/3}) + (1-x)^{5/6}D_{1-}^{1/6}(u(\chi_1(x);t)(1-x)^{-2/3}) = 0, \qquad (9)$$

где

$$u(\chi_0(x);t) = u\left(x, -\left[\frac{3x}{2}\right]^{\frac{2}{3}};\mathrm{t}\right), 0\le x\le\frac{1}{2},$$

$$u(\chi_1(x);t) = u\left(x, -\left[\frac{3(1-x)}{2}\right]^{\frac{2}{3}};\mathrm{t}\right), \qquad \frac{1}{2}\le x\le 1, \qquad 0<\mathrm{t}<\mathrm{T}.$$

Операторная запись вышеприведенной задачи (6)-(9) имеет вид

$$Bu = Au(x,y;t) + f(x,y;t), \ \ (x,y;t)\in Q. \qquad (10)$$

Здесь оператор B действует по переменной t и его свойства приведены в пункте 1. Оператор A действует по переменным (x,y) и его спектральные свойства приведены в пункте 2.

В данном пункте докажем критерий единственности решения однородного операторного уравнения (10).

Теорема 5. Пусть выполнено требование I. Тогда однородное операторное уравнение

$$Bu = Au \tag{11}$$

имеет только тривиальное решение $u \in D(B) \cap D(A)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sigma(B) \cap \sigma(A) \neq \emptyset\,, \tag{12}$$

где $\sigma(B)$ *и* $\sigma(A)$ *- спектры операторов B и A соответственно.*

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP 08857604 МОН РК.

Ключевые слова: гиперболические операторы второго порядка, регулярные краевые задачи по времени, краевая задача со смещением, единственность решения, собственные функций, полные ортонормированные системы.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G05, 35G10, 35P05

Литература

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. 1969. Наука, Москва. 528 с.

2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of fractional differential equations. 2006. Elsevier. 541 p.

3. Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Матем. 1964. № 2. С. 82-93.

4. Кальменов Т.Ш. О самосопряженных краевых задачах для уравнения Трикоми //Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, №1. С. 66-75.

ТРИКОМИ A ОПЕРАТОРЫ БАР $l(\cdot) - A$ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫ ОПЕРАТОРЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН УАҚЫТ БОЙЫНША ЛОКАЛЬДЫ ЕМЕС ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІНІҢ ЖАЛҒЫЗДЫҒЫНЫҢ КРИТЕРИІ

Б.Д. КОШАНОВ[0000-0002-0784-5183]*, З. КАНАТБЕККЫЗЫ, Д. РАХЫМБЕКҰЛЫ, С. КУМАРБЕКОВ

Казахский национальный университет им. Аль-Фараби

*e-mail: koshanov@list.ru

Аңдатпа. Бұл мақалада Трикоми A операторы бар $l(\cdot) - A$ дифференциалды операторлық теңдеу үшін уақыт бойынша локальды емес есептің шешімінің жалғыздығы

туралы мәселе зерттеледі. Мұндағы l(·) -- дифференциалдық өрнегінің кез келген натурал n санына тең. Осы l(·) -- дифференциалдық өрнегіне уақыт айнымалысы t бойынша регулярлы шеттік шарт қойылады. Ал A операторы $Av = yv_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y)$ Трикоми теңдеуінен туындайды. Осы Трикоми теңдеуіне шекаралық шарттар эллиптикалық бөлігінде Дирихле шарты беріледі, ал гиперболалық бөлігінде характеристиканың бойында шешімнің ізіне бөлшек туындылы шарттар қойылады. Осы Трикоми A операторының $L_2(\Omega)$ кеңістігінде өз-өзіне түйіндес екендігі көрсетілдеді. Өз-өзіне түйіндес A операторы $L_2(\Omega)$ кеңістігінде толық ортонормаланған меншікті функиялар жүйесінің бар болуын қамтамасыз етеді. Мұндағы Ω -- обылысы, жоғары жағынан, эллиптикалық бөлігі Ляпунов қисығымен шектелген, ал төменгі жағы тербеліс теңдеудің характеристикаларымен шектелген.

Түйін сөздер: екінші ретті гиперболалық операторлар, уақыт бойынша регулярлы шеттік есептер, жылжымалы шеттік есеп, шешімнің жалғыздығы, меншікті функиялар, толық ортонормаланған жүйелер.
2010 Mathematics Subject Classification: 35G05, 35G10, 35P05

CRITERIA FOR THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF A TIME-NONLOCAL PROBLEM FOR THE OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION $l(\cdot) - A$ WITH THE TRICOMI OPERATOR A

B.D. KOSHANOV, Z. KANATBEKKYZY, D. RAKHYMBEKULY, N.M. SHYNYBAEVA
Al-Farabi Kazakh National University
*e-mail: koshanov@list.ru

Annotation. In this article, the question of the uniqueness of the solution of a time-regular problem for the differential operator equation $l(\cdot) - A$ with the operator is investigated Tricomi A. The order of the differential expression $l(\cdot)$ is considered an arbitrary natural number n. For the differential expression $l(\cdot)$, regular boundary conditions are given for the time variable t. The operator A is generated by the Tricomi equation $Av = yv_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y)$. The boundary conditions for the Tricomi operator are given by the Dirichlet condition on the elliptic part and the fractional derivatives of the solution along the characteristics on the hyperbolic part. It is indicated that this operator is a self-adjoint operator in $L_2(\Omega)$. The self-adjoint of the operator A guarantees the existence of a complete orthonormal system of eigenfunctions in $L_2(\Omega)$ if Ω is a domain bounded by the Lyapunov curve and the characteristics of the wave equation.

Ключевые слова: second-order hyperbolic operators, regular boundary value problems in time, boundary value problem with fractional derivatives, uniqueness of the solution, eigenfunctions, complete orthonormal systems.
2010 Mathematics Subject Classification: 35G05, 35G10, 35P05

УДК 517.946
МРНТИ 27.33.19

ПОСТРОЕНИЕ МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ж.А. САРТАБАНОВ[1], Г.М.АЙТЕНОВА[2], Г.А. АБДИКАЛИКОВА[1]

[1]*Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан*

[2]*Западно-Казахстанский университет имени М.Утемисова, Уральск, Казахстан*

E-mail: sartabanov42@mail.ru; gulsezim-88@mail.ru; agalliya@mail.ru

Аннотация. Исследуется система интегро-дифференциальных уравнений. Построен матрицант, приведены интегральные представления многопериодического решения, получены достаточные условия существования и единственности многопериодического решения рассматриваемой системы.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, матрицант, резольвента, ядро, многопериодичность.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение в частных производных

$$D_c u(\tau,t) = A(\tau,t)u(\tau,t) + \int_{\tau}^{\tau+\theta} K(\tau,t,s,\sigma)u(s,\sigma)ds + f(\tau,t), \tag{1}$$

где $u(\tau,t)$ – искомая вектор-функция переменных $(\tau,t)\in R\times R^m$; $D_c = \partial/\partial\tau + \langle c,\partial/\partial t\rangle$ – оператор дифференцирования, c – постоянный m-вектор, $\langle c,\partial/\partial t\rangle$ – скалярное произведение векторов c и $\partial/\partial t = (\partial/\partial t_1,\ldots,\partial/\partial t_m)$; $\sigma = \sigma_0 + cs = t - c\tau + cs$ – характеристика оператора дифференцирования D_c по направлениям векторного поля $dt/d\tau = c$, $s\in R = (-\infty;+\infty)$; $A(\tau,t)$ и $K(\tau,t,s,\sigma)$ – $n\times n$-матрицы, $f(\tau,t)$ – n - вектор-функция.

Исследованием теории интегро-дифференциальных уравнений занимались многие авторы. Как известно, В.Вольтерра использовал интегро-дифференциальные уравнения в задачах наследственной упругости [1], обосновал существование периодических флуктуаций в биологических ассоциациях, создал общую теорию функционалов [2]. В работе [3] рассмотрены распространение результатов М.Урабе на системы интегро-дифференциальных уравнений. Интегро-дифференциальные уравнения находят применения в задачах теории наследственности [4]. Исследованию почти периодических решений систем уравнений с квазипериодическими правыми частями посвящена [5]. В [6, 7] исследованы почти периодические решения интегро-дифференциальных уравнений типа переноса. Вопросы существования и построения многопериодических и псевдопериодических решений систем интегро-дифференциальных уравнений, содержащих пространственную переменную рассмотрены в [8]. По различным проблемам теории периодических и почти периодических колебаний были изложены в [9].

Цель работы – установить достаточные условия существования и единственности многопериодического решения интегро-дифференциального уравнения (1) с оператором дифференцирования по направлению векторного поля.

Предположим выполненными условия (θ,ω)-периодичности, непрерывности по $\tau \in R$ и непрерывной дифференцируемости по $t \in R^m$:

$$A(\tau+\theta, t+q\omega) = A(\tau,t) \in C^{(0,e)}_{\tau,t}\left(R \times R^m\right),\ q \in Z^m, \tag{2}$$

$$K(\tau+\theta, t+q\omega, s, \sigma) = K(\tau,t,s,\sigma) \in C^{(0,e,0,e)}_{\tau,t,s,\sigma}\left(R \times R^m \times R \times R^m\right),\ q \in Z^m, \tag{3}$$

$$K(\tau+\theta, t+q\omega, s+\theta, t+q\omega - c(\tau+\theta) + c(s+\theta)) = K(\tau,t,s,t-c\tau+cs),\ q \in Z^m,$$

$$f(\tau+\theta, t+q\omega) = f(\tau,t) \in C^{(0,e)}_{\tau,t}\left(R \times R^m\right),\ q \in Z^m. \tag{4}$$

Здесь $e=(1,...,1)$ – m-вектор, показатель степени гладкости по $t=(t_1,...,t_m)$; Z^m – множество целочисленных векторов $q=(q_1,...,q_m)$, $q\omega=(q_1\omega_1,...,q_m\omega_m)$ – кратный период с кратностью q периода $\omega=(\omega_1,...,\omega_m)$, периоды $\omega_0=\theta$, $\omega_1,...,\omega_m$ – рационально несоизмеримые положительные постоянные.

Рассмотрим однородное интегро-дифференциальное уравнение

$$D_c u(\tau,t) = A(\tau,t)u(\tau,t) + \int_{\tau}^{\tau+\theta} K(\tau,t,s,\sigma)u(s,\sigma)ds, \tag{5}$$

соответствующее неоднородному уравнению (1). Учитывая $\sigma=\sigma_0+cs$ по известной методике [6] построения матриканта уравнения $D_c w = A(\tau,t)w$ определим матрицу $W(\tau_0,\tau,t)$ на основе интегрального матричного уравнения

$$W(\tau_0,\tau,t) = E + \int_{\tau_0}^{\tau} A(s, t-c(\tau-s))W(\tau_0, s, t-c(\tau-s))ds \tag{6}$$

с единичной n-матрицей E. Заметим, что в силу условий (2)-(4) матрица $W(s,\tau,t)$ является (θ,θ,ω)-периодической по s,τ,t:

$$W(s+\theta, \tau+\theta, t+q\omega) = W(s,\tau,t) \in C^{(0,0,e)}_{s,\tau,t}\left(R \times R \times R^m\right),\ q \in Z^m.$$

Решение интегрального уравнения (6) ищем в виде ряда

$$W(\tau_0,\tau,t) = \sum_{m=0}^{\infty} W_m(\tau_0,\tau,t), \tag{7}$$

члены которого находим из рекуррентных соотношений:

$$W_0(\tau_0,\tau,t)=E,\ W_1(\tau_0,\tau,t)=\int_{\tau_0}^{\tau}A(s,t-c(\tau-s))ds\ ,\ \dots\ ,$$

$$W_m(\tau_0,\tau,t)=\int_{\tau_0}^{\tau}A(s,t-c(\tau-s))W_{m-1}(\tau_0,s,t-c(\tau-s))ds\ ,\ m=1,2,...,.$$

Непосредственно можно убедиться, что ряд (7) сходится абсолютно и равномерно.

Положим, что матрицант $W(\tau_0,\tau,t)$ уравнения (5) для всех $\tau\geq\tau_0$ и $t\in R^m$ удовлетворяет условию $\|W(\tau_0,\tau,t)\|\leq\Gamma e^{-\rho(\tau-\tau_0)}$ с постоянными $\Gamma\geq 1,\ \rho>0$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что матрицант $W(\tau_0,\tau,t)$ обладает свойством многопериодичности по τ_0,τ и t:

$$W(\tau_0+\theta,\tau+\theta,t+q\omega)-W(\tau_0,\tau,t)=0\ ,\ q\in Z^m\ .$$

Используя замену

$$u(\tau,t)=W(\tau_0,\tau,t)v(\tau,t), \tag{8}$$

однородное уравнение (5) приводится к виду

$$D_c v(\tau,t)=\int_{\tau}^{\tau+\theta}Q(\tau_0,\tau,t,s,t-c(\tau-s))v(s,t-c(\tau-s))ds \tag{9}$$

с ядром $Q(\tau_0,\tau,t,s,\sigma)=W^{-1}(\tau_0,\tau,t)K(\tau,t,s,\sigma)W(\tau_0,s,\sigma)$. Отметим, что на основе условий (2)-(4) ядро $Q(\tau_0,\tau,t,s,t-c(\tau-s))$ обладает свойством:

$$Q(\tau_0+\theta,\tau+\theta,t+q\omega,s+\theta,t+q\omega-c(\tau+\theta)+c(s+\theta))=Q(\tau_0,\tau,t,s,t-c(\tau-s)),\ q\in Z^m\ .$$

Для матрицанта $V(\tau_0,\tau,t)$ уравнения (9) имеем матричное интегральное уравнение

$$V(\tau_0,\tau,t)=E+\int_{\tau_0}^{\tau}\int_{\eta}^{\eta+\theta}Q(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))V(\tau_0,s,t-c(\tau-s))dsd\eta\ . \tag{10}$$

Решение интегрального уравнения (10) ищем в виде:

$$V(\tau_0,\tau,t)=\sum_{m=0}^{\infty}V_m(\tau_0,\tau,t) \tag{11}$$

с начальным приближением $V_0(\tau_0,\tau_0,t)=E$. $V_m(\tau_0,\tau,t)$ находим из соотношения

$$V_m(\tau_0,\tau,t)=\int_{\tau_0}^{\tau}\int_{\eta}^{\eta+\theta}Q(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))V_{m-1}(\tau_0,s,t-c(\tau-s))dsd\eta,\ m=1,2,\dots .$$

Тогда

$$V_m(\tau_0,\tau,t)=\int_{\tau_0}^{\tau}\int_{\eta}^{\eta+\theta}Q_m(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))dsd\eta . \qquad (12)$$

Ядро интегро-дифференциального уравнения определяется через рекуррентные соотношения. Установлены справедливость следующих оценок

$$\|Q_m(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))\|\le Q_0^m\frac{\theta^{m-1}(\tau-\eta)^{m-1}}{(m-1)!},\ \|V_m(\tau_0,\tau,t)\|\le Q_0^m\frac{\theta^m(\tau-\tau_0)^m}{m!},\ m=1,2,...,\ .$$

Отметим, что все итерированные ядра $Q_m(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))$ обладают свойством:

$$Q_m(\tau_0+\theta,\eta,t+q\omega-c((\tau+\theta)-\eta),s,t+q\omega-c((\tau+\theta)-s))=Q_m(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s)).$$

На оснований условий (2)-(4) можно показать, что матрицант $V(\tau_0,\tau,t)$ (θ,θ,ω) - периодична по $\tau_0,\tau,t: V(\tau_0+\theta,\tau+\theta,t+q\omega)=V(\tau_0,\tau,t)\in C^{(0,0,e)}_{\tau_0,\tau,\ t}(R\times R\times R^m),\ q\in Z^m$.

К ряду (11) воспользовавшись (12) имеем:

$$V(\tau_0,\tau,t)=E+\int_{\tau_0}^{\tau}\int_{\eta}^{\eta+\theta}\sum_{m=1}^{\infty}Q_m(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))dsd\eta . \qquad (13)$$

Ряд $\sum_{m=1}^{\infty}Q_m(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))$ сходится абсолютно и равномерно к непрерывной функции $R(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))$, называемое резольвентой ядра. Разрещающее ядро удовлетворяет интегральному уравнению

$$R(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))=Q(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))+$$
$$+\int_{\eta}^{\tau}\int_{\eta}^{\eta+\theta}Q(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))R(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))dsd\eta . \qquad (14)$$

Решение уравнения (14) находим методом последовательных приближений и ищем в виде ряда

$$R(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))=\sum_{m=1}^{\infty}Q_m(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s)). \qquad (15)$$

Применив резольвенту (15) к (13) имеем

$$V(\tau_0,\tau,t)=E+\int_{\tau_0}^{\tau}\int_{\eta}^{\eta+\theta}R(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))dsd\eta .$$

Далее с учетом (8) имеем $U(\tau_0,\tau,t)=W(\tau_0,\tau,t)V(\tau_0,\tau,t)$. Оценим $U(\tau_0,\tau,t)$

$$\|U(\tau_0,\tau,t)\|\le\|W(\tau_0,\tau,t)\|\|V(\tau_0,\tau,t)\|\le\Gamma e^{\chi(\tau-\tau_0)},\ \ \chi=Q_0\theta-\rho<0 . \qquad (16)$$

Задача. Найти функцию $u(\tau,t)$, удовлетворяющей для всех $\tau>\tau_0$ и $t\in R^m$ интегро-дифференциальному уравнению (1) и начальному условию

$$u(\tau_0,t)=\varphi(t)\in C_t^e\left(R^m\right). \tag{17}$$

Теорема. Если выполнены условия (2)-(4), (16) и $\varphi(t)\in C_t^e\left(R^m\right)$, то существует единственное многопериодическое решение $u^*(\tau,t)$ задачи (1), (17), определяемое в виде $u^*(\tau,t)=\int\limits_{-\infty}^{\tau}U(\tau_0,s,t-c(\tau-s))f(s,t-c(\tau-s))ds$ и удовлетворяющее условию $\left\|u^*(\tau,t)\right\|\le\Gamma\chi^{-1}f_0$.

Доказательство. Решение задачи Коши (1), (17) ищем в виде

$$u(\tau,t)=U(\tau_0,\tau,t)\varphi(t-c(\tau-\tau_0))+\int\limits_{\tau_0}^{\tau}U(s,\tau,t-c(\tau-s))f(s,t-c(\tau-s))ds. \tag{18}$$

В (18) предполагая, что вектор-функция $\varphi(t)$ любая из $C_t^e\left(R^m\right)$, используя необходимое и достаточное условие многопериодичности Умбетжанова-Сартабанова

$$u(\tau_0+\theta,t)=u(\tau_0,t)\in C_{\tau_0,t}^{(0,e)}\left(R\times R^m\right) \tag{19}$$

ищем среди решений (18) многопериодическое решение системы (1). Воспользовавшись условием периодичности (19) для решения (18) имеем

$$\varphi(t)=U(\tau_0,\tau_0+\theta,t)\varphi(t-c((\tau_0+\theta)-s))+$$

$$+\int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\theta}U(\tau_0,s,t-c((\tau_0+\theta)-s))f(s,t-c((\tau_0+\theta)-s))ds. \tag{20}$$

Затем во втором члене правой части (20) совершая сдвиг интегрирования на период θ и учитывая θ -периодичность матрицанта $U(\tau_0,\tau,t-c(\tau-s))$ и вектор-функций $f(\tau,t-c(\tau-s))$, решая ее методом последовательных приближений, по ходу используя формулу типа свертки и применяя метод полной математической индукции, имеем $\varphi_m(t)=\int\limits_{\tau_0-m\theta}^{\tau_0}U(\tau_0,s,t-c(\tau_0-s))f(s,t-c(\tau_0-s))ds$. Тем самым

$$\varphi^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\tau_0-k\theta}^{\tau_0}U(\tau_0,s,t-c(\tau_0-s))f(s,t-c(\tau_0-s))ds=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\tau_0}U(\tau_0,s,t-c(\tau_0-s))f(s,t-c(\tau_0-s))ds. \tag{21}$$

Подставляя (21) в (18), используя групповое свойство, получим:

$$u^*(\tau,t)=\int_{-\infty}^{\tau}U(\tau_0,s,t-c(\tau-s))f(s,t-c(\tau-s))ds\,. \tag{22}$$

Сходимость несобственного интеграла в правой части (22) обеспечивается ограниченностью вектор-функции $f(\tau,t-c(\tau-s))$.

Отметим некоторые свойства вектор-функции $u^*(\tau,t)$:

1) функция $u^*(\tau,t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению (1) и при $\tau\to\tau_0+0$ обращается в $\varphi^*(t)$;

2) она является многопериодической функцией по τ и t с вектором-периодом (θ,ω);

3) $\|u^*(\tau,t)\|\le\Gamma\chi^{-1}f_0$, где $\|f(\tau,t-c(\tau-s))\|=\sup\limits_{(\tau,t)\in R\times R^m}|f(\tau,t-c(\tau-s))|\le f_0$, $f_0=const$.

4) Решение $u^*(\tau,t)$ единственно.

Что и требовалось доказать.

Список использованной литературы

1. Volterra V. Lecons sur les equations integrals et les equations integro-differentielles. – Paris. – 1913. – 165 p.

2. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 303 с.

3. Самойленко А.М., Нуржанов О.Д. Метод Бубнова-Галеркина построения периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтера //Диффренц. уравнения. – 1979. – Vol. 15, №8. – С. 1503-1517.

4. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.

5. Харасахал В.Х. Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1970. – 200 с.

6. Умбетжанов Д.У. Почти периодические решения эволюционных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1990. – 184 с.

7. Умбетжанов Д.У., Бержанов А.Б. О существовании почти многопериодического решения одной системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных //Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1983. №5. – С. 11-15.

8. Сартабанов Ж.А. Псевдопериодические решения одной системы интегро-дифференциальных уравнений //Укр.мат. жур. – 1989. – Vol. 41, №1. – С. 125-130.

9. Абдикаликова Г.А. Построение почти периодического решения одной квазилинейной параболической системы //Изв. МОН НАН РК. Сер.физ.-мат. – 2001. №3. – С. 3-8.

ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ИНТЕГРАЛДЫ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ БІР ЖҮЙЕСІНІҢ КӨППЕРИОДТЫ ШЕШІМІН ҚҰРУ

Ж.А.САРТАБАНОВ[1], Г.М.АЙТЕНОВА[2], Г.А.АБДИКАЛИКОВА[1]

[1] *Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан*

[2] *М. Өтемісов атындағы Батыс Қазақстан университеті, Орал, Қазақстан*

e-mail: sartabanov42@mail.ru; gulsezim-88@mail.ru; agalliya@mail.ru

Аңдатпа. Интегралды-дифференциалдық теңдеулер жүйесі зерттеледі. Матрицант құрылып, көппериодты шешімнің интегралды көріністері келтірілді, қарастырылып отырған жүйенің көппериодты шешімінің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарттары алынды.

Түйін сөздер: интегралды-дифференциалдық теңдеу, матрицант, резолвента, ядро, көппериодтылық.

CONSTRUCTION OF A MULTIPERIODIC SOLUTION OF ONE SYSTEM OF INTEGRO-DIFFERENTIAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Zh.A.SARTABANOV[1], G.M.ANTONOVA[2], G.A.ABDIKALIKOVA[1]

[1] *Aktobe Regional University named after K.Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan*

[2] *M.Utemisov West Kazakhstan University, Uralsk, Kazakhstan*

e-mail: sartabanov42@mail.ru; gulsezim-88@mail.ru; agalliya@mail.ru

Annotation. A system of integro-differential equations is investigated. A matricant is constructed, integral representations of a multiperiodic solution are given, sufficient conditions for the existence and uniqueness of a multiperiodic solution of the system under consideration are obtained.

Keywords: integro-differential equation, matricant, resolvent, kernel, multiperiodicity.

ӘОЖ 517.956
ҒТАХР 27.31.17

ИМПУЛЬСТІ КВАЗИСЫЗЫҚТЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ БОЛЖАНБАЙТЫН ШЕШІМДЕРІ

З.Т. НУГАЕВА[1], М. АХМЕТ[2], М.ТЛЕУБЕРГЕНОВА[1]

[1]*Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан*

[2]*Орталық-Шығыс Техникалық Университеті, Анкара, Түркия*

E-mail: zahira2009.85@mail.ru; marat@metu.edu.tr; madina1970@mail.ru

Аннотация. Мақалада квазисызықтық импульсті дифференциалдық теңдеулер жүйесінің үзілісті болжанбайтын, асиптотикалық орнықты шешімдері зерттелген. Үзілісті болжанбайтын функция ұғымы бірнеше тәуелсіз айнымалысы бар функциялар класына дейін кеңейтіліп, уақыт айнымалысы бойынша болжанбайтындық ұғымы енгізілген. Квазизысықтың импульсті жүйелердің болжанбайтын үзілісті шешімдері үшін алынған теориялық нәтижелерді растайтын иллюстрациялық мысалдар келтірілген.

Түйін сөздер: Квазисызықтық жүйе, импульсті жүйе, болжанбайтын функци, үзілісті болжанбайтын функция, асимптотикалық орнықтылық.

Мақала квазисызықтық импульсті дифференциалдық теңдеулер жүйесінің үзілісті болжанбайтын, асиптотикалық орнықты шешімдерін зерттеуге арналған. Бірнеше тәуелсіз айнымалысы бар функциялар класы үшін уақыт айнымалысы бойынша болжанбайтындық ұғымы енгізілген.

Мақалада $u=(u_1,\dots,u_p)$ векторы үшін $\|u\|_1=\max\limits_{1\le i\le p}|u_i|$ нормасын, ал $A=(a_{ij})$, $i,j=1,\dots,p$ квадрат матрицасы үшін $\|A\|=\max\limits_{1\le i\le p}\sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|$ нормасын қолданылады, мұндағы $|\cdot|$ – абсолют шама белгісі.

1-анықтама [1]. Шенелген, $\kappa_i=(\kappa_i^1,\kappa_i^2,\dots,\kappa_i^p),\, i\in\mathbb{Z}$, тізбегі берілсін. Егер төмендегі шарттар:

(a) әрбір бүтін $i_1<i_2$ үшін $\max\limits_{i_1<i<i_2}\|\kappa_{i+l_n}-\kappa_i\|\to 0,\, n\to\infty$;

(b) әрбір натурал n үшін $\|\kappa_{m_n+l_n}-\kappa_{m_n}\|\ge\varepsilon_0$ теңсіздігі

орындалатындай $\varepsilon_0>0$ саны мен $l_n\to\infty,\ m_n\to\infty,\ n\to\infty$ тізбектері табылатын болса, онда κ_i тізбегі *болжанбайтын* деп аталады.

Нақты сандардың $\tau_i, i\in\mathbb{Z}$ тізбегін қарастырамыз, ол келесідей қасиеттерге ие: 1) $|\tau_i|\to$

∞, $|i| \to \infty$; 2) кез келген оң $\underline{\tau}$, $\overline{\tau}$ сандары үшін $\underline{\tau} \leq \tau_{i+1} - \tau_i \leq \overline{\tau}$ орындалады.

Сан түзуінде анықталған және үзіліс нүктелері саналымды жиындарды құрайтын, бұған қоса үзіліс нүктелерінде біржақты шектері бар барлық p-өлшемді бөлікті үзіліссіз функциялар жиынын $\mathcal{F}$ арқылы белгілейміз. Егер функциялар әртүрлі болса, онда үзіліс нүктелерінің жиындары бірдей болуы міндетті емес. Бұл жиындарының шоғырлану (шектік) нүктелері болмайды, әрі екі жағынан шенелмеген.

ϕ_1 және ϕ_2 функциялары $\mathcal{F}$ жиынынан алынған бөлікті үзіліссіз функциялар болсын. Шенелген $J \subseteq \mathbb{R}$ интервалына тиесілі функциялардың үзіліс нүктелерін сәйкесінше $\tau_i^{\phi_1}$ және $\tau_i^{\phi_2}$, $i = 1, \ldots, k$ деп белгілейміз. Егер әрбір $i = 1, \ldots, k$ үшін $\left|\tau_i^{\phi_1} - \tau_i^{\phi_2}\right| < \varepsilon$ шарты және $\left[\widehat{\tau_\iota^{\phi_1}, \tau_\iota^{\phi_2}}\right]$ интервалынан басқа аралықта жататын барлық $t \in J$ үшін $\|\phi_1(\mathrm{t}) - \phi_2(t)\| < \varepsilon$ шарты орындалса, онда бұл функциялар J интервалында *ε-эквиваленттi* деп аталады. Егер ϕ_1 және ϕ_2 функциялары J интервалында ε-эквивалентті болса, онда бұл функциялар бір-бірінің *ε -маңайында* орналасқан деп айтады. Осындай маңайлардың көмегімен анықталатын топологияны *B-топология* деп атайды [2].

p-өлшемді бөлікті үзіліссіз функциялардың $\mathcal{F}$ жиынын және анықталу облысы $\mathbb{R} \times \mathbb{S}$, $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^p$ болатын p-өлшемді $g(t, x)$ вектор функциясын қарастырамыз. Егер әрбір $x \in S$, $S \subset \mathbb{S}$ үшін $g(t, x)$ функциясының үзіліс нүктелері мен x айнымалысының үзіліс нүктелері ортақ болса, онда $g(t, x)$ функциясы $\mathcal{F}(S)$ жиынынан алынған деп аталады. Егер әрбір бекітілген $x \in S$ үшін $\mathcal{F}(S)$ жиынынан алынған $g(t, x)$ мен $h(t, x)$ функциялары $\mathcal{F}$ жиынындағыдай ε-эквивалентті болса, онда олар $J \subseteq \mathbb{R}$ интервалында *ε-эквивалентті* деп аталады.

Жұмыста қарастырылатын бөлікті үзіліссіз функциялар үзіліс нүктелерінде сол жақты үзіліссіз және бірінші текті үзілістерге ие болады.

Зерттеудің мақсатына сәйкес импульсті жүйенің үзіліс нүктелері төмендегідей түрде алынады:

$$\tau_i = iT + \gamma_i, i \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

мұндағы $\gamma_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$ – болжанбайтын тізбек, ал $T \geq 4$ саны $\sup_{i \in Z} |\gamma_i| < T/h$, $h \geq 3$ шартын қағаттандыратындай сан.

2-анықтама. Үзіліс нүктелері $\tau_i, i \in \mathbb{Z}$, болатын, шенелген және бөлікті үзіліссіз $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ функциясы берілсін. Егер төмендегі шарттар:

(a) әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін $\max_{i_1 < i < i_2} \left|\tau_{i+l_n} - t_n - \tau_i\right| \to 0$, $n \to \infty$;

(b) әрбір натурал n үшін $\left|\theta_{m_n+l_n} - t_n - \theta_{m_n}\right| \geq \varepsilon_0$;

(c) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \sigma(\varepsilon) > 0$ $t_1, t_2 \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i \in \mathbb{Z}: |t_1 - t_2| < \sigma(\varepsilon) \Rightarrow$

$\|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\| < \varepsilon$;

(d) әрбір шенелген интервалдағы B-топологияда $\varphi(t + t_n) \to \varphi(t), n \to \infty$;

(e) әрбір натурал n және $\varphi(t)$ мен $\varphi(t + t_n)$ фунцияларының үзіліс нүктелерін қамтымайтын $[s_n - \delta,\ s_n + \delta] \subseteq [\theta_{m_n} \widehat{,}\ \theta_{m_n+l_n} - t_n]$ интервалынан алынған кез келген t үшін $\|\varphi(t + t_n) - \varphi(t)\| \geq \varepsilon_0$ теңсіздігі орындалатындай $\varepsilon_0 > 0$, $\delta > 0$ сандары және нақты сандардың $t_n \to \infty$, $s_n \to \infty$, $n \to \infty$, тізбектері мен бүтін сандардың $l_n \to \infty, m_n \to \infty,\ n \to \infty$, тізбектері табылатын болса, онда $\varphi(t)$ функциясы *үзілісті болжанбайтын* деп аталады.

3-анықтама. Үзіліс нүктелері $\tau_i, i \in \mathbb{Z}$, болатын, t айнымалысы бойынша бөлікті үзіліссіз $f(t,x) \in \mathcal{F}(S)$, $f = (f_1,\ \dots, f_p)$ функциясы берілсін. Егер келесі шарттар:

(a) әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін $\max\limits_{i_1<i<i_2} \left|\tau_{i+l_n} - t_n - \tau_i\right| \to 0, n \to \infty$;

(b) әрбір натурал n үшін $\left|\tau_{m_n+l_n} - t_n - \tau_{m_n}\right| \geq \varepsilon_0$;

(c) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \sigma(\varepsilon) > 0\ \ t_1, t_2 \in (\tau_i, \tau_{i+1}],\ i \in \mathbb{Z} : |t_1 - t_2| < \sigma(\varepsilon)$
$\Rightarrow \sup\limits_S \|f(t_1, x) - f(t_2, x)\| < \varepsilon$;

(d) әрбір шенелген интервалда $\sup\limits_S \|f(t + t_n, x) - f(t, x)\| \to 0, n \to \infty$;

(e) әрбір натурал n үшін $f(t,x)$ пен $f(t + t_n, x)$ фунцияларының үзіліс нүктелерін қамтымайтын $[s_n - \delta,\ s_n + \delta] \subseteq [\tau_{m_n} \widehat{,}\ \tau_{m_n+l_n} - t_n]$ интервалынан алынған кез келген t үшін $\inf\limits_S \|f(t + t_n, x) - f(t, x)\| \geq \varepsilon_0$ теңсіздігі орындалатындай $\varepsilon_0 > 0$, $\delta > 0$ сандары және нақты сандардың $t_n \to \infty$, $s_n \to \infty$, $n \to \infty$ тізбектері мен бүтін сандардың $l_n \to \infty$, $m_n \to \infty$, $n \to \infty$ тізбектері табылатын болса, онда $f(t,x)$ функциясы *t бойынша үзілісіті болжанбайтын функция* деп аталады.

4-анықтама. Үзіліс нүктелері $\tau_i, i \in \mathbb{Z}$, болатын, бөлікті үзіліссіз $f(t,x)$ функциясы t бойынша үзілісті болжанбайтын функция болсын және шенелген p-өлшемді $G_i(x) \in \mathbb{S}$, $i \in \mathbb{Z}$, векторы берілсін. Егер төмендегі шарттар:

(a) әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін $\max\limits_{i_1<i<i_2} \sup\limits_S \left\|G_{i+l_n}(x) - G_i(x)\right\| \to 0, n \to \infty$;

(b) әрбір натурал n үшін $\inf\limits_S \left\|G_{m_n+l_n}(x) - G_{m_n}(x)\right\| \geq \varepsilon_0$ теңсіздігі орындалатындай $\varepsilon_0 > 0$ сандары, бүтін сандардың $l_n \to \infty$, $m_n \to \infty$, $n \to \infty$ тізбектері табылатын болса, онда $(f(t,x), G_i(x))$ жұбы *болжанбайтын* деп аталады.

Келесі импульсті квазисызықтық жүйені қарастыралық

$$\begin{aligned} &x'(t) = Ax + f(t,x), \qquad t \neq \tau_i, \\ &\Delta x|_{t=\theta_i} = B\,x, \end{aligned} \tag{2}$$

мұндағы $t \in \mathbb{R}$, $x \in S$; $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times p}$ – коммутативті матрицалар; τ_i, $i \in Z$ – (1) түрінде берілген үзіліс нүктелер; $f(t,x)$: $\mathbb{R} \times \mathbb{S} \to \mathbb{R}^p$ – t бойынша болжанбайтын функция. $\det(I + B) \neq 0$.

Бөлікті үзіліссіз $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ функцияларының $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ ішкі кеңістігін енгіземіз. Ондағы норма $\|\varphi\|_1 = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|\varphi(t)\|$ арқылы анықталады. $\varphi(t)$ функциясының үзіліс сәттері (2) жүйенің үзіліс сәттерімен бірдей болады.

Кеңістіктің элементері мынадай қасиеттерге ие болсын:

($\mathcal{D}1$) барлық $\varphi(t) \in \mathcal{D}$ үшін $\|\varphi(t)\|_1 < H$ орындалатындай оң H саны табылады;

($\mathcal{D}2$) әрбір $\varphi(t) \in \mathcal{D}$ үшін нақты сандар жиынының шенелген интервалындағы $B -$ топологияда $\varphi(t + t_n) \to \varphi(t)$, мұндағы t_n (2)-жүйедегі $f(t,x)$ функциясы үшін таңдалған t_n-мен бірдей тізбек.

(2)-жүйені зерттеу үшін, оған сәйкес біртекті импульсті жүйенің фундаментальді матрицасын қолданылады: $X(t,s) = e^{A(t-s)}(I + B)^{i([s,t))}$, $t \geq s$.

$A + \frac{1}{T}Ln(I + B)$ матрицасының меншікті мәндерін λ_j, $j = 1,2, \dots, p$, қарастырамыз және меншікті мәндерінің нақты бөліктері $\mathcal{R}e\lambda_j$ үшін мына шарт орындалсын деп ұйғарамыз:

$(A1)$ $\max\limits_j \mathcal{R}e\lambda_j = \lambda < 0, j = 1,\ 2,\ \dots,\ p.$

Олай болса,

$$\|X(t,s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, t \geq s \tag{3}$$

теңсіздігі орындалатындай $K \geq 1$ және $0 < \alpha < -\lambda$ сандары табылады.

Келесі шарттар қажет болады:

$(A2)$ барлық $t \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in \mathbb{S}$үшін$||f(t,x_1) - f(t,x_2)|| \leq L_f||x_1 - x_2||$ орындалатындай оң L_f тұрақтысы табылады;

$(A3)$ барлық $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}$ үшін $\|f(t,x)\| \leq M_f$ орындалатындай оң M_f саны табылады;

$(A4)$ $\dfrac{KM_f}{H} < \alpha$;

$(A5)$ $KL_f < \alpha$.

1-лемма. $\vartheta(t)$ *фунциясы (2)-жүйенің шенелген шешімі болуы үшін ол*

$$\vartheta(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t,s)\, f(s,\vartheta(s))ds,\ \ t \in \mathbb{R}$$

интегралық теңдеудің шешімі болуы қажетті және жеткілікті.

$\mathcal{D}$ жиынында келесі операторды еңгізелік:

$$\Pi\varphi(t) = \int_{-\infty}^{t} X(t,s)\, f(s,\varphi(s))ds,\ \ t \in \mathbb{R},\ \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

2-лемма. *$\mathcal{D}$ кеңістігі Π операторына қатысты инвариантты.*

3-лемма. *Π операторы $\mathcal{D}$ кеңістігінің ішінде кысушы оператор.*

1-теорема. *Егер (A1)-(A5) шарттары орындалса, онда (2) жүйенің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

Келесі импульсті квазисызықтық жүйені қарастыралық:

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax + f(t,x), \qquad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\theta_i} &= Bx + G_i(x), \end{aligned} \tag{4}$$

мұндағы $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{S}$; $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times p}$ – коммутативті матрицалар; τ_i, $i \in Z$ – (1) түрінде берілген үзіліс нүктелер; $(f(t,x),\ G_i(x))$ болжанбайтын жұп. $\det(I + B) \neq 0$.

Төмендегі шарттар орындалады деп ұйғаралық:

$(A6)$ барлық $i \in \mathbb{Z}, x_1, x_2 \in \mathbb{S}$ үшін $||G_i(x_1) - G_i(x_2)|| \leq L_G||x_1 - x_2||$ теңсіздігі орындалатындай оң L_G тұрақтысы бар болады;

$(A7)$ $\sup\limits_{x\in\mathbb{S}}\|G(x)\| \leq M_G$ орындалатындай оң M_G саны табылады;

$(A8)$ $\dfrac{KM_f}{\alpha} + \dfrac{KM_G}{1 - e^{-\alpha\underline{\tau}}} < H;$

$(A9)$ $\dfrac{KL_f}{\alpha} + \dfrac{KL_G}{1 - e^{-\alpha\underline{\tau}}} < 1;$

$(A10)$ $KL_f + \dfrac{1}{\underline{\tau}}\ln(1 + KL_G) < 1.$

2-теорема. *Егер (A1)-(A2), (A6)-(A10) шарттары орындалса және $(f(t,x),\ G_i(x))$ жұбы болжанбайтын болса, онда (4) жүйенің асимптотикалық орнықты, үзілісті болжанбайтын жалғыз шешімі бар болады.*

1-мысал. Алдымен үзілісті болжанбайтын функцияның үзіліс нүктелерін анықтап аламыз. Ол үшін

$$\lambda_{i+1} = \mu\lambda_i(1-\lambda_i), i \in \mathbb{Z} \quad (5)$$

логистикалық бейнелеуін қарастырамыз. Егер $\mu \in (0,4]$ болса, (5) теңдеудің барлық шешімдері [0,1] интервалында жатады [3].

Ал [4] жұмыста $[3+(2/3)^{1/2}, 4]$ интервалынан алынған әрбір μ үшін логистикалық теңдеудің шешімдері болжанбайтын $\gamma_i, i \in \mathbb{Z}$ тізбегін құратындығы дәлелденген.

$$\tau_i = 4i + \gamma_i, i \in \mathbb{Z} \quad (6)$$

тізбегін қарастырайық. (6)-тізбек (1)-тізбектің дербес жағдайы болғандықтан, әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін $n \to \infty$ кезде $\max_{i_1<i<i_2} \left|\tau_{i+l_n} - t_n - \tau_i\right|$ нөлге ұмтылатын және әрбір натурал n үшін $\left|\tau_{m_n+l_n} - t_n - \tau_{m_n}\right| \geq \epsilon_0$ теңсіздігі орындалатын оң ε_0 саны және $t_n = 6l_n,\ l_n,\ m_n$ тізбектері табылады.

Болжанбайтын функцияны құру үшін Бернулли процесін қолданамыз. Яғни, [5] мақаладағы нәтижеге сәйкес ықтималдығы 1/2-ге тең, кездейсоқ анықталған 1 мен 3 сандарының шексіз тізбегін қарастырамыз. Олай болса, $\tau_i = 1{,}3,\ i \in \mathbb{Z}$ болжанбайтын тізбегі табылады және бүтін сандардың шенелген интервалынан алынған әрбір i үшін $\tau_{i+l_n} = \tau_i$, және барлық натурал n үшін $\left|\tau_{m_n+l_n} - \tau_{m_n}\right| = |1-3| \geq \varepsilon_0$ теңсіздігі орындалатын бүтін санды $l_n \to \infty,\ m_n \to \infty,\ n \to \infty$ тізбектері бар болады.

$\Phi(t)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функциясы $\Phi(t) = \tau_i,\ \ t \in [\tau_i,\ \tau_{i+1}),\ i \in \mathbb{Z}$ теңдеуі арқылы анықталған функция болсын. $\Phi(t)$ оң ε_0 , $\sigma = \frac{3}{2}$ сандары және $t_n = 4l_n$, $s_n = \frac{\tau_{m_n} + \tau_{m_n+1}}{2}$, $n \in \mathbb{N}$ тізбектерімен үзілісті болжанбайтын функция болады.

2 -мысал. Квазисызықты импульсті жүйесін қарастыралық

$$\begin{aligned}
&x_1' = 4x_2 + 0.024x_2^2 - 0.027x_3^3 + 0.008\Phi^3(\mathrm{t}),\\
&x_2' = -6x_1 + 0.018x_1^2 + 0.036x_2^3 + 0.007\Phi(\mathrm{t}),\\
&x_2' = -0.5x_3 + 0.025x_1^3 + 0.013x_2^2 - 0.12\Phi^3(\mathrm{t}),\\
&\Delta x_1|_{t=\theta_i} = -\frac{3}{4}x_1 + 0.001x_2^2 + 0.014x_3^3 + 0.05\gamma_i, t \neq \tau_i\\
&\Delta x_2|_{t=\theta_i} = -\frac{3}{4}x_2 - 0.011x_1^3 + 0.01x_3^2 - 0.06\gamma_i,\\
&\Delta x_3|_{t=\theta_i} = -\frac{3}{4}x_3 + 0.003x_1^2 - 0.023x_2^3 + 0.04\gamma_i,
\end{aligned} \quad (7)$$

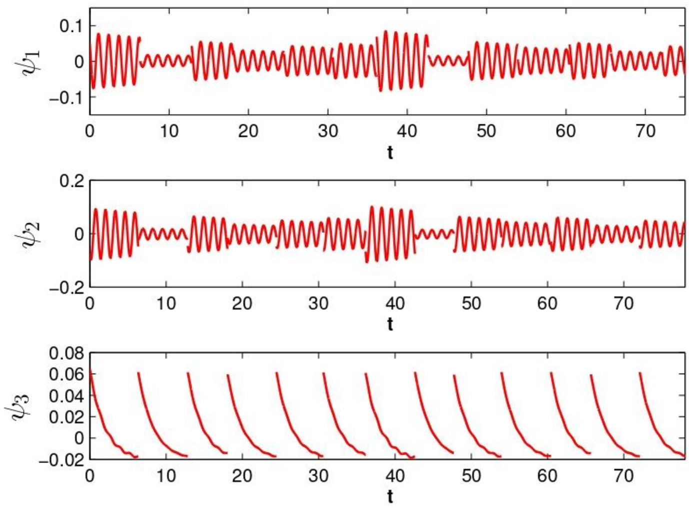
мұндағы $\gamma_i, \tau_i,\ \ i \in \mathbb{Z}$ тізбектері мен $\Phi(t)$ функциясы, сәйкесінше 1-мысалда анықталған болжанбайтын тізбектер мен үзілісті болжанбайтын функция. 1.4 және 1.5 леммалар [6] бойынша $\left(f(t,x), G(x)\right)$ жұбы болжанбайтын болады.

A мен B матрицалары коммутативті және

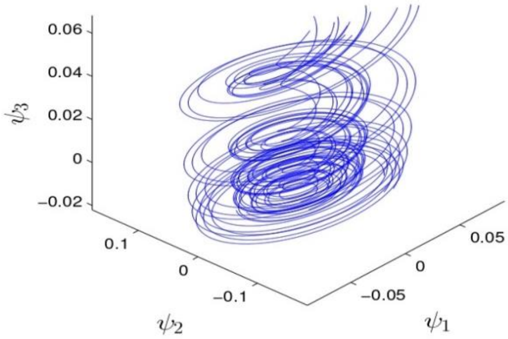
$$A + \frac{1}{T}\ln(I+B) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}ln2 & 4 & 0 \\ -6 & -\frac{1}{3}ln2 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5-\frac{1}{3}ln2 \end{pmatrix},$$

матрицасының меншікті мәндері мындай болады: $\lambda_1 = -0.5 - \frac{1}{3}ln2$, және $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{3}ln2 \pm 2\sqrt{6}i$. $\alpha = 0.2$ және $K = \sqrt{2}$ мәндерінде (A1)-шарты орындалады. Бұған қоса, $M_f = 0.01468$, $M_G = 0.06086$, $L_f = 0.01728$, $L_G = -0.01104$ және $H = 0.3$ болғанда, (7) жүйе үшін (A2), (A5)-(A9) шарттары орындалады. 2-теоремаға сәйкес, (7)-жүйенің асимптотикалық орнықты $\phi(t) = \left(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)\right)$ жалғыз шешімі бар болады.

Бастапқы мәндері белгісіз болғандықтан болжанбайтын функцияның шешімін модельдеу мүмкін емес. Сол себепті, бастапқы мәні $\psi_1(0) = (0.0556 - 0.075; 0.065)$ тең болатын көршілес $\psi(t) = \left(\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t)\right)$ шешімін қарастырамыз. Уақыт артқан сайын $\psi(t)$ функциясының графигі болжанбайтын $\phi(t)$ шешімінің графигіне жақындайды. Яғни болжанбайтын шешімді сипаттайтын қисықтың орнына $\psi(t)$-нің графигін қарастырамыз. 1-суретте $\psi(t)$-нің координаталары, ал 2-суретте шешімінің траекториясы көрсетілген.



Сурет 1 – $\phi(t)$ үзілісті болжанбайтын шешімнің координаталарына жақындайтын $\psi(t)$ функциясының координаталары



Сурет 2 –$\psi(t)$ үзілісті болжанбайтын функциясының траекториясы

Пайдаланған әдебиеттер тізімі

1. Akhmet M., Fen M.O. Non-autonomous equations with unpredictable solutions //Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. – 2018. – Vol. 59.– P. 657-670.

2. Akhmet M. Principles of Discontinuous Dynamical Systems. – New York: Springer, 2010. – 189 p.

3. Hale J., Kocak H. Dynamics and bifurcations. – New York: Springer-Verlag, 1991. – 574 p.

4. Akhmet M., Fen M.O. Poincare chaos and unpredictable functions //Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2017. – Vol. 48. – P. 85-94.

5. Akhmet M., Fen M.O., Alejaily E.M. A randomly determined unpredictable function // Kazakh Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 20, №2. – P. 30-36.

6. Akhmet M., Fen M.O, Tleubergenova M., Zhamanshin A. Unpredictable solutions of linear differential and discrete equations //Turkish Journal of Mathematics. – 2019. – Vol. 43.– P. 2377-2389.

АЛҒЫС

З.Нугаева мен М.Тлеубергенованың зерттеуі Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі Ғылым комитетінің гранты (Грант №AP08856170 және №AP09258737) есебінен жүзеге асырылды.

НЕПРЕДСКАЗУЕМЫЕ РЕШЕНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

З.Т. Нугаева[1], М. Ахмет[2], М.Тлеубергенова[1]

[1]*Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан*

[2]*Орталық-Шығыс Техникалық Университеті, Анкара, Түркия*

E-mail: zahira2009.85@mail.ru; marat@metu.edu.tr; madina1970@mail.ru

Аннотация. В статье исследованы разрывные непредсказуемые, асимптотически устойчивые решения систем квазилинейных импульсных дифференциальных уравнений. Понятие функции с разрывной непредсказуемости расширено до класса функций с несколькими независимыми переменными и введено понятие непредсказуемости по временной переменной. Приведены иллюстрированные примеры, подтверждающие полученные теоретические результаты для непредсказуемых разрывных решений квазилинейных импульсных систем.

Ключевые слова: Квазилинейная система, импульсная система, непредсказуемая функция, разрывная непредсказуемая функция, асимптотическая устойчивость.

UNPREDICTABLE SOLUTIONS OF IMPULSIVE QUASILINEAR SYSTEMS

Z. Nugayeva[1], M. Akhmet[2], M. Tleubergenova[1]

[1] *K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*

[2] *Middle East Technical University, Ankara, Turkey*

E-mail: zahira2009.85@mail.ru; marat@metu.edu.tr; madina1970@mail.ru

Annotation. Discontinuous unpredictable, asymptotically stable solutions of systems of quasilinear impulsive differential equations are studied in the article. The concept of a discontinuous unpredictable function has been extended to the class of functions of several variables, and the concept of unpredictability with respect to a time variable has been introduced. Examples with numerical simulations are presented to illustrate the theoretical results for discontinuous unpredictable solutions of quasilinear impulsive systems.

Keywords: Quasilinear system, impulsive system, unpredictable function, discontinuous unpredictable function, asymptotic stability.

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

У.К. КОЙЛЫШОВ[1,2], М.А. САДЫБЕКОВ[1,2] [0000-0001-8450-8191]

[1]Институт Математики и Математического Моделирования, Алматы, Казахстан.

[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан.

e-mail: koylyshov@mail.ru

Аннотация. Задачи теплопроводности с разрывными коэффициентами давно и хорошо исследуются. Следует отметить работы [1-5] , наиболее близкие по тематике к нашей работе. В работе Самарского А.А. [1] методом функции Грина и тепловых потенциалов доказана корректность первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом. А в работе казахстанских математиков Е.И. Ким и Б.Б. Баймуханов [2] методом потенциалов, сведением к интегральному уравнению доказана корректность первой начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом теплопроводности в полупространстве.

В работах [3-5] с помощью тепловых потенциалов доказано существование классических решений различных краевых задач для уравнений параболического типа.

В случае без разрыва спектральная теория этих задач построена практически полностью. Здесь можно отметить работы [6-16].

В данной работе обосновано решение методом разделения переменных начально-краевых задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности при общих нелокальных условиях и рассмотрены некоторые частные случаи.

Ключевые слова: задачи теплопроводности с разрывными коэффициентами, уравнения теплопроводности.

Постановка задачи.

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, требуется найти функцию $u(x,t)$ удовлетворяющее уравнению

$$\left.\begin{cases} u_t - k_1^2 u_{xx}, & 0 < x < x_0 \\ u_t - k_2^2 u_{xx}, & x_0 < x < l \end{cases}\right\} = f(x,t), \tag{1}$$

начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

граничным условиям

$$\begin{cases} a_{11}u_x(0,t) + a_{12}u_x(l,t) + a_{13}u(0,t) + a_{14}u(l,t) = 0, \\ a_{21}u_x(0,t) + a_{22}u_x(l,t) + a_{23}u(0,t) + a_{24}u(l,t) = 0, \end{cases} \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

и условиям сопряжения

$$u(x_0-0,t)=u(x_0+0,t), \quad 0\le t\le T, \tag{4}$$

$$k_1u_x(x_0-0,t)=k_2u_x(x_0+0,t), \quad 0\le t\le T, \tag{5}$$

Метод решения.

Решение задачи (1)-(5) ищем в виде $u(x,t)=Y(x)\cdot T(t)\ne 0$. Подставляя в уравнение (1) и условия (3)-(5), и разделяя переменные получаем следующую спектральную задачу (при $f(x,t)=0$)

$$Ly=\begin{Bmatrix}-k_1^2Y''(x), & 0<x<x_0\\ -k_2^2Y''(x), & x_0<x<l\end{Bmatrix}=\lambda Y(x), \tag{6}$$

$$\begin{cases}a_{11}Y'(0)+a_{12}Y'(l)+a_{13}Y(0)+a_{14}Y(l)=0,\\ a_{21}Y'(0)+a_{22}Y'(l)+a_{23}Y(0)+a_{24}Y(l)=0,\end{cases} \tag{7}$$

$$Y(x_0-0)=Y(x_0+0), \qquad k_1Y'(x_0-0)=k_2Y'(x_0+0), \tag{8}$$

Функция $T(t)$ является решением уравнения $T'(t)+\lambda T(t)=0$.

Нетрудно убедиться, что задача (6)-(8) несамосопряженная. Сопряженная задача к задаче (6)-(8) имеет вид:

$$Lz=\begin{Bmatrix}k_1^2Z''(x), & 0<x<x_0\\ k_2^2Z''(x), & x_0<x<l\end{Bmatrix}=\lambda Z(x) \tag{9}$$

$$\begin{cases}k_1^2A_{12}Z'(0)-k_1^2A_{23}Z(0)-k_2^2A_{13}Z(l)=0,\\ k_2^2A_{12}Z'(l)+k_2^2A_{14}Z(l)+k_1^2A_{24}Z(0)=0,\end{cases} \tag{10}$$

$$k_1Z(x_0-0)=k_2Z(x_0+0), \qquad k_1^2Z'(x_0-0)=k_2^2Z'(x_0+0), \tag{11}$$

где A_{ij} миноры матрицы $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\end{pmatrix}$,

$A_{ij}=\begin{vmatrix}a_{1i} & a_{1j}\\ a_{2i} & a_{2j}\end{vmatrix}$, $1\le i<j\le 4$,

Собственные значения задачи (6)-(8) и сопряженной задачи (9)-(11) совпадают.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Для любых функций $\varphi(x) \in C[0,l] \cap C^2[0,x_0] \cap C^2[x_0,l]$ и $f(x,t) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\overline{\Omega_0}) \cap C^2(\overline{\Omega_l})$, удовлетворяющих краевым условиям (3) и условиям сопряжения (4)-(5), существует единственное классическое решение $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega_0}) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega_l})$ задачи (1)-(5).

Теорема 2. Для любой функции $\varphi(x) \in W_2^1(0,l) \cap W_2^2(0,x_0) \cap W_2^2(x_0,l)$, удовлетворяющей краевым условиям (3) и условиям сопряжения (4)-(5), и любой $f(x,t) \in L_2(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение $u(x,t) \in W_2^{2,1}(\Omega)$ задачи (1)-(5). Это решение является сильным решением задачи (1)-(5) и удовлетворяет оценке

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega_0)} + \|u\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega_l)} \le C\left\{\|f\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|^2_{W_2^2(0,x_0)} + \|\varphi\|^2_{W_2^2(x_0,l)}\right\}.$$

Далее детально изучим некоторые частные случаи.

1) $$Ly = \begin{Bmatrix} -k_1^2 Y''(x), & 0 < x < x_0 \\ -k_2^2 Y''(x), & x_0 < x < l \end{Bmatrix} = \lambda Y(x), \tag{12}$$

$$\begin{cases} k_1 Y'(0) + k_2 Y'(l) = 0, \\ Y(0) + Y(l) = 0, \end{cases} \tag{13}$$

$$Y(x_0 - 0) = Y(x_0 + 0), \quad k_1 Y'(x_0 - 0) = k_2 Y'(x_0 + 0), \tag{14}$$

В этом случае собственные значения и собственные функции будут равны

$$\lambda_n = \left((2n+1)\pi r\right)^2, \quad Y_n(x) = C\begin{cases} \sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi r x}{k_1}\right), & 0 < x < x_0, \\ \sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi r (l-x)}{k_2}\right), & x_0 < x < l, \end{cases}$$

$$r = \frac{k_1 k_2}{k_2 x_0 + k_1 (l - x_0)}$$

Известно, что задача (12)-(14) несамосопряженная. Сопряженная задача имеет вид:

$$Lz = \begin{Bmatrix} -k_1^2 Z''(x), & 0 < x < x_0 \\ -k_2^2 Z''(x), & x_0 < x < l \end{Bmatrix} = \lambda Z(x),$$

$$\begin{cases} k_1^2 Z'(0) + k_2^2 Z'(l) = 0, \\ k_1 Z(0) + k_2 Z(l) = 0, \end{cases}$$

$$k_1 Z(x_0 - 0) = k_2 Z(x_0 + 0), \quad k_1^2 Z'(x_0 - 0) = k_2^2 Z'(x_0 + 0),$$

В этом случае собственные значения и собственные функции будут равны

$$\lambda_n = \left((2n+1)\pi r\right)^2, \quad Z_n(x) = C\begin{cases} \dfrac{1}{k_1}\sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi rx}{k_1}\right), & 0 < x < x_0, \\ \dfrac{1}{k_2}\sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi r(l-x)}{k_2}\right), & x_0 < x < l, \end{cases}$$

т.е. собственные значения совпадают, а собственные функции отличаются на кусочно-постоянный множитель. Оказывается, следующая задача самосопряженная:

$$Lv = \begin{cases} -k_1^2 v''(x), & 0 < x < x_0 \\ -k_2^2 v''(x), & x_0 < x < l \end{cases} = \lambda v(x), \tag{15}$$

$$\begin{cases} k_1^{\frac{3}{2}} v'(0) + k_2^{\frac{3}{2}} v'(l) = 0, \\ \sqrt{k_1}\, v(0) + \sqrt{k_2}\, v(l) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

$$\sqrt{k_1}\, v(x_0 - 0) = \sqrt{k_2}\, v(x_0 + 0), \quad k_1^{\frac{3}{2}} v'(x_0 - 0) = k_2^{\frac{3}{2}} v'(x_0 + 0), \tag{17}$$

В этом случае нетрудно убедиться,что собственные значения и собственные функции будут равны

$$\lambda_n = \left((2n+1)\pi r\right)^2, \quad v_n(x) = C\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{k_1}}\sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi rx}{k_1}\right), & 0 < x < x_0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{k_2}}\sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi r(l-x)}{k_2}\right), & x_0 < x < l, \end{cases} \tag{18}$$

Собственные функции задачи (12)-(14) и (15)-(17) отличаются на кусочно-постоянный множитель. Так как задача (15)-(17) самосопряженная, то собственные функции (18) образует базис Рисса. Тогда по известной теории, собственные функции задачи (12)-(14) также образует базис Рисса.

$$Ly = \begin{cases} -k_1^2 Y''(x), & 0 < x < x_0 \\ -k_2^2 Y''(x), & x_0 < x < l \end{cases} = \lambda Y(x), \tag{19}$$

$$\begin{cases} k_1 Y'(0) - k_2 Y'(l) = 0, \\ Y(0) = 0, \end{cases} \tag{20}$$

$$Y(x_0 - 0) = Y(x_0 + 0), \quad k_1 Y'(x_0 - 0) = k_2 Y'(x_0 + 0), \tag{21}$$

Собственные значения и собственные функции задачи (19)-(21) будут равны

$$\lambda_n = (2n\pi r)^2, \qquad Y_n(x) = C\begin{cases} \sin\left(\dfrac{2n\pi rx}{k_1}\right), & 0 < x < x_0, \\ -\sin\left(\dfrac{2n\pi r(l-x)}{k_2}\right), & x_0 < x < l, \end{cases}$$

Сопряженная задача к задаче (19)-(21) имеет вид:

$$Lz = \begin{Bmatrix} -k_1^2 Z''(x), & 0 < x < x_0 \\ -k_2^2 Z''(x), & x_0 < x < l \end{Bmatrix} = \lambda Z(x), \tag{22}$$

$$\begin{cases} k_1 Z(0) - k_2 Z(l) = 0, \\ Z'(l) = 0, \end{cases} \tag{23}$$

$$k_1 Z(x_0 - 0) = k_2 Z(x_0 + 0), \qquad k_1^2 Z'(x_0 - 0) = k_2^2 Z'(x_0 + 0), \tag{24}$$

Собственные значения и собственные функции сопряженной задачи (22)-(24) будут равны

$$\lambda_n = (2n\pi r)^2, \qquad Z_n(x) = C\begin{cases} \dfrac{1}{k_1}\cos\left(\dfrac{2n\pi rx}{k_1}\right), & 0 < x < x_0, \\ \dfrac{1}{k_2}\cos\left(\dfrac{2n\pi r(l-x)}{k_2}\right), & x_0 < x < l, \end{cases}$$

Итак, собственные значения задачи (19)-(21) и сопряженной задачи (22)-(24) совпадают, но собственные функции разные. Далее, необходимо построить присоединенные функции. Нетрудно доказать, что система собственных и присоединенных функций образует безусловный базис.

2) Далее рассмотрим следующую задачу

$$Ly = \begin{Bmatrix} -k_1^2 Y''(x), & 0 < x < x_0 \\ -k_2^2 Y''(x), & x_0 < x < l \end{Bmatrix} = \lambda Y(x), \tag{25}$$

$$\begin{cases} k_1 Y'(0) + k_2 Y'(l) + \alpha Y(l) = 0, \\ Y(0) = 0, \end{cases} \tag{26}$$

$$Y(x_0 - 0) = Y(x_0 + 0), \qquad k_1 Y'(x_0 - 0) = k_2 Y'(x_0 + 0), \tag{27}$$

Спектральная задача (25)-(27) имеет две серии собственных значений:

$$\lambda_n^{(1)} = \left((2n+1)\pi r\right)^2, \quad (n = 0,1,2,\ldots) \qquad \lambda_n^{(2)} = (2r\mu_n)^2,$$

где μ_n - корни уравнения $ctg\mu = -\dfrac{\alpha}{2r\mu}$, (можно построить график).

Собственные функции имеют вид:

$$Y_n(x) = C\begin{cases} \sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi k_2(x+1)}{k_1+k_2}\right) + \\ + \dfrac{(2n+1)\pi(k_1-k_2)}{a(k_1+k_2)}\cos\left(\dfrac{(2n+1)\pi k_2(x+1)}{k_1+k_2}\right), \quad -1 < x < 0, \\ -\sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi k_1(x-1)}{k_1+k_2}\right) - \\ -\dfrac{(2n+1)\pi(k_1-k_2)}{a(k_1+k_2)}\cos\left(\dfrac{(2n+1)\pi k_1(x-1)}{k_1+k_2}\right), \quad 0 < x < 1, \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что собственные функции удовлетворяют граничным условиям (26) и условиям сопряжения (27).

Используем теорему Руше. Известно, что

$$ctgx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

тогда

$$\mu_n = \frac{\pi}{2} + \pi n + \delta_n, \quad |\delta_n| < \infty.$$

Отсюда

$$ctg\mu_n = -\frac{\alpha}{2r\mu_n} = -\frac{\alpha}{2r\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi n + \delta_n\right)} = -\frac{\alpha}{r\left((2n+1)\pi + 2\delta_n\right)} \to 0,$$

при $n \to \infty$. Значит $\delta_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

$$\lambda_n^{(2)} = (2r\mu_n)^2 = \left((2n+1)\pi + \delta_n\right)^2 r^2,$$

$$\lambda_n^{(1)} = \left((2n+1)\pi r\right)^2,$$

Итак

$$\left|\lambda_n^{(1)} - \lambda_n^{(2)}\right| \le \frac{C}{n} \to 0, \quad при \quad n \to \infty$$ (неусиленно регулярные)

Отсюда можно утверждать, что система собственных функций не образует безусловного базиса.

Список использованных источников

1. Самарский А.А. Параболические уравнения с разрывными коэффициентами //ДАН СССР, 1958, Т.121, №2, -С.225-228.

2. Ким Е.И., Баймуханов Б.Б. О распределении температуры в кусочно-однородной полубесконечной пластинке //ДАН СССР,1961 ,Т. 140, №2, -С.333-336.

3. Камынин Л.И. О решении краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами //ДАН СССР, 1961, Т.139, №5, -С.1048-1051.

4. Камынин Л.И. О решении IV и V краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка в криволинейной области //Журн.вычисл.математики и мат.физики.-1969.-Т.9.-№3.-С.558-572.

5. Камынин Л.И. О методе потенциалов для параболического уравнения с разрывными коэффициентами.//ДАН СССР, 1962, Т.145,№6, -С.1213-1216.

6. Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциямнекоторых дифференциальных операторов.//Известия вузов. Математика – 1964. – №2. – С. 82-93.

7. Михайлов В.П. О базисах Рисса в $L_2(0,1)$. //Доклады АН СССР – 1962. – Т. 144, №5. – С. 981-984.

8. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. часть III, Спектральные операторы. – Нью Йорк. – 1974, 662 с.

9. Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями. //Дифференциальные уравнения, 1979. – Т.15.-№7. -С. 1284–1295.

10. Ионкин Н.И. Решение одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием.//Дифференциальные уравнения, 1977.-Т.13.-№2. -С. 294-304.

11. Ионкин Н.И., Морозова В.А. Двумерное уравнение теплопроводности с нелокальными краевыми условиями. //Дифференциальные уравнения, 2000. – Т.36.-№7. -С. 884–888.

12. Оразов И., Садыбеков М.А. Об одном классе задач определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам //Сибирский математический журнал. – 2012. – Т. 53, №1. – С. 180-186.

13. Оразов И., Садыбеков М.А. Об одной нелокальной задаче определения температуры и плотности источников тепла. //Известия вузов. Математика. – 2012. – №2. – С. 70–75.

14. Sadybekov M.A. Initial-Boundary Value Problem for a Heat Equation with not Strongly Regular Boundary Conditions // Functional Analysis in Interdisciplinary Applications. – Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. – 2017. – Vol. 216. – P. 330–348.

15. Orazov I., Sadybekov M.A. On an inverse problem of mathematical modeling of the extraction process of polydisperse porous materials. – AIP Conference Proceedings. – 2015. – Vol. 1676, 020005. – 4 pp.

16. Orazov I., Sadybekov M.A. One-dimensional Diffusion Problem with not Strengthened Regular Boundary Conditions //AIP Conference Proceedings. – 2015. – Vol. 1690, 040007. – 6pp.

КОЭФФИЦИЕНТІ БӨЛІКТІ-ТҰРАҚТЫ ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУ ҮШІН БІР ЛОКАЛДЫ ЕМЕС ЕСЕП ТУРАЛЫ

У.К. КОЙЛЫШОВ[1,2], М.А. САДЫБЕКОВ[1,2] [0000-0001-8450-8191]

[1] Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан.

[2] Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті., Алматы, Қазақстан.

e-mail: koylyshov@mail.ru

Аңдатпа. Коэффициенттері үзілісті параболалық типті теңдеулерді көптеген авторлар бұрыннан жақсы зерттеген. Бұл еңбектерде есептер потенциалдар әдісімен интегралдық теңдеулерге келтіріліп, коэффициенттері үзілісті параболалық типті теңдеулер үшін әртүрлі бастапқы-шеттік есептердің қисынды шығарылуы дәлелденген. Үзіліссіз жағдайда бұл есептердің спектрлік теориясы толығымен құрылған. Бұл жұмыста жалпы локальды емес жағдайларда жылуөткізгіштік коэффициенті бөлікті- тұрақты жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есептерді айнымалыларды бөлу әдісімен шешу негізделіп, кейбір дербес жағдайлар қарастырылған.

Түйін сөздер: Жылуөткізгіштік теңдеу, үзілісті коэффициенттер, спектрлік теория, локалды емес шарттар, айнымалыларды бөлу әдісі.

ON ONE NONLOCAL PROBLEM FOR THE EQUATION THERMAL CONDUCTIVITY WITH A PIECEWISE CONSTANT COEFFICIENT

U.K. KOLYSHKOV[1,2], M.A. SADYBEKOV[1,2]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.

[2]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.

e-mail: koylyshov@mail.ru

Abstract. Parabolic type equations with discontinuous coefficients have long been well studied by many authors. In these papers, the problems are reduced to integral equations by the method of potentials and the well-posedness of various initial-boundary value problems for equations of parabolic type with discontinuous coefficients is proved. In the case without a discontinuity, the spectral theory of these problems is constructed almost completely. In this paper, we substantiate the solution by the method of separation of variables of initial-boundary value problems for the heat equation with a piecewise constant heat conduction coefficient under general non-local conditions and consider some special cases.

Keywords: Heat equation, discontinuous coefficients, spectral theory, nonlocal conditions, separation of variables method.

УДК 517.956
МРНТИ 27.31.17

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ДРОБНО-НАГРУЖЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

М.Т. КОСМАКОВА[0000-0003-4070-0215]**, Д.М. АХМАНОВА**[0000-0003-1040-2495]**,**
Э.К. ЖУМАГУЛОВА
Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: svetlanamir578@gmail.com, danna.67@mail.ru, elmira09@inbox.ru

Аннотация. В работе рассматривается краевая задача для дробно-нагруженного уравнения теплопроводности в первом квадранте. Нагруженное слагаемое имеет вид дробной производной в смысле Римана-Лиувилля по пространственной переменной, причем порядок производной в нагруженном члене меньше порядка дифференциальной части. Исследование основано на сведении краевой задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Ядро полученного интегрального уравнения содержит специальную функцию — функцию типа Райта. Получены условия разрешимости интегрального уравнения и показано, что существование и единственность решений интегрального уравнения зависит как от порядка дробной производной в нагруженном слагаемом начально-краевой задачи, так и от закона движения нагрузки.

Ключевые слова: дробная производная, нагруженное уравнение теплопроводности, интегральное уравнение, функция типа Райта.

1. Постановка задачи

Важным разделом в теории дифференциальных уравнений являются нагруженные уравнения, в которых нагруженное слагаемое содержит дифференциальный или интегро-дифференциальный оператор, включающий операцию взятия следа от искомой функции на многообразиях из замыкания области определения решения размерности строго меньше ее размерности. Повышенный интерес к изучению таких уравнений можно объяснить, как расширяющимся объемом их приложений [1], так и тем фактом, что нагруженные уравнения – это особый класс уравнений со своими специфическими задачами [2]. Интерес представляют краевые задачи для дробно-нагруженного уравнения теплопроводности, когда нагруженное слагаемое представлено в форме дробной производной. В работах [3] - [4] нагруженное слагаемое - след дробной производной Римана-Лиувилля на линии $x = t$. Возникающее сингулярное интегральное уравнение Вольтерра имеет непустой спектр при определенных значениях порядка дробной производной. В данной статье нагруженное слагаемое - след дробной производной Римана-Лиувилля на линии $x = t^w$, и при оценке ядра интегрального уравнения используется асимптотика функции типа Райта при малых значениях времени в зависимости от закона движения нагрузки. Подобные задачи исследовались в работах [5] – [7].

В области $G=\{(x,t)\,|\,x>0;t>0\}$ найти решение уравнения

$$u_t = u_{xx} + \lambda\left\{ {}_rD_{0,x}^{\beta}u(x,t)\right\}\Big|_{x=\gamma(t)} + f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{t=0}=0;\ u\big|_{x=0}=0. \tag{2}$$

Здесь:

${}_rD_{0,x}^{\beta} f(x)$ - производная в смысле Римана-Лиувилля порядка β, $1<\beta<2$. Тогда для искомой функции $u(x,t)\in L_1(G)$.

$\gamma(t)$ – непрерывная возрастающая функция и $\gamma(0)=0$.

Введем обозначения

$$\mu(t)=\left\{ {}_rD_{0,x}^{\beta}u(x,t)\right\}\Big|_{x=\gamma(t)},\ f_1(x,t)=\int_0^t\int_0^{+\infty} G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{3}$$

Тогда решение задачи (1)-(2) можно представить в виде [8]

$$u(x,t)=-\lambda\int_0^t\int_0^{\infty} G(x,\xi,t-\tau)\mu(\tau)d\xi d\tau + f_1(x,t), \tag{4}$$

где

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\left\{\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right)-\exp\left(-\frac{(x+\xi)_2}{4t}\right)\right\}$$

- функция Грина.

С учетом соотношения

$$\int_0^{\infty} G(x,\xi,t-\tau)d\xi = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right),$$

где $erf(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\xi^2}d\xi$ – интеграл ошибок, из (4) получим

$$u(x,t)=-\lambda\int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau + f_1(x,t).$$

Так как [9]

$$e^{-\xi^2}=\sqrt{\pi}\phi\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-2\xi\right),$$

где

$$\phi(\alpha,\beta;z)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{z^{\kappa}}{\kappa!\Gamma(\alpha\kappa+\beta)},\alpha>0,\beta\in C,$$

- функция Райта, то

$$erf(z)=1-\phi\left(-\frac{1}{2};1;-2z\right).$$

Тогда представление (4) перепишем в виде

$$u(x,t)=-\lambda\int_0^t K\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau+f_1(x,t), \tag{5}$$

где

$$K\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)=1-\phi\left(-\frac{1}{2};1;-\frac{x}{\sqrt{t-\tau}}\right) \tag{6}$$

К (5) применим операцию дробного дифференцирования по формуле (3).

Имеем

$${}_rD_{0,x}^{\beta}\left(K\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\right)=x^{-\beta}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}-e_{1,\frac{1}{2}}^{1-\beta,1}\left(-\frac{x}{\sqrt{t-\tau}}\right)\right)=$$

$$=\frac{x^{1-\beta}}{\sqrt{t-\tau}}e_{1,\frac{1}{2}}^{2-\beta,\frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{\sqrt{t-\tau}}\right)=-ze_{1,\frac{1}{2}}^{2-\beta,\frac{1}{2}}(z),\ 1<\beta<2,$$

где

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)\Gamma(\delta-\beta n)},\mu\in C,\delta\in C, \tag{7}$$

- функция типа Райта [9, стр.23]. При вычислении использовали формулу автотрансформации (2.2.3) из [9, стр.24]

Получили интегральное уравнение

$$\mu(t)+\lambda\int_0^t K_\beta(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=f_2(t);\ \ 1<\beta<2, \tag{8}$$

где

$$f_2(t)=\ {}_rD_{0,x}^{\beta}\big(f_1(x,t)\big)\Big|_{x=\gamma(t)},$$

$$K_\beta(t,\tau)=\frac{(\gamma(t))^{1-\beta}}{\sqrt{t-\tau}}e_{1,\frac{1}{2}}^{2-\beta,\frac{1}{2}}\left(-\frac{\gamma(t)}{\sqrt{t-\tau}}\right) \tag{9}$$

Пусть $\gamma(t) \sim t^{\omega}$ при $t \to 0; \omega > 0$.

Рассмотрим случаи.

а) $0 < \omega < \frac{1}{2}$, $\Rightarrow$ $|z| = \left| -\frac{t^{\omega}}{\sqrt{t-\tau}} \right| \underset{t\to 0}{\to} +\infty$; $z = \frac{\gamma(t)}{\sqrt{t-\tau}} \Rightarrow \sqrt{t-\tau} = \frac{\gamma(t)}{z}$

$\Rightarrow$ с учетом формулы (2.2.7) из [9, стр.24] получим

$$K_{\beta}(t,\tau) = -t^{-\omega\beta} z e_{1,\frac{1}{2}}^{2-\beta,\frac{1}{2}}(z) \to \frac{t^{-\omega\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \underset{t\to 0}{\to} \infty,$$

так как $1 < \beta < 2$.

б) $\omega > \frac{1}{2}$, $\Rightarrow$ $z = \frac{t^{\omega}}{\sqrt{t-\tau}} \to 0$ при $t \to 0$. Ряд (7) сходится абсолютно для любого z из C [9, стр.23].

$$\Rightarrow e_{1,\frac{1}{2}}^{2-\beta,\frac{1}{2}}\left(-\frac{t^{\omega}}{\sqrt{t-\tau}}\right) \underset{t\to 0}{\to} \frac{1}{\Gamma(2-\beta)\sqrt{\pi}}.$$

$K_{\beta}(t,\tau) \sim \frac{t^{\omega(1-\beta)}}{\sqrt{t-\tau}}$ при $t \to 0$.

Поскольку $\omega > \frac{1}{2}$ и $1 < \beta < 2$, то интегральный оператор уравнения (8), действующий в классе непрерывных функций, будет ограниченным при $\omega(1-\beta) + 1/2 \geq 0$.

Следовательно, при $1 < \beta < 2$ и $\omega(\beta - 1) \leq 1/2$ интегральное уравнение (8) с ядром (9) однозначно разрешимо.

в) $\omega = \frac{1}{2}$, $\Rightarrow z = \frac{t^{\omega}}{\sqrt{t-\tau}} \to 1$ при $t \to 0$. Ряд (7) сходится абсолютно для любого z из C [9, стр.23]. Поскольку $\omega = \frac{1}{2}$ и $1 < \beta < 2$, то интегральный оператор уравнения (8), действующий в классе непрерывных функций, будет ограниченным.

Следовательно, при $1 < \beta < 2$ и $\omega = \frac{1}{2}$ интегральное уравнение (8) с ядром (9) однозначно разрешимо.

Теорема. Интегральное уравнение (8) с ядром (9) при $1 < \beta < 2$ и $\gamma(t) \sim t^{\omega}$ (в окрестности точки t=0) однозначно разрешимо в классе непрерывных функций для любой непрерывной правой части, если $\omega \geq \frac{1}{2}$.

Список использованной литературы

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. - М.: Высшая школа, 1995. - 205 с.

2. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. - 1983. - Т.19, №1. - С.86-94.

3. Attayev A.Kh., Iskakov S.A., Karshigina G.Zh., Ramazanov M.I. The first boundary problem for heat conduction equation with a load of fractional order. I. // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics. – 2014. – Vol.76, №4. - 11-16.

4. Iskakov S.A., Ramazanov M.I., Ivanov I.A. (2015). The first boundary problem for heat conduction equation with a load of fractional order. II. // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics. – 2015. – Vol.78, №2. – P. 25-30.

5. Kosmakova M.T., Iskakov S.A., Kasymova L.Zh. To solving the fractionally loaded heat equation // Bulletin of the Karaganda University-mathematics. – 2021. – Vol. 1, №101. – P. 65-77.

6. Ramazanov M.I., Kosmakova M.T., Kasymova L.Zh. On a Problem of Heat Equation with Fractional Load // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41, №9. – P. 1873-1885.

7. Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., Kasymova L.Zh. To Solving the Heat Equation with Fractional Load // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42, №12. – P. 2854-2866.

8. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

9. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. – М.: Наука, 2005. – 199 с.

ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІҢ БӨЛШЕКТІ-ЖҮКТЕЛГЕН ШЕТТІК ЕСЕБІНІҢ ШЕШІМДІЛІК ШАРТТАРЫ

М.Т. КОСМАКОВА, Д.М. АХМАНОВА, Э.К. ЖУМАГУЛОВА

Академик Е. А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, Қарағанды, Қазақстан

e-mail: svetlanamir578@gmail.com, danna.67@mail.ru, elmira09@inbox.ru

Аңдатпа. Жұмыста бірінші квадрантта бөлшекті-жүктелген жылуөткізгіштік теңдеуі үшін шеттік есептер қарастырылады. Жүктелген қосылғыш кеңістіктік айнымалыға қатысты Риман-Лиувилль мағынасында бөлшектік туынды, ал жүктелген мүшедегі туындының реті дифференциалдық бөліктің ретінен кіші түрінде берілген. Зерттеу шеттік есепті екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеуіне келтіруге негізделген. Алынған интегралдық теңдеудің өзегі арнайы функцияны - Райт типті функцияны қамтиды. Мақалада интегралдық теңдеудің шешімділік шарттары алынды және интегралдық теңдеудің шешімдерінің бар болуы мен бірегейлігі бастапқы-шеттік есептің жүктелген қосылғышының бөлшек туындысының ретіне де, жүктеме қозғалысының заңына да тәуелді екендігі көрсетілді.

Кілттік сөздер: бөлшек туынды, жылуөткізгіштіктің жүктелген теңдеуі, интегралдық теңдеу, Райт типті функция.

CONDITIONS FOR THE SOLVABILITY OF A FRACTIONAL-LOADED BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THERMAL CONDUCTIVITY

M.T.KOSMAKOVA, D.M. AKHMANOVA, E.K. SHUMAGULOVA
Karaganda University named after Academician E.A. Buketov, Karaganda, Kazakhstan
e-mail: svetlanamir578@gmail.com, danna.67@mail.ru, elmira09@inbox.ru

Abstract. The article considers a boundary value problem for a fractional-loaded heat equation in the first quadrant. The loaded term has the form of a fractional derivative in the sense of Riemann-Liouville in a spatial variable, and the order of the derivative in the loaded term is less than the order of the differential part. The study is based on the reduction of the boundary value problem to the Volterra integral equation of the second kind. The kernel of the resulting integral equation contains a special function — a Wright type function. In the article, the conditions for the solvability of the integral equation are obtained and it is shown that the existence and uniqueness of solutions to the integral equation depends both on the order of the fractional derivative in the loaded term of the initial-boundary value problem and on the law of motion of the load.

Keywords: fractional derivative, loaded heat equation, integral equation, Wright type function.

УДК 517.956
МРНТИ 27.31.17

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА БУССИНЕСКА В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

М.Т. ДЖЕНАЛИЕВ [1], А.С. КАСЫМБЕКОВА [1,2], М.Г. ЕРГАЛИЕВ [1,2]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[2]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

E-mail: muvasharkhan@gmail.com; kasar1337@gmail.com; ergaliev.madi.g@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается начально-граничная задача для одномерного уравнения типа Буссинеска в вырождающейся области, представляющей собой треугольник. Методами теории монотонных операторов и априорных оценок установлены теоремы об их однозначной слабой разрешимости в соболевских классах. Установлена теорема о повышении гладкости слабого решения.

Ключевые слова: Уравнение типа Буссинеска, Вырождающаяся область, Слабое решение.

Введение. Теория уравнений Буссинеска и его модификаций всегда привлекает внимание как математиков, так и прикладников. Уравнение Буссинеска, а также их модификации занимают важное место при описании движения жидкости и газа, в том числе, в теории нестационарной фильтрации в пористых средах [1]–[13]. Дополнительно здесь отметим лишь работы [14]–[19]. В последние годы граничные задачи для этих уравнений активно исследуются, так как они моделируют процессы в пористых средах. Процессы, протекающие в пористых средах, особую важность приобретают для глубокого осмысления и понимания в задачах разведки и эффективной разработки нефтяных и газовых месторождений.

1. Постановка граничной задачи и основной результат. Пусть $\Omega_t = \{0 < x < t\}$, $\partial\Omega_t$ – граница Ω_t, $0 < t < T < \infty$. В области $Q_{xt} = \{x, t | x \in \Omega_t, t \in (0, T)\}$, представляющей собой треугольник, рассматривается граничная задача для уравнения типа Буссинеска

$$\partial_t u - \partial_x(|u|\partial_x u) = f, \{x, t\} \in Q_{xt}, \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$u = 0, \{x,t\} \in \Sigma_{xt} = \partial\Omega_t \times (0,T), \tag{1.2}$$

где $f(x,t)$ – заданная функция.

Можно непосредственно показать, что нелинейный оператор $A_0(v) = -\partial_x(|v|\partial_x v)$ граничной задачи (1.1)–(1.2) обладает следующими свойствами:

$$A_0(v): L_3(\Omega_t) \to L_{3/2}(\Omega_t) - \text{хеминепрерывный оператор}, \tag{1.3}$$

$$\|A_0(v)\|_{L_{3/2}(\Omega_t)} \le c\|v\|^2_{L_3(\Omega_t)}, c > 0, \forall v \in L_3(\Omega_t), \tag{1.4}$$

$$\langle A_0(v), v\rangle \ge \alpha\|v\|^3_{L_3(\Omega_t)}, \alpha > 0, \forall v \in L_3(\Omega_t). \tag{1.5}$$

В работе нами установлены следующие теоремы.

Теорема 1.1 (Основной результат). *Пусть*

$$f \in L_{3/2}((0,T); W^{-1}_{3/2}(\Omega_t)). \tag{1.6}$$

Тогда граничная задача (1.1)–(1.2) имеет единственное решение

$$u \in L_3((0,T); L_3(\Omega_t)) \cap L_\infty((0,T); H^{-1}(\Omega_t)). \tag{1.7}$$

Теорема 1.2 (О гладкости). *Пусть*

$$f \in L_{3/2}((0,T); L_{3/2}(\Omega_t)). \tag{1.8}$$

Тогда решение граничной задачи (1.1)–(1.2) допускает дополнительную гладкость, т.е.

$$u \in L_\infty((0,T); L_2(\Omega_t)), \tag{1.9}$$

$$|u|^{1/2}u \in L_2((0,T); H^1_0(\Omega_t)), \tag{1.10}$$

$$\partial_t u \in L_{3/2}((0,T); W^{-1}_{3/2}(\Omega_t)). \tag{1.11}$$

2. Вспомогательные начально-граничные задачи в трапециях. Для доказательства Теоремы 1.1 сначала мы рассмотрим вспомогательные начально-граничные задачи. Пусть $\Omega_t = \{0 < x < t\}$, $\partial\Omega_t$ – граница Ω_t, $\varepsilon_m < t < T < \infty$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_m > \ldots$, $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. В области $Q^m_{xt} = \{x,t | x \in \Omega_t, t \in (\varepsilon_m, T)\}$, представляющей собой трапецию, рассматривается начально-граничная задача для уравнения типа Буссинеска

$$\partial_t u_m - \partial_x(|u_m|\partial_x u_m) = f_m, \{x,t\} \in Q^m_{xt}, \tag{2.1}$$

с граничными

$$u_m = 0, \{x,t\} \in \Sigma^m_{xt} = \partial\Omega_t \times (\varepsilon_m, T), \tag{2.2}$$

и начальным условиями

$$u_m = 0, x \in \Omega_{\varepsilon_m} = (0, \varepsilon_m), \tag{2.3}$$

где $f_m(x,t)$ – сужение функции $f(x,t)$ (1.6), заданной на треугольнике Q_{xt}, на трапецию Q^m_{xt}.

Ранее, в работах [1–2] нами были установлены следующие теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть*

$$f_m \in L_{3/2}((\varepsilon_m, T); W^{-1}_{3/2}(\Omega_t)). \tag{2.4}$$

Тогда начально-граничная задача (2.1)–(2.3) имеет единственное решение

$$u_m \in L_3((\varepsilon_m, T); L_3(\Omega_t)) \cap L_\infty((\varepsilon_m, T); H^{-1}(\Omega_t)). \tag{2.5}$$

Теорема 2.2. *Пусть*

$$f_m \in L_{3/2}((\varepsilon_m, T); L_{3/2}(\Omega_t)). \tag{2.6}$$

Тогда решение граничной задачи (2.1)–(2.3) допускает дополнительную гладкость, т.е.

$$u_m \in L_\infty((\varepsilon_m, T); L_2(\Omega_t)), \tag{2.7}$$

$$|u_m|^{1/2} u_m \in L_2((\varepsilon_m, T); H_0^1(\Omega_t)), \tag{2.8}$$

$$\partial_t u_m \in L_2((\varepsilon_m, T); W_{3/2}^{-1}(\Omega_t)). \tag{2.9}$$

Отметим, что для цилиндрических областей подобные к теореме 2.2 результаты имеются также в работах [21, 22].

3. Доказательство теоремы 1.1. Существование. Прежде всего, для каждого m и соответствующей заданной функции $f_m(x,t)$ согласно утверждению теоремы 2.1 мы имеем установленным существование единственного решения $u_m(x,t)$ начально-граничной задачи (2.1)–(2.3).

Продолжим функции $u_m(x,t)$, $f_m(x,t)$ с трапеции Q_{xt}^m нулем на весь треугольник Q_{xt} и обозначим их соответственно через $\tilde{u}_m(x,t)$, $\tilde{f}_m(x,t)$. Эти продолженные нулем функции будут удовлетворять уравнению

$$\partial_t \tilde{u}_m - \partial_x(|\tilde{u}_m| \partial_x \tilde{u}_m) = \tilde{f}_m, \{x,t\} \in Q_{xt}, \tag{3.1}$$

с граничными условиями

$$\tilde{u}_m = 0, \{x,t\} \in \Sigma_{xt}. \tag{3.2}$$

Из (3.1) получаем

$$\langle \partial_t \tilde{u}_m(t), v\rangle + a_0(t, \tilde{u}_m(t), v) = \langle \tilde{f}_m(t), v\rangle, \forall v \in H^{-1}(\Omega_t), t \in (0,T), \tag{3.3}$$

где $a_0(t, \tilde{u}_m, v) = \langle A_0(t, \tilde{u}_m), v\rangle$, $A_0(t, \tilde{u}_m) = -\partial_x(|\tilde{u}_m| \partial_x \tilde{u}_m)$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\Omega_t} \varphi[(-d_x^2)^{-1}\psi] dx, \forall \varphi, \psi \in H^{-1}(\Omega_t), t \in (\varepsilon_m, T), \tag{3.4}$$

где $d_x^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \tilde{\psi} = (-d_x^2)^{-1}\psi: -d_x^2 \tilde{\psi} = \psi, \tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}(t) = 0, \forall \psi \in H^{-1}(\Omega_t)$.

Отметим, что близкие к скалярному произведению (3.4) понятия использовались уже в работах [21, 22].

Оператор $A_0(t, \tilde{u}_m)$ обладает свойством монотонности в соответствии со скалярным произведением (3.4). Для решений $\{\tilde{u}_m(t)\}_{m=1}^\infty$ установим равномерные по индексу m априорные оценки. Из (3.1)–(3.4) будем иметь:

$$\frac{1}{2}\|\tilde{u}_m(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega_t)}+\alpha\int_0^t\|\tilde{u}_m(\tau)\|^3_{L_3(\Omega_t)}d\tau\leq$$

$$\leq\int_0^t\left\|\tilde{f}_m(\tau)\right\|_{L_{3/2}(\Omega_t)}\|\tilde{u}_m(\tau)\|_{L_3(\Omega_t)}d\tau\leq$$

$$\leq\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\alpha}}\int_0^t\left\|\tilde{f}_m(\tau)\right\|^{3/2}_{L_{3/2}(\Omega_t)}d\tau+\frac{\alpha}{2}\int_0^t\|\tilde{u}_m(\tau)\|^3_{L_3(\Omega_t)}d\tau\leq$$

$$\leq\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\alpha}}\int_0^T\|f(t)\|^{3/2}_{L_{\frac{3}{2}}(\Omega_t)}dt+\frac{\alpha}{2}\int_0^t\|\tilde{u}_m(\tau)\|^3_{L_3(\Omega_t)}d\tau. \quad (3.5)$$

Отсюда мы получаем

$$\|\tilde{u}_m(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega_t)}+\alpha\int_0^t\|\tilde{u}_m(\tau)\|^3_{L_3(\Omega_t)}d\tau\leq\frac{4}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\alpha}}\|f(t)\|^{3/2}_{L_{\frac{3}{2}}(Q_{xr})}, t\in(0,T]. \quad (3.6)$$

В (3.5) мы воспользовались соотношениями (1.5),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{u}_m(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega_t)}=\langle\tilde{u}'_m(t),\tilde{u}_m(t)\rangle,\ \text{так как}\ \tilde{u}_m(t)\equiv 0\ \text{на}\ \Sigma_{xt},$$

$$\left\|\tilde{f}_m(t)\right\|_{L_{3/2}(\Omega_t)}\leq\|f(t)\|_{L_{3/2}(\Omega_t)},$$

а также неравенством Юнга ($p^{-1}+q^{-1}=1$):

$$|DE|=\left|\left(d^{1/p}D\right)\left(d^{1/q}\frac{E}{d}\right)\right|\leq\frac{d}{p}|D|^p+\frac{d}{qd^q}|E|^q,$$

где

$$D=\|w_m(t)\|_{L_{3/2}(\Omega)},\ \ E=\|w_m(t)\|_{L_3(\Omega)},\ \ d=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\alpha}},\ \ p=\frac{3}{2},\ \ q=3.$$

Наконец, из (3.6) и неравенства (1.4)

$$\left\|A_0(t,\tilde{u}_\mu)\right\|_{L_{3/2}(\Omega_t)}\leq c\left\|\tilde{u}_\mu\right\|^2_{L_3(\Omega_t)}$$

следуют следующие соотношения

$$\tilde{u}_\mu\to u *-\text{слабо в}\ L_\infty((0,T);H^{-1}(\Omega_t)), \quad (3.7)$$

$$\tilde{u}_\mu\to u\ \text{слабо в}\ L_3(Q_{xt}), \quad (3.8)$$

$$\tilde{u}_\mu(T)\to\eta\ \text{слабо в}\ H^{-1}(\Omega_T), \quad (3.9)$$

$$A_0\left(t,\tilde{u}_\mu\right)\to h(t)\ \text{слабо в}\ L_{3/2}((0,T);L_{3/2}(\Omega_t). \quad (3.10)$$

Теперь продолжим функции $\tilde{u}_m(t), A_0(t,\tilde{u}_m(t)),\ldots$, с области Q_{xt} нулем на бесконечную область $\bar{Q}_{xt}$, где

$$\bar{Q}_{xt}=\begin{cases}x=0, & t\leq 0,\\ x\in\Omega_t, & t\in(0,T],\\ x\in\Omega_T, & t>T;\end{cases}$$

и обозначим эти продолжения соответственно через $\bar{\tilde{u}}_m(t),\ \bar{A}_0(t,\bar{\tilde{u}}_m(t)),\ldots$, т.е.

$$\bar{\tilde{u}}_m(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \tilde{u}_m(t) \in H^{-1}(\Omega_t), & t \in (0,T], \\ 0, & t > T; \end{cases} \quad \bar{v}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ v(t) \in H^{-1}(\Omega_t), & t \in (0,T], \\ 0, & t > T. \end{cases} \tag{3.11}$$

В результате, для продолжений (3.11) будем иметь:

$$\langle \bar{\tilde{u}}'_m(t), \bar{v}(t) \rangle + \left\langle \bar{A}_0\big(t, \bar{\tilde{u}}_m(t)\big), \bar{v}(t) \right\rangle =$$
$$= \langle \bar{\tilde{f}}_m(t), \bar{v}(t) \rangle - \langle \tilde{u}_m(T), \bar{v}(t) \rangle \delta(t-T), t \in R^1. \tag{3.12}$$

Далее, выбирая из $\{\bar{\tilde{u}}_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ слабо сходящуюся подпоследовательность $\{\bar{\tilde{u}}_\mu(t)\}_{\mu=1}^{\infty}$ и переходя к пределу при $\mu \to \infty$, имеем

$$\langle \bar{u}'(t), \bar{v}(t) \rangle + \langle \bar{h}(t), \bar{v}(t) \rangle = \langle \bar{f}(t), \bar{v}(t) \rangle - \langle \eta, \bar{v}(t) \rangle \delta(t-T), t \in R^1,$$

где $\bar{u}(t)$, $\bar{h}(t)$ и $\bar{f}(t)$ – продолжения функций $u(t)$ (3.7), $h(t)$ (3.10) и $f(t)$ на R^1, т.е., отсюда получаем

$$\bar{u}'(t) + \bar{h}(t) = \bar{f}(t) - \eta\delta(t-T), t \in R^1. \tag{3.13}$$

Теперь, сужая равенство (3.13) на временной интервал $(0,T)$, получаем

$$u'(t) + h(t) = f(t), \ t \in (0,T), \tag{3.14}$$

$$u'(t) \in L_{3/2}((0,T); L_{3/2}(\Omega_t)). \tag{3.15}$$

Далее, с одной стороны, из условия монотонности оператора $A_0(t,v)$ (см. ниже Лемму 4.1) будем иметь

$$Y_\mu \equiv \int_0^T \left\langle A_0\left(t, \tilde{u}_\mu(t)\right) - A_0\big(t, v(t)\big), \tilde{u}_\mu(t) - v(t) \right\rangle dt \geq 0$$
$$\forall v \in L_3\big((0,T); L_3(\Omega_t)\big), \tag{3.16}$$

с другой стороны, из (3.3) получаем

$$\int_0^T \left\langle A_0\left(t, \tilde{u}_\mu(t)\right), \tilde{u}_\mu(t) \right\rangle dt =$$
$$= \int_0^T \langle \tilde{f}_\mu(t)), \tilde{u}_\mu(t) \rangle dt - \frac{1}{2} \left\| \tilde{u}_\mu(T) \right\|^2_{H^{-1}(\Omega_T)}. \tag{3.17}$$

Таким образом, из соотношений (3.16)–(3.17) следует, что

$$Y_\mu \equiv \int_0^T \langle \tilde{f}_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t) \rangle dt - \frac{1}{2} \left\| \tilde{u}_\mu(T) \right\|^2_{H^{-1}(\Omega_T)} - \int_0^T \langle A_0(t, \tilde{u}_\mu(t)), v(t) \rangle dt -$$
$$- \int_0^T \left\langle A_0\big(t, v(t)\big), \tilde{u}_\mu(t) - v(t) \right\rangle dt \quad \forall v \in L_3\big((0,T); L_3(\Omega_t)\big). \tag{3.18}$$

Теперь, используя свойство слабой снизу полунепрерывности нормы в банаховом пространстве

$$\liminf \left\| \tilde{u}_\mu(T) \right\|^2_{H^{-1}(\Omega_T)} \geq \| \tilde{u}(T) \|^2_{H^{-1}(\Omega_T)},$$

имеем

$$0 \leq \limsup\ Y_\mu \leq \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt - \frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{H^{-1}(\Omega_T)} - \int_0^T \langle h(t), v(t)\rangle dt -$$

$$- \int_0^T \big\langle A_0\big(t, v(t)\big), u(t) - v(t)\big\rangle dt \quad \forall v \in L_3\big((0,T); L_3(\Omega_t)\big). \qquad (3.19)$$

В свою очередь, из (3.14) мы получаем

$$\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt = \int_0^T \langle h(t), u(t)\rangle dt + \frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{H^{-1}(\Omega_T)}. \qquad (3.20)$$

Подставляя выражение для $\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt$ из (3.20) в неравенство (3.19), устанавливаем следующее неравенство

$$\int_0^T \big\langle h(t) - A_0\big(t, v(t)\big), u(t) - v(t)\big\rangle dt \geq 0$$

$$\forall v(t) \in L_3\big((0,T); L_3(\Omega_t)\big). \qquad (3.21)$$

Теперь для завершения доказательства теоремы 1.1, т.е. существования решения граничной задачи (1.1)–(1.2), нашей целью является: показать справедливость следующего равенства

$$h(t) = A_0(u(t)). \qquad (3.22)$$

Используем свойство хеминепрерывности оператора $A_0(t, v)$ (1.3). Подставляя в (3.21) вместо $v(t) = u(t) - \lambda w(t),\ \lambda > 0,\ w \in L_3(Q_{xt})$, получаем

$$\int_0^T \langle h(t) - A_0(t, u(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle dt \geq 0 \quad \forall w(t) \in L_3(Q_{xt}).$$

Отсюда, устремляя $\lambda \to 0+$, получаем требуемое равенство (3.22). Часть существования решения в теореме 1.1 доказана.

4. Доказательство теоремы 1.1. Единственность. Покажем, что оператор $A_0(t, u)$ в задаче (1.1)–(1.2) будет обладать свойством монотонности, если ввести соответствующим образом скалярное произведение. Для этой цели возьмем в качестве скалярного произведения

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \int_{\Omega_t} \varphi[(-d_x^2)^{-1}\psi] dy, \forall \varphi, \psi \in H^{-1}(\Omega_t), \forall t \in (0,T), \qquad (4.1)$$

где $d_x^2 = \frac{d^2}{dx^2},\ \tilde{\psi} = (-d_x^2)^{-1}\psi\colon -d_x^2\tilde{\psi} = \psi,\ \widetilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}(t) = 0,\ \forall \psi \in H^{-1}(\Omega_t),\ \forall t \in (0,T).$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4.1. *Оператор $A_0(t, u)$ является монотонным в смысле скалярного произведения* (4.1) *в пространстве $H^{-1}(\Omega_t)$, т.е. справедливы неравенства:*

$$\langle A_0(t, u_1) - A_0(t, u_2), u_1 - u_2\rangle \geq 0,\ \forall u_1, u_2 \in \mathcal{D}(\Omega_t),\ \forall t \in (0,T). \qquad (4.2)$$

К доказательству Леммы 4.1. Для каждого $t \in (0,T)$ оператор $A_0(t,u) = -\partial_x(|u|\partial_x u)$ является монотонным и условие (4.2) выполнено (согласно [20], гл. 2, п. 3.1). Действительно, с одной стороны, имеем

$$\langle A_0(t,\varphi) - A_0(t,\psi), \varphi - \psi\rangle = \frac{1}{2}\int_{\Omega_t}(-d_x^2)(|\varphi|\varphi - |\psi|\psi)(-d_x^2)^{-1}(\varphi-\psi)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_t}(|\varphi|\varphi - |\psi|\psi)(\varphi - \psi)dx,\ \ \forall\varphi,\psi \in \mathcal{D}(\Omega_t),\ \ \forall t \in (t_0, T).$$

С другой стороны, из условия выпуклости функционала

$$J(t,\varphi) = \frac{1}{3}\int_{\Omega_t}\varphi|(x)|^3 dx,\ \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_t),\ \ \forall t \in (0,T),$$

следует

$$\langle J'(t,\varphi) - J'(t,\psi), \varphi - \psi\rangle \geq 0,\ \ \forall\varphi,\psi \in \mathcal{D}(\Omega_t),\ \ \forall t \in (0,T).$$

Таким образом, получаем

$$\int_{\Omega_t}(|\varphi|\varphi - |\psi|\psi)(\varphi - \psi)dx \geq 0,\ \ \forall\varphi,\psi \in \mathcal{D}(\Omega_t),\ \ \forall t \in (0,T),$$

т.е. неравенство (4.2) установлено. Лемма 4.1 доказана.

Теперь мы готовы показать единственность решения в задаче (1.1)–(1.2). Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ есть два решения задачи (1.1)–(1.2). Тогда их разность $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$ удовлетворяет однородной задаче:

$$u'(t) + A_0(t, u_1(t)) - A_0(t, u_2(t)) = 0,$$

$$\langle u'(t), u(t)\rangle + \langle (A_0(t,u_1(t)) - A_0(t,u_2(t)), u_1(t) - u_2(t)\rangle = 0$$

и, благодаря свойству монотонности оператора $A_0(t,u)$, имеем:

$$\langle u'(t), u(t)\rangle = \frac{d}{2dt}\|u(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega_t)} \leq 0, \text{т.е.} u(t) \equiv 0.$$

Единственность решения задачи (1.1)–(1.2) доказана.

Это завершает доказательство Теоремы 1.1.

5. Доказательство теоремы 1.2. Нам достаточно показать существование решения, а единственность следует из теоремы 1.1.

Прежде всего, для каждого m и соответствующей заданной функции $f_m(x,t)$ согласно утверждению теоремы 2.2 мы имеем установленным существование более гладкого (чем в теореме 2.1) единственного решения $u_m(x,t)$ начально-граничной задачи (2.1)–(2.3) для соотвествующей трапеции Q_{xt}^m. Продолжим функции $u_m(x,t), f_m(x,t)$ с трапеции Q_{xt}^m нулем на весь треугольник Q_{xt} и обозначим их соответственно через $\tilde{u}_m(x,t), \tilde{f}_m(x,t)$. Эти продолженные нулем функции будут удовлетворять уравнению

$$\partial_t \tilde{u}_m - \partial_x(|\tilde{u}_m|\partial_x \tilde{u}_m) = \tilde{f}_m, \{x,t\} \in Q_{xt}, \tag{5.1}$$

с граничными условиями

$$\tilde{u}_m = 0, \{x,t\} \in \Sigma_{xt}. \tag{5.2}$$

Из (5.1) получаем

$$\langle \partial_t \tilde{u}_m(t), v\rangle + a_0(t, \tilde{u}_m(t), v) = \langle \tilde{f}_m(t), v\rangle, \forall v \in H^{-1}(\Omega_t), t \in (0,T), \tag{5.3}$$

где $a_0(t, \tilde{u}_m, v) = \langle A_0(t, \tilde{u}_m), v\rangle$, $A_0(t, \tilde{u}_m) = -\partial_x(|\tilde{u}_m|\partial_x \tilde{u}_m)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \int_{\Omega_t} \varphi[(-d_x^2)^{-1}\psi]dx, \quad \forall \varphi, \psi \in H^{-1}(\Omega_t), \ \ t \in (\varepsilon_m, T),$$

где $d_x^2 = \frac{d^2}{dx^2}$, $\tilde{\psi} = (-d_x^2)^{-1}\psi$: $-d_x^2\tilde{\psi} = \psi$, $\tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}(t) = 0$, $\forall \psi \in H^{-1}(\Omega_t)$.

Перепишем уравнение (5.3) в виде

$$(\partial_t \tilde{u}_m(t), (-\partial_x^2)^{-1}v) + \frac{1}{2}(|\tilde{u}_m(t)|\tilde{u}_m(t), v) = \left(\tilde{f}_m(t), (-\partial_x^2)^{-1}v\right),$$
$$\forall v \in H^1_{0,\Delta}(\Omega_t), \ \ t \in (0,T),$$

где $H^1_{0,\Delta}(\Omega_t) = \{\varphi | \varphi, \partial_x^2\varphi \in H_0^1(\Omega_t)\}$, или

$$(\partial_t \tilde{u}_m(t), \tilde{v}) + \frac{1}{2}(|\tilde{u}_m(t)|\tilde{u}_m(t), v) = \left(\tilde{f}_m(t), \tilde{v}\right),$$
$$\forall \tilde{v} = (-\partial_x^2)^{-1}v \in H_0^1(\Omega_t), \ t \in (0,T), \tag{5.4}$$

Далее, из (5.4) получаем следующее равенство

$$\langle \partial_t \tilde{u}_m(t), \tilde{u}_m(t)\rangle + \tfrac{1}{2}\left(|\tilde{u}_m(t)|\tilde{u}_m(t), -\partial_x^2\tilde{u}_m(t)\right) = \left\langle \tilde{f}_m(t), \tilde{u}_m(t)\right\rangle, t \in (0,T). \tag{5.5}$$

а из (5.5), следовательно, будем иметь

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{u}_m(t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \frac{4}{9}\int_{\Omega_t}\left[\partial_x\left(|\tilde{u}_m(t)|^{\frac{1}{2}}\tilde{u}_m(t)\right)\right]^2 dx =$$
$$= \left\langle \tilde{f}_m(t), \tilde{u}_m(t)\right\rangle, \ \ t \in (0,T),$$

или же

$$\frac{1}{2}\|\tilde{u}_m(t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \frac{4}{9}\int_0^t\int_{\Omega_\tau}\left[\partial_x\left(|\tilde{u}_m(\tau)|^{\frac{1}{2}}\tilde{u}_m(\tau)\right)\right]^2 dxd\tau =$$
$$= \int_0^t \langle \tilde{f}_m(\tau), \tilde{u}_m(\tau)\rangle d\tau\,, t \in (0,T). \tag{5.6}$$

Здесь использовано следующее равенство

$$-\tfrac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\tilde{u}_m(t)|\tilde{u}_m(t)\partial_x^2\tilde{u}_m(t)dx = \tfrac{4}{9}\int_{\Omega_t}\left[\partial_x\left(|\tilde{u}_m(t)|^{\frac{1}{2}}\tilde{u}_m(t)\right)\right]^2 dx\,, \ \ t \in (0,T). \tag{5.7}$$

Покажем его справедливость. Вначале преобразуем левую часть равенства (5.7). Покажем, что имеет место равенство

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\tilde{u}_m(t)|\tilde{u}_m(t)\partial_x^2\tilde{u}_m(t)dx = \int_{\Omega_t}|\tilde{u}_m(t)|[\partial_x\tilde{u}_m(t)]^2dx. \qquad (5.8)$$

Действительно, имеем:

$$|\tilde{u}_m|\tilde{u}_m = \begin{cases} [\tilde{u}_m]^2, & \text{при } \tilde{u}_m > 0, \\ 0, & \text{при } \tilde{u}_m(t) = 0, \\ -[-\tilde{u}_m]^2, & \text{при } \tilde{u}_m < 0, \end{cases}$$

$$\partial_x(|\tilde{u}_m|\tilde{u}_m) = \begin{cases} 2\tilde{u}_m\partial_x\tilde{u}_m, & \text{при } \tilde{u}_m > 0, \\ 0, & \text{при } \tilde{u}_m(t) = 0, \\ 2[-\tilde{u}_m]\partial_x\tilde{u}_m, & \text{при } \tilde{u}_m < 0. \end{cases}$$

Таким образом, отсюда получаем: $\partial_x(|\tilde{u}_m(t)|\tilde{u}_m(t)) = 2|\tilde{u}_m(t)|\partial_x\tilde{u}_m(t)$, т.е. равенство (5.8).

Аналогичное имеет место и для правой части равенства (5.7). Получаем

$$|\tilde{u}_m|^{\frac{1}{2}}\tilde{u}_m = \begin{cases} [\tilde{u}_m]^{\frac{3}{2}}, & \text{при } \tilde{u}_m > 0, \\ 0, & \text{при } \tilde{u}_m = 0, \\ -[-\tilde{u}_m]^{\frac{3}{2}}, & \text{при } \tilde{u}_m < 0, \end{cases}$$

$$\partial_x\left(|\tilde{u}_m|^{1/2}\tilde{u}_m\right) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}[\tilde{u}_m]^{1/2}\partial_x\tilde{u}_m, & \text{при } \tilde{u}_m > 0, \\ 0, & \text{при } \tilde{u}_m = 0, \\ \dfrac{3}{2}[-\tilde{u}_m]^{1/2}\partial_x\tilde{u}_m, & \text{при } \tilde{u}_m < 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем: $\partial_x\left(|\tilde{u}_m(t)|^{1/2}\tilde{u}_m(t)\right) = \frac{3}{2}|\tilde{u}_m(t)|^{1/2}\partial_x\tilde{u}_m(t)$, т.е. верно равенство:

$$\frac{4}{9}\int_{\Omega_t}\left[\partial_x\left(|\tilde{u}_m(t)|^{1/2}\tilde{u}_m(t)\right)\right]^2dx = \int_{\Omega_t}|\tilde{u}_m(t)|[\partial_x\tilde{u}_m(t)]^2dx.$$

Так как из теоремы 2.1 мы имеем, что функции $\tilde{u}_m(t)$ ограничены в $L_3(Q_{xt})$, поэтому правая часть (5.6) ограничена при выполнении условия (1.6) теоремы 1.1. Отсюда из (5.6) выводим, что

$$\tilde{u}_m \text{ ограничены в } L_\infty((0,T);L_2(\Omega_t)), \qquad (5.9)$$

$$\partial_x(|\tilde{u}_m|\tilde{u}_m) \text{ ограничены в } L_2(Q_{xt}), \text{ т.е. } |\tilde{u}_m|^{1/2}\tilde{u}_m \in L_2((0,T);H_0^1(\Omega_t)). \qquad (5.10)$$

Из соотношений (5.9)–(5.10), уравнения (5.1) и условий (1.4), (2.6) устанавливаем оценку для производной по времени t

$$\partial_t\tilde{u}_m \text{ ограничены в } L_{3/2}((0,T);W_{3/2}^{-1}(\Omega_t)). \qquad (5.11)$$

Следовательно, мы можем записать

$$\tilde{u}_m \to u \text{ слабо в } L_\infty((0,T);L_2(\Omega_t)), \qquad (5.12)$$

$$|\tilde{u}_m|^{\frac{1}{2}}\tilde{u}_m \to \chi \text{ слабо в } L_2((0,T);H_0^1(\Omega_t)). \qquad (5.13)$$

Таким образом, на основе соотношений (5.11)–(5.13) устанавливаем

$$\tilde{u}_m \to u \text{ сильно в } L_3\big((0,T); L_3(\Omega_t)\big) \text{ и почти всюду,}$$

и, далее, используя (5.10) и применяя Теорему 12.1 и Предложение 12.1 из ([20], гл.1, п.12.2), а также Лемму 1.3 из ([20], гл.1, п.1.4), в результате имеем

$$|\tilde{u}_m|^{\frac{1}{2}}\tilde{u}_m \to |u|^{\frac{1}{2}}u \text{ слабо в } L_2((0,T); H_0^1(\Omega_t)), \text{ т.е. } \chi = |u|^{1/2}u. \tag{5.14}$$

Лемма 1.3 ([20], гл.1, п.1.4). *Пусть $\mathcal{O}$ – ограниченная область в $R_x^n \times R_t^1$, g_μ и g – такие функции из $L_q(\mathcal{O}), 1 < q < \infty$, что*

$$\|g_\mu\|_{L_q(\mathcal{O})} \le C, \;\; g_\mu \to g \text{ п.в. в } \mathcal{O}.$$

Тогда $g_\mu \to g$ слабо в $L_q(\mathcal{O})$.

Из (5.11), (5.13) и (5.14) получаем требуемые утверждения (1.9)–(1.11). Теорема 1.2 полностью доказана.

Заключение. В работе изучены начально-граничные задачи для одномерного уравнения типа Буссинеска в области, представляющей собой треугольник. Методами теории монотонных операторов и априорных оценок доказаны теоремы об их однозначной слабой разрешимости в соболевских классах, а также теоремы о повышении гладкости слабого решения.

Благодарности. Это исследование финансировано Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Грант № AP09258892, 2021–2023гг.).

Список использованной литературы

1. Дженалиев М.Т., Касымбекова А.С., Ергалиев М.Г. О начально-граничных задачах для уравнения типа Буссинеска // Традиц. Междунар. апр. матем. конф. в честь дня работн. науки РК. Тезисы докладов. – Алматы: Изд. ИМММ. – 2022. – С. 76–77.

2. Jenaliyev M.T., Kasymbekova A.S., Yergaliyev M.G., Assetov A.A. An Initial Boundary Value Problem for the Boussinesq Equation in a Trapezoid // Bulletin of the Karaganda University – Mathematics. – 2022. – 106: 2. – 11p.

3. McKean H.P. Boussinesq's Equation on the Circle // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1981. – Vol. XXXIV. – P.599–691.

4. Yan Z. Y., Xie F.D., Zhang H.Q. Symmetry Reductions, Integrability and Solitary Wave Solutions to Higher-Order Modified Boussinesq Equations with Damping Term // Communications in Theoretical Physics. – 2001. – Vol. 36, No.1. –P.1–6.

5. Baklanovskaya V.F., Gaipova A.N. On a two-dimensional problem of nonlinear filtration // Zh. vychisl. math. i math. phiz. – 1966. – Vol. 6, Supplement No. 4. – P. 237–241 (in Russian).

6. Vazquez J.L. The Porous Medium Equation. Mathematical Theory. – Oxford: Oxford University Press, 2007. – XXII+625p.

7. Polubarinova-Kochina P.Ya. On a nonlinear differential equation encountered in the theory of infiltration // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1948. – 63(6). P. 623–627.

8. Polubarinova-Kochina P.Ya. Theory of Groundwater Movement. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1962.

9. Zel'dovich Ya.B., Kompaneets A.S. Towards a theory of heat conduction with thermal conductivity depending on the temperature // In Collection of Papers Dedicated to 70th Anniversary of A. F. Ioffe. – Moscow: Izd. Akad. Nauk SSSR, 1950. – P. 61–72.

10. Zel'dovich Ya.B., Barenblatt G.I. On the dipole-type solution in the problems of a polytropic gas flow in porous medium // Appl. Math. Mech. – 1957. – 21(5). P. 718–720.

11. Zel'dovich Ya.B., Barenblatt G.I. The asymptotic properties of self-modelling solutions of the nonstationary gas filtration equations // Sov. Phys. Doklady. – 1958. – 3. – P. 44–47 [Russian, Akad. Nauk SSSR, Doklady, 118, 671–674].

12. Showalter R.E. Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations. – Providence : Amer. Math. Soc., 1997. XIII+270=283p.

13. Vainberg M.M. Variational Method and Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations. – New York: Wiley, 1973.

14. Zhong X. Strong solutions to the nonhomogeneous Boussinesq equations for magnetohydrodynamics convection without thermal diffusion // Electronic Journal of Qualitative Theory Differential Equations. – 2020. – No.24. – P. 1–23.

15. Zhang H., Hu Q., Liu G. Global existence, asymptotic stability and blow-up of solutions for the generalized Boussinesq equation with nonlinear boundary condition // Mathematische Nachrichten. – 2020. – 293: 2. – P. 386–404.

16. Oruc G., Muslu G.M. Existence and uniqueness of solutions to initial boundary value problem for the higher order Boussinesq equation // Nonlinear Analysis – Real World Applications. – 2019. – 47. – P. 436–445.

17. Ding W., Wang Zh.-A. Global existence and asymptotic behavier of the Boussinesq-Burgers system // Journal of Mathematical Analysis and Applications. –2015. – 424: 1. – P. 584–597.

18. Zhu N., Liu Zh., Zhao K. On the Boussinesq-Burgers equations driven by dynamic boundary conditions // Journal of Differential Equations. – 2018. – 264: 3. – P. 2287–2309.

19. Crank J. Free and Moving Boundary Problems. – Oxford: Oxford University Press, 1984.

20. Lions J.-L. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires. – Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1969.

21. Дубинский Ю.А. Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях // Матем. сб. – 1965. – 67(109), № 4. – С. 609–642.

22. Raviart P.A. Sur la resolution et l'approximation de certaines equations paraboliques non lineaires degenerees // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1967. – 25. – P. 64–80.

ҮШБҰРЫШТАҒЫ БУССИНЕСК ТИПТІ ТЕҢДЕУ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕП

М.Т. ДЖЕНАЛИЕВ [1], А.С. КАСЫМБЕКОВА [1,2], М.Г. ЕРГАЛИЕВ [1,2]

[1]Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

[2] Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

E-mail: muvasharkhan@gmail.com; kasar1337@gmail.com; ergaliev.madi.g@gmail.com

Аңдатпа. Жұмыста үшбұрыш болып табылатын деградациялық аймақтағы Буссинеск типінің бірөлшемді теңдеуі үшін бастапқы-шекаралық есеп қарастырылады. Монотонды операторлар теориясы мен априорлық бағалау әдістерімен Соболев сыныптарында олардың бір мәнді әлсіз ажыратымдылығы туралы теоремалар анықталды. Әлсіз шешімнің тегістігін арттыру туралы теорема құрылды.

Түйін сөздер: Буссинеск типті теңдеу, деградациялық аймақ, әлсіз шешім.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A BOUSSINESQ-TYPE EQUATION IN A TRIANGLE

M.T. GENALIEV [1], A.S. KASYMBEKOVA [1,2], M.G. ERGALIEV [1,2]

[1] Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

[2] Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

E-mail: muvasharkhan@gmail.com; kasar1337@gmail.com; ergaliev.madi.g@gmail.com

Annotation. The paper considers an initial boundary value problem for a one-dimensional Boussinesq-type equation in a degenerate region representing a triangle. Using the methods of the theory of monotone operators and a priori estimates, theorems on their unambiguous weak solvability in Sobolev classes are established. A theorem on increasing the smoothness of a weak solution is established.

Keywords: Boussinesq type equation, Degenerate domain, Weak solution.

УДК 517.95
МРНТИ 27.35.45

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КОНУСЕ

Н.К. ГУЛЬМАНОВ[1], М.Т. ДЖЕНАЛИЕВ[2], М.И. РАМАЗАНОВ[1]

[1]Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

[2]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

e-mail: gulmanov.nurtay@gmail.com; muvasharkhan@gmail.com; ramamur@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается краевая задача теплопроводности в нецилиндрической области, представляющей собой перевернутый конус, то есть в области вырождающейся в точку в начальный момент времени. При этом граничные условия содержат производную по временной переменной, на практике такого рода задачи возникают при наличии условия сосредоточенной теплоемкости. Доказана теорема о разрешимости краевой задачи в весовых пространствах существенно ограниченных функций. Исследованы вопроса разрешимости сингулярного интегрального уравнения Вольтерра второго рода, к которому редуцирована исходная задача. Для решения полученного сингулярного интегрального уравнения Вольтерра применяется метод равносильной регуляризации Карлемана – Векуа.

Ключевые слова: нецилиндрическая область, конус, краевая задача теплопроводности, сингулярное интегральное уравнение Вольтерра, метод регуляризации Карлемана-Векуа.

В большинстве работ область, в которой ищется решение граничной задачи, в начальный момент времени не вырождается в точку. В работах [1-3] при решении такого рода задач применяется методика, заключающаяся в сведении нецилиндрической области к цилиндрической. Имеется целый ряд работ, посвященных численным методам решения таких задач [4-6].

В данной работе рассматривается следующая граничная задача в области $G = \{(r,t): 0 < r < t, t > 0\}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \cdot \frac{1}{r^{2\nu-1}} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2\nu-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0, \tag{1}$$

$$\left.\left(2 \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right|_{r=t} = g(t), \tag{2}$$

$$\left.r^{2\nu-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=0} = q(t), \tag{3}$$

где $0 < \nu < 1$. К этому типу задач в общем случае не применимы методы разделения переменных и интегральных преобразований. Одномерные по пространственной переменной краевые задачи в вырождающихся областях исследованы в работах [7-9]. Методом тепловых потенциалов подобные краевые задачи теплопроводности редуцируются к решению сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода.

Замечание 1. Решением задачи (1)–(3) при $g(t) = 0,\ q(t) = 0$, т.е. решением полной однородной задачи может быть только константа.

Чтобы освободиться от производной по времени в (2) проведем некоторые преобразования. С этой целью введем новую неизвестную функцию:

$$\omega(r,t) = r^{2\nu-1}\frac{\partial u}{\partial r} \tag{4}$$

Тогда согласно формальным преобразованиям с учетом (4), задача (1)-(3) сведется к следующей:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} - a^2\frac{2\nu-1}{r}\frac{\partial \omega}{\partial r}, \tag{5}$$

$$\left.\frac{a^2}{r^{2\nu-1}}\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{2}{a^2}\omega\right)\right|_{r=t} = g(t), \tag{6}$$

$$\omega(r,t)|_{r=0} = q(t). \tag{7}$$

Отметим, что функция

$$G(r,\xi,t-\tau) = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{r^\nu\cdot\xi^{1-\nu}}{t-\tau}\cdot\exp\left[-\frac{r^2+\xi^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\cdot I_\nu\left(\frac{r\xi}{2a^2(t-\tau)}\right)$$

является фундаментальным решением для уравнения (5), ξ – параметр. Здесь и далее $I_\nu(z)$ – модифицированная функция Бесселя порядка ν.

Решение задачи (5)–(7) ищем в виде суммы тепловых потенциалов простого и двойного слоя:

$$\omega(r,t) = \int_0^t G(r,\xi,t-\tau)|_{\xi=\tau}\cdot\varphi(\tau)\,d\tau + \int_0^t \left.\frac{\partial G(r,\xi,t-\tau)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0}\cdot\psi(\tau)\,d\tau. \tag{8}$$

Функция (8) удовлетворяет нашему уравнению (5) для любых плотностей потенциалов $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$. Для их определения мы будем использовать граничные условия (6)–(7). С этой целью дадим другое представление равенства (8):

$$\omega(r,t) = \int_0^t \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{r^\nu\cdot\tau^{1-\nu}}{t-\tau}\cdot\exp\left[-\frac{r^2+\tau^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\cdot I_\nu\left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right)\cdot\varphi(\tau)\,d\tau +$$

$$+\int_0^t \frac{1}{(2a^2)^{\nu+1}}\cdot\frac{1}{2^\nu}\cdot\frac{r^{2\nu}}{(t-\tau)^{\nu+1}}\cdot\frac{1}{\nu\Gamma(\nu)}\cdot\exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\cdot\psi(\tau)\,d\tau, \quad (9).$$

где

$$t^{\frac{1}{2}-\nu} e^{\frac{t}{4a^2}} \varphi(t) \in L_\infty(0,\infty). \tag{10}$$

Потребуем для функция $\omega(r,t)$, определяемой равенством (9), удовлетворения граничных условий (6)–(7), что позволит нам определить функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Тогда получим интегральное уравнение относительно искомой плотности $\varphi(\tau)$:

Запишем уравнение (9) в следующем виде:

$$\varphi(t) + \int\limits_0^t \left[\frac{\tau^{2-\nu}}{t^{2-\nu}} e^{-\frac{t-\tau}{4a^2}}\right] N_1(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau + \int\limits_0^t \left[\frac{\tau^{2-\nu}}{t^{2-\nu}} e^{-\frac{t-\tau}{4a^2}}\right] N_2(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = F(t), \tag{11}$$

где

$$N_1(t,\tau) = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{t^2}{(t-\tau)^2} \cdot \exp\left[-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_{\nu-1,\nu}\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right), \tag{12}$$

$$N_2(t,\tau) = \frac{3}{2a^2} \cdot \frac{t^2}{\tau(t-\tau)} \cdot \exp\left[-\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right] \cdot I_\nu\left(\frac{t\tau}{2a^2(t-\tau)}\right), \tag{13}$$

$$F(t) = 2t^{2\nu-1} \cdot g(t) - 2a^2\tilde{q}(t,t) - 2a^2 \left.\frac{\partial \tilde{q}(r,t)}{\partial r}\right|_{r=t},$$

$$\tilde{q}(r,t) = \frac{1}{(2a^2)^\nu} \cdot \frac{1}{2^\nu} \cdot \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int\limits_0^t \frac{r^{2\nu}}{(t-\tau)^{\nu+1}} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot q(\tau)\,d\tau,$$

$$I_{\nu-1,\nu}(z) = I_{\nu-1}(z) - I_\nu(z)$$

Отметим следующее свойство ядра $N(t,\tau) = N_1(t,\tau) + N_2(t,\tau)$, из которого следует, что интегральное уравнение (11) является сингулярным и к нему нельзя применить метод последовательных приближений.

Замечание 2. Для любого значения $\nu,\ 0 < \nu < 1$

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_0^t N_1(t,\tau)d\tau = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{t\to 0} \int\limits_0^t N_2(t,\tau)d\tau = 0,$$

причем

$$\int\limits_0^t N_1(t,\tau)d\tau = 1, \quad \int\limits_0^t N_2(t,\tau)d\tau = \frac{3}{2a^2} \cdot \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \cdot t, \quad \forall t > 0.$$

Будем искать решение следующего «укороченного» интегрального уравнения:

$$\varphi(t) + \int\limits_0^t N_1(t,\tau) \cdot \varphi(\tau)d\tau = \Phi(t), \tag{14}$$

которое в силу замечания 2 является характеристическим для уравнения (11).

Замечание 3. *Если будет найдено решение уравнения* (14)*, то решение уравнения* (11) *получим методом регуляризации Карлемана-Векуа.*

Произведем замену переменных t, τ и введем новые функции:

$$t = \frac{1}{y}, \qquad \tau = \frac{1}{x}; \qquad \varphi = \varphi\left(\frac{1}{y}\right) = \varphi_1(y), \qquad \Phi(t) = \Phi\left(\frac{1}{y}\right) = \Phi_1(y),$$

тогда уравнение (14) сведется к следующему интегральному уравнению с разностным ядром относительно неизвестной функции $\varphi_1(y)$:

$$\varphi_1(y) + \int_y^\infty M_-(y-x)\cdot\varphi_1(x)dx = \Phi_1(y), \tag{15}$$

где

$$M_-(y-x) = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{(x-y)^2}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2a^2(x-y)}\right]\cdot I_{\nu-1,\nu}\left(\frac{1}{2a^2(x-y)}\right).$$

Применим к обеим частям уравнения (15) преобразование Лапласа. Тогда получим:

$$\widehat{\varphi_1}(p) = \widehat{\Phi_1}(p) - \widehat{R_-^*}(-p)\cdot\widehat{\Phi_1}(p),$$

где

$$\widehat{R_-^*}(-p) = \frac{1 - 2\frac{\sqrt{-p}}{a} I_{\nu-1}\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) K_\nu\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)}{2\frac{\sqrt{-p}}{a} I_{\nu-1}\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) K_\nu\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right)}$$

изображение резольвенты, оригинал которого равен:

$$\widehat{R_-}\left(\frac{\sqrt{-p}}{a}\right) \doteqdot R_-(y) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} A_{\nu,k}\int_0^\infty \xi\exp\left(-\frac{\xi^2}{4y}\right)\cdot e^{-i\alpha_k a^2\xi}\,d\xi. \tag{16}$$

Лемма 1. Для резольвенты $R_-(y)$ (16) справедлива оценка

$$R_-(y) \le C\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}, \quad y > 0.$$

Тогда решение уравнения (15), которое имеет вид

$$\varphi(t) = t\cdot\Phi_2(t) - \int_0^t \tilde{R}(t,\tau)\cdot\Phi_2(\tau)d\tau,$$

где

$$\Phi_2(t) = \frac{1}{t}\cdot\Phi(t) \in L_\infty(0,\infty).$$

$$\tilde{R}(t,\tau) \le C\cdot\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\tau}\cdot\sqrt{t-\tau}}. \tag{17}$$

Справедливость последнего неравенства следует из Леммы 1.

Теорема 1. *Исходное интегральное уравнение* (11) *для любой функции* $t^{\frac{1}{2}-\nu}e^{\frac{t}{4a^2}}\cdot F(t)\in L_\infty(0,\infty)$ *имеет единственное решение в классе функций*

$$t^{\frac{1}{2}-\nu}e^{\frac{t}{4a^2}}\cdot\varphi(t)\in L_\infty(0,\infty), \tag{18}$$

которое может быть найдено методом последовательных приближений.

Доказательство. Для решения исходного «полного» интегрального уравнения (6.6) представим его в виде

$$\varphi(t)+\int_0^t N_1(t,\tau)\cdot\varphi(\tau)d\tau=F(t)-\int_0^t N_2(t,\tau)\cdot\varphi(\tau)\,d\tau$$

и применим метод регуляризации Карлемана-Векуа. Считая правую часть уравнения (11) временно известной, запишем его решение:

$$\varphi(t)+\int_0^t\left[\frac{\tau^{2-\nu}}{t^{2-\nu}}\cdot e^{-\frac{t-\tau}{4a^2}}\right]N_1(t,\tau)\cdot\varphi(\tau)d\tau=$$

$$=F(t)-\int_0^t\left[\frac{\tau^{2-\nu}}{t^{2-\nu}}\cdot e^{-\frac{t-\tau}{4a^2}}\right]N_2(t,\tau)\cdot\varphi(\tau)\,d\tau$$

Считая правую часть уравнения (1.5.6) временно известной, запишем его решение:

$$\varphi(t)=\left(F(t)-\int_0^t\left[\frac{\tau^{2-\nu}}{t^{2-\nu}}\cdot e^{-\frac{t-\tau}{4a^2}}\right]\cdot N_2(t,\tau)\cdot\varphi(\tau)\,d\tau\right)-$$

$$-\int_0^t\left[\frac{\tau^{2-\nu}}{t^{2-\nu}}\cdot e^{-\frac{t-\tau}{4a^2}}\right]\cdot\frac{\tilde{R}(t,\tau)}{\tau}\cdot\left\{F(\tau)-\int_0^\tau\left[\frac{\xi^{2-\nu}}{\tau^{2-\nu}}\cdot e^{-\frac{\tau-\xi}{4a^2}}\right]\cdot N_2(\tau,\xi)\cdot\varphi(\xi)\,d\xi\right\}d\tau. \tag{19}$$

Предварительно введем новую функцию

$$\varphi_2(t)=t^{\frac{1}{2}-\nu}e^{\frac{t}{4a^2}}\cdot\varphi(t),\qquad F_2(t)=t^{\frac{1}{2}-\nu}e^{\frac{t}{4a^2}}\cdot F(t). \tag{20}$$

Тогда (19) примет следующий вид:

$$\varphi_2(t)+\int_0^t\frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{3}{2}}}\cdot N_2(t,\tau)\cdot\varphi_2(\tau)\,d\tau-\int_0^t\frac{\tilde{R}(t,\tau)}{\tau}\cdot\int_0^\tau\frac{\xi^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{3}{2}}}\cdot N_2(\tau,\xi)\cdot\varphi_2(\xi)\,d\xi d\tau=$$

$$=F_2(t)-\int_0^t\frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{3}{2}}}\cdot\tilde{R}(t,\tau)\cdot\frac{F_2(\tau)}{\tau}d\tau. \tag{21}$$

Изменим порядок интегрирования в повторном интеграле и, затем, поменяем ролями переменные τ и ξ:

$$\int_0^t \frac{\tilde{R}(t,\tau)}{\tau} \cdot \int_0^\tau \frac{\xi^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{3}{2}}} \cdot N_2(\tau,\xi) \cdot \varphi_2(\xi)\, d\xi d\tau = \int_0^t \int_\tau^t \tilde{R}(t,\xi) \cdot \frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{N_2(\xi,\tau)}{\xi} \cdot \varphi_2(\tau)\, d\xi d\tau.$$

Тогда уравнение (21) примет вид:

$$\varphi_2(t) + \int_0^t M(t,\tau) \cdot \varphi_2(\tau)\, d\tau = F_2(t) - \int_0^t \frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{3}{2}}} \cdot \tilde{R}(t,\tau) \cdot \frac{F_2(\tau)}{\tau} d\tau. \qquad (22)$$

где

$$M(t,\tau) = \frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{3}{2}}} \cdot N_2(t,\tau) - \frac{\tau^{\frac{3}{2}}}{t^{\frac{3}{2}}} \cdot \int_\tau^t \frac{\tilde{R}(t,\xi)}{\xi} \cdot N_2(\xi,\tau)\, d\xi.$$

Используя (17), получим, что ядро $M(t,\tau)$ интегрального уравнения (22) имеет слабую особенность, так как для него справедлива оценка

$$M(t,\tau) \le D_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} + D_2$$

Это означает, что решение интегрального уравнения (11) можно найти методом последовательных приближений. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если выполнены условия* $t^{\nu-\frac{1}{2}} g(t) \in L_\infty(0,\infty)$, $t^{1-\nu} q(t) \in L_\infty(0,\infty)$, *то граничная задача* (1)-(3) *имеет решение*

$$u(r,t) = \tilde{u}(r,t) + C,\ \tilde{u}(r,t) \in L_\infty(G).$$

Доказательство. Из интегрального представления решения (8) краевой задачи (5)–(7) имеем

$$\omega(r,t) = \sum_{k=1}^{2} \omega_k(r,t),$$

Где $\omega_1(r,t) = r^{2\nu-1} \frac{\partial u_1}{\partial r} =$

$$= \int_0^t \frac{r^\nu \cdot \tau^{1-\nu}}{2a^2(t-\tau)} \exp\left[-\frac{r^2+\tau^2}{4a^2(t-\tau)}\right] I_\nu\left(\frac{r\tau}{2a^2(t-\tau)}\right) \varphi(\tau)\, d\tau;$$

$$\omega_2(r,t) = r^{2\nu-1} \frac{\partial u_2}{\partial r} = \tilde{q}(r,t) =$$

$$= \frac{1}{(2a^2)^\nu} \cdot \frac{1}{2^\nu} \cdot \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \frac{r^{2\nu}}{(t-\tau)^{\nu+1}} \cdot \exp\left[-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \cdot q(\tau)\, d\tau.$$

Учитывая, что (10) получим оценку для первого слагаемого:

$$|\omega_1(r,t)| \le \frac{C_1\sqrt{t} \cdot r^\nu}{2a^2\nu} \cdot \exp\left[-\frac{t}{4a^2}\right]$$

или с учетом (4)

$$u_1(r,t) \leq \frac{C_1\sqrt{t}}{2a^2\nu} \cdot \frac{r^{2-\nu}}{2-\nu} \cdot \exp\left[-\frac{t}{4a^2}\right].$$

Учитывая, что $q(t) \in L_\infty(0,\infty)$, с учетом (4) будем иметь:

$$|u_2(r,t)| \leq \frac{C_2}{(2a^2)^{\nu-1}} \cdot \frac{1}{2^\nu} \cdot \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \frac{t^{1-\nu}}{1-\nu}.$$

Отсюда следует справедливость основного результата – теоремы 2.

Полученные результаты могут быть использованы при решении подобной краевой задачи, когда граница области движется по произвольному закону $r = \alpha(t), \alpha(0) = 0$.

Финансирование

Работа выполнена по грантам Министерства образования и науки Республики Казахстан: AP09259780, 2021-2023, AP09259780, 2021-2023.

Список использованной литературы

1. E.A. Cheblakova, Modeling convection in areas with free borders, Computational Technologies 5(6) (2000), 87-98.

2. A.Kheloufi, B.-K. Sadallah, On the regularity of the heat equation solution in non-cylindrical domains: Two approaches, Applied mathematics and computation 218 (2011), 1623-1633.

3. A. Kheloufi, Existence and uniqueness results for parabolic equations with Robin type boundary conditions in a non-regular domain of $\mathbb{R}^3$, Applied mathematics and computation 220 (2013), 756-769.

4. R. Chapko, B.T. Johansson, V. Vavrychuk, Numerical solution of parabolic Cauchy problems in planar corner domains, Mathematics and computers in simulation 101 (2014), 1-12.

5. Y. Wang, J. Huang, X. Wen, Two-dimensional Euler polynomials solutions of two-dimensional Volterra integral equations of fractional order, Applied numerical mathematics 163 (2021), 77-95.

6. R. Dehbozorgi, K. Nedaiasl, Numerical solution of nonlinear weakly singular Volterra integral equations of the first kind: An hp-version collocation approach, Applied numerical mathematics 161 (2021), 111-135.

7. A.A. Kavokin, A.T. Kulakhmetova, Y.R. Shpadi, Application of Thermal Potentials to the Solution of the Problem of Heat Conduction in a Region Degenerates at the Initial Moment, Filomat 32 (2018), 825-836.

8. M.M. Amangalieva, D.M. Akhmanova, M.T. Dzhenaliev, M.I. Ramazanov, Boundary value problems for a spectrally loaded heat operator with load line approaching the time axis at zero or infinity, Differential Equations 47(2) (2011), 231-243.

9. M.T. Jenaliyev, M.M. Amangaliyeva, M.T. Kosmakova, M.I. Ramazanov, On a Volterra equation of the second kind with 'incompressible' kernel, Advances in Difference Equations 2015 (2015), article number 71.

КОНУСТА ЖЫЛУ ӨТКІЗГІШТІКТІҢ ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕБІН ШЕШУ

Н.К. ГУЛЬМАНОВ[1], М.Т. ДЖЕНАЛИЕВ[2], М.И. РАМАЗАНОВ[1]

[1]Академик Е.А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, Қарағанды, Қазақстан

[2]Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

e-mail: gulmanov.nurtay@gmail.com; muvasharkhan@gmail.com; ramamur@mail.ru

Аңдатпа. Жұмыста конуста, яғни бастапқы уақыт мезетінде нүктеге айналатын цилиндрлік емес облыста жылу өткізгіштіктің шекаралық есебі қарастырылады. Мұндағы шекаралық шарт уақыт бойынша алынған туындыны қамтиды. Практикада мұндай есептер шоғырланған жылу сыйымдылық шартының бар болу жағдайында туындайды. Елеулі шенелген функциялар кеңістігінде қарастырылатын шекаралық есептің шешімділігі туралы теорема дәлелденді. Берілген есеп түрленетін екінші текті Вольтерра сингулярлық интегралдық теңдеудің шешімділігі туралы мәселелер зерттелді. Осы сингулярлық интегралдық теңдеуді шешу үшін Карлеман-Векуаның пара-пар регуляризация әдісі қолданылды.

Түйін сөздер: цилиндрлік емес облыс, конус, жылу өткізгіштіктің шекаралық есебі, Вольтерраның сингулярлық интегралдық теңдеуі, Карлеман-Векуаның регуляризация әдісі.

SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF HEAT CONDUCTION IN A CONE

N.K. GULMANOV[1], M.T. DZHENALIEV[2], M.I. RAMAZANOV[1]

[1]Academician E.A. Boketov atyndagy Karagandy University, Karagandy, Kazakhstan

[2]Mathematics Zhane Mathematical ModelDeu Institutes, Almaty, Kazakhstane-mail:

gulmanov.nurtay@gmail.com; muvasharkhan@gmail.com; ramamur@mail.ru

Annotation. In the paper we consider the boundary value problem of heat conduction in a non-cylindrical domain, which is an inverted cone, i.e. in the domain degenerating into a point at the initial moment of time. In this case, the boundary conditions contain a derivative with respect to the time variable; in practice, problems of this kind arise in the presence of the condition of the concentrated heat capacity. We prove a theorem on the solvability of a boundary value problem in weighted spaces of essentially bounded functions. The issues of solvability of the singular Volterra integral equation of the second kind, to which the original problem is reduced, are studied. We use the Carleman–Vekua method of equivalent regularization to solve the obtained singular Volterra integral equation.

Keywords: noncylindrical domain, cone, boundary value problem of heat conduction, singular Volterra integral equation, Carleman–Vekua regularization method.

УДК 004.41
МРНТИ 50.41.25

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА СИСТЕМ ВИРТУАЛЬНОЙ РЕАЛЬНОСТИ

С.М.САРСИМБАЕВА[1], В.К.УТЕГЕНОВА[1]

[1]Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан

E-mail: sarsi@mail.ru; kasym1973@mail.ru

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы разработки систем виртуальной реальности, дается обзор программного обеспечения для разработки приложений виртуальной реальности. Обзор средств разработки приложений виртуальной реальности сделан на основе концепций построения таких приложений, с указанием задач, решаемых этими приложениями. Продемонстрирована работа по разработке систем виртуальной реальности, показаны основные этапы разработки. Показана структура приложений виртуальной реальности.

Ключевые слова: виртуальная реальность, Unity, Unreal Engine, интерфейс, система виртуальной реальности.

В настоящее время системы виртуальной реальности получают широкое распространение. Если первоначально системы виртуальной реальности применялись лишь в сфере развлечений, то сейчас их применяют в таких сферах как машиностроение, искусство, здравохранение, военная отрасль, образование, торговля, ресторанный бизнес и многих других[1].

Современные технологии виртуальной реальности позволяют пользователям не только погружаться в новую среду, но и с помощью них ввести инновации в компании, в целом в отрасли и получить конкурентное преимущество. Поэтому так важно знание программных и аппаратных средств разработки приложений виртуальной реальности и умение разрабатывать такие приложения.

В ходе проведения исследований по вопросам разработки приложений виртуальной реальности изучались труды Р.Азумы, П.Милгрома, Ф.Кисино, Т.Кодела, А.Кэя, Д.Раскина, И.Сазерленда и других, которые внесли значительный вклад в развитие теории информационных систем, в изучение вопросов человеко-компьютерного взаимодействия, пользовательских интерфейсов и разработки виртуальной реальности.

Цель работы – сделать обзор программных и аппаратных средств виртуальной реальности, используемых в настоящее время для разработки приложений виртуальной реальности и исследовать процесс проектирования и разработки таких приложений.

Для разработки приложения виртуальной реальности необходимо разработать два основных элемента:

- Виртуальный мир, для разработки которого нужно имитировать визуальные элементы и при этом стимулы для левого и правого глаза должны быть различными для достижения объемности изображения;
- И программно реализовать взаимодействие с виртуальным миром. Взаимодействие происходит с помощью устройств, фиксирующих движение человека. Это могут быть компьютерная мышь, виртуальная перчатка, веб камера, улавливающая движения глаз, рук или других частей тела. Также могут использоваться сенсорные устройства для определения, например прикосновений или других взаимодействий.

Разработка VR систем состоит из несколько этапов:

- Выбор платформы. Необходимо решить какими устройствами пользоваться, на какие платформы ориентироваться и какую инструментальную среду избрать для разработки.
- 3D-моделирование для разработки сцен, окружения.
- Разработка интерфейсов для VR приложений.
- Практическая разработка, опыт разработок.

Основу систем «виртуальной реальности» составляет высокопроизводительный компьютер, обладающий достаточным быстродействием и графическими возможностями для формирования цветных изображений с высоким разрешением. Для взаимодействия с «виртуальной реальностью» используются как стандартные устройства типа клавиатур, мышек, веб камер, планшетов, так и специальные, позволяющие вводить не только три координаты, но и задавать вращения вокруг осей, а также специальные перчатки данных, передающие информацию о руке пользователя (положение, ориентация и сгибание пальцев). Также могут использоваться сенсорные устройства для определения, например прикосновений или других взаимодействий.

В качестве средств разработки виртуальной реальности могут быть использованы Unity, Unreal Engine и другие.

Unity - кроссплатформенная инструментальная среда, которая является одной из лучших платформ для разработки приложений виртуальной реальности. Одной из ее больших преимуществ является ее кроссплатформенность, позволяющая, собирать приложения, которые могут работать под более чем 20 операционными системами, такими как Windows, Android, iOS и другие. Эти приложения, можно просмотреть на персональных компьютерах, игровых консолях, мобильных устройствах, интернет-приложениях и других. Unity используется как крупными разработчиками, так и независимыми студиями.

Unreal Engine - платформа нового поколения, которая также широко используется в разработке онлайн-игр. Эта платформа совмещает в себе графический движок, физический движок, искусственный интеллект, управление файловой и сетевой системами. Благодаря использованию C++ возможности практически безграничны в разработке приложений виртуальной реальности для большинства операционных систем и платформ, а также на различных портативных устройствах управляемых системой iOS и другими.

Инструментальными средами для разработки систем виртуальной реальности могут служить CryEngine, Amazon Sumerian, A-Frame, React 360, Primrose, Simbol, Vizor. Все эти движки поддерживают популярные устройства Oculus Rift, HTC Vive.

Классическими приложениями для создания 3D-моделей являются Blender, Maya, 3DMax. Также эти среды позволяют разрабатывать анимации, симуляции, делать рендеринг, риггинг, компоновку и захват движения, редактировать видео. Необходимо умение сканировать, делать панорамное фото и видео. Для создания собственных 3D-моделей необходимо освоить 3D-сканирование. Снятые специальным сканером в реальном мире объекты становятся виртуальной трехмерной моделью. Для этого используют устройства David SLS2, Da Vinci 1.0 AiO, Structure Sense. Начинающие разработчики могут использовать шаблонные 3D-модели: TurboSquid, Free3D, CGTrader, Sketchfab.

Одним из этапов разработки приложений виртуальной реальности является разработка сценариев приложений виртуальной реальности. На этом этапе необходимо придумать миры и среды с возможностью взаимодействия в трех измерениях.

Устройства для приложений виртуальной реальности классифицируются по степени свободы, т.е. по способу перемещения объекта. Существуют два варианта: три степени свободы - 3-DOF и шесть степеней свободы - 6-DOF. Три степени свободы означают, что можно взаимодействовать с виртуальным миром в трех измерениях, в системе координат X, Y, Z, с помощью головного дисплея (HMD), но нельзя двигаться вперед или назад. С шестью степенями свободы двигаться получится во всех шести направлениях.

Среди устройств, работающих с тремя степенями свободы Cardboard Google, Google Daydream, Samsung Gear VR. С шестью степенями свободы работают HTC Vive, Oculus Rift, Oculus Quest. Для каждого устройства используются разные инструментальные средства разработки и языки программирования, у них разные ограничения, но есть и общие черты, такие как:

1. Принципы создания виртуальной реальности;
2. Большинство из них совместимы с контроллерами движений для взаимодействия с виртуальным миром;
3. Устройства 3-DOF используют смартфоны в качестве закрепленных на голове дисплеев;
4. Устройства 6-DOF используют настольные гарнитуры.

На этом этапе нужно выбрать одно или несколько устройств для разработки приложений.

Разработка приложений виртуальной реальности – это сложный процесс, требующий знаний в нескольких отраслях знаний. Процесс их разработки состоит из разработки самого виртуального мира и программной реализации взаимодействия виртуального мира с окружением.

Основными результатами проделанной работы являются: проанализировано современное состояние в сфере исследований виртуальной реальности, определены методологические, алгоритмические и программные средства для разработки приложений виртуальной реальности, разработана структура информационной системы с технологией виртуальной реальности.

Для программной реализации в большинстве случаев используют кроссплатформенную среду Unity, Unreal Engine, а в качестве устройств уже достаточно доступные HTC Vive, Oculus Rift, Oculus Quest.

Научная статья подготовлена в рамках реализации проекта №AP08856402. Источник финансирования – Комитет науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Список использованной литературы

1. Azuma R.T. Teleoperators and Virtual Environments // Precence: Virtual and Augmented reality. - 1997. Vol.6, №4. P.355–385. https://doi.org/10.1162/pres.1997.6.4.355.

2. Milgram P. Taxonomy of Mixed Reality Visual Displays / P. Milgram, A. Kishino // IEICE Transactions on Information and Systems. - 1994. E77-D(12). P. 1321–1329.

3.Sutherland, I.E. The Ultimate Display // Proceedings of the IFIP Congress. - 1965, pp. 506-508.

4. Sutherland I. E. A head-mounted three dimensional display //Proceedings of the December 9-11, 1968, fall joint computer conference, part I. – ACM, 1968. – C. 757- 764.

5. Линовес, Д. Виртуальная реальность в Unity / Джонатан Линовес ; пер. с англ. Р.Н. Рагимова. - Москва: ДМК Пресс, 2016. - 316 с. - ISBN 978-5-97060-234-8. [Электронный ресурс] - URL: https://znanium.com /catalog/product/1028048 (дата обращения: 17.04.2022).

6. Луценко Е.В. Критерии реальности и принцип эквивалентности виртуальной и "истинной" реальности. – Краснодар, 2004. // Научный журнал КубГАУ. 2004. №08. [Электронный ресурс] - URL: https://cyberleninka.ru/article/n/kriterii-realnosti-i-printsip-ekvivalentnosti-virtualnoy-i-istinnoy-realnosti (дата обращения: 13.04.2022).

7. Мироненко М.С., Чертополохов В.А., Белоусова М.Д. Технологии виртуальной реальности и решение задачи разработки универсального интерфейса для исторических 3D-реконструкций. //Историческая информатика. – 2020. – № 4. – С. 192 - 205. https://doi.org/10.7256/2585-7797.2020.4.34671.

ВИРТУАЛДЫ ШЫНАЙЫЛЫҚ ЖҮЙЕЛЕРІН ЖОБАЛАУ ЖӘНЕ ҚҰРУ

С.М.САРСИМБАЕВА[1], В.К.УТЕГЕНОВА[1]

[1] Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

e-mail: sarsi@mail.ru; kasym1973@mail.ru

Аңдатпа. Мақалада виртуалды шынайылық жүйелерін құру мәселелері қарастырылды, виртуалды шынайылық қосымшаларын құруға арналған бағдарламалық жасақтамаларға шолу жасалынды. Виртуалды шынайылық қосымшаларын әзірлеу құралдарына шолу, осы қосымшаларды құру тұжырымдамасы және осы қосымшалар шешетін есептер негізінде жасалынды. Виртуалды шынайылық жүйелерін құру бойынша жұмыс және қурудың негізгі кезеңдері көрсетілді. Виртуалды шынайылық қосымшаларының құрылымы көрсетілді.

Түйін сөздер: виртуалды шынайылық, Unity, Unreal Engine, интерфейс, виртуалды шынайылық жүйесі.

DESIGN AND DEVELOPMENT OF VIRTUAL REALITY SYSTEMS

S.M.SARSIMBAYEVA[1], V.K.UTEGENOVA[1]

[1] K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan

e-mail: sarsi@mail.ru; kasym1973@mail.ru

Abstract. The article deals with the subjects of design of virtual reality systems and gives an overview of the software which develops virtual reality applications. The review of virtual reality application development tools has been implemented based on the concepts of building such kinds of applications, indicating the tasks which are carried out by these applications. The work on the design of virtual reality systems has been demonstrated, the main stages of development has been shown. The structure of virtual reality applications has been pointed out.

Keywords: virtual reality, Unity, Unreal Engine, interface, virtual reality system.

УДК 517.946;517.588
МРНТИ 27.31.17

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПОСТРОЕНИЯ НОРМАЛЬНО-РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ

Ж.Н. ТАСМАМБЕТОВ[1], Ж.К. УБАЕВА[1]

[1]Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан

E-mail: tasmam@rambler.ru; zhanar_ubaeva@mail.ru

Аннотация. Исследована возможности существования нормально-регулярных уравнений вырожденных гипергеометрических систем, полученных путем предельного перехода из системы Лауричелла. Изучены их некоторые свойства. Доказаны связь установленных нормально-регулярных решений вырожденных систем с введенной В.И. Художниковым новой функцией представляющей частное решение изучаемой системы.

Ключевые слова: Нормально-регулярные решения, вырожденная, гипергеометрическая, система, функция, построения.

1. Введение. Французский математик П. Аппель определил в 1880 году четыре гипергеометрических ряда $F_1 - F_4$ двух переменных [1]. Лауричелла (1893) обобщил функций Аппеля $F_1 - F_4$ на случай n переменных F_A, F_B, F_C, F_D. Частные случаи рядов Лауичелла встречаются в исследовании по гиперсферическим гармоникам [2, с.236].

В данной работе нас интересует вырожденные функций многих переменных связанные с функцией Лауричелла $F_{\mathbf{B}}$.

Функция Лауричелла n переменных

$$F_B\left(\begin{matrix}(\alpha_n), & (\beta_n)\\ \gamma & \end{matrix}\middle|(z_n)\right) = \sum_{m_1,\dots m_n} \frac{(\alpha_1)_{m_1}\dots(\alpha_n)_{m_j}(\beta_1)_{m_1}\dots(\beta_n)_{m_j}\, z_1^{m_1}\dots z_n^{m_n}}{(\gamma)_{m_1+\dots+m_n}\, m_1!m_n!}, \tag{1.1}$$

$|z_k| < 1, k = \overline{1,n}$, является частным решением системы

$$z_i(1-z_i)\frac{\partial^2 w}{\partial z_i^2} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + [\gamma - (\alpha_i + \beta_i + 1)z_i]\frac{\partial w}{\partial z_i} - \alpha_i\beta_i w = 0, i = \overline{1,n}, \tag{1.2}$$

где использованы обозначения $(\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (z_n) = (z_1, z_{2,\dots,} z_n)$.

Вырожденные функции, получающиеся из F_B некоторым числом предельных переходов следуя В.И. Художникову обозначим через $\Phi_{B,n}^{k,l}$, где $0 \le k, l \le n, n-1 \le k+n \le n$, $n-$ число переменных [3,с.836]. Наряду с решением $\Phi_{B,n}^{k,l}$ существуют и нормально-регулярные решения вида [4]:

$$w(z_1, z_{2,...,} z_n) = \exp(\alpha_{1,0,...,0} \cdot z_1 + \alpha_{0,1,...,0} \cdot z_2 + ... + \alpha_{0,...,1} \cdot z_n) \cdot z_1^{\rho_1} \cdot z_2^{\rho_2} \cdot ... \cdot z_n^{\rho_n} \cdot$$
$$\cdot \sum_{m_1,...,m_n=0}^{\infty} A_{m_1,m_2,...,m_n} \cdot z_1^{m_1} \cdot z_2^{m_2} \cdot ... \cdot z_n^{m_n}, A_{0,...,0} \ne 0 \quad (1.3)$$

где $\rho_t\,(t=\overline{1,n}), A_{m_1,m_2,...,m_n}\,(m_1,...,m_n = 0,1,2,...)$, $\alpha_{1,0,...,0}, \alpha_{0,1,0,...,0}, ..., \alpha_{0,...,0,1}-$ неизвестные постоянные.

Целью данной работы является исследования возможности существования новых нормально-регулярных решений вырожденных гипергеометрических систем, полученных из системы Лауричеллы (1.2) путем предельного перехода. Изучение их некоторых свойств и связь с функцией В.И. Художникова $\Phi_{B,n}^{k,l}$, а также особенности В введении приводится краткое сведение о развитии гипергеометрических функции многих переменных, вид нормально-регулярного решения n переменных. Во второй части приводится общий вид вырожденной гипергеометрической системы полученный из системы Лауричелла (F_B) и некоторые гипергеометрические функции двух переменных. В третьей части эти результаты обобщены на случай n переменных.

2. Вырожденные гипергеометрические системы полученные из системы Лауричелла

Постановка задачи. Объектом исследования являются ряд частных случаев вырожденных гипергеометрических систем полученных из обобщенной системы Лауричелла F_B вида

$$z_i(1-z_i)\frac{\partial^2 w}{\partial z_i^2} + \sum_{j=1, j\ne i}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + [\gamma - (\alpha_i + \beta_i + 1) z_i]\frac{\partial w}{\partial z_i} - \alpha_i \beta_i w = 0, i = \overline{1,k}, \quad (2.1_1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + (\gamma - z_i)\frac{\partial w}{\partial z_i} - \alpha'_{i-k} w = 0, i = \overline{k+1, k+l} \quad (2.1_2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + \gamma \frac{\partial w}{\partial z_i} - w = 0, i = \overline{k+l+1, n}, \quad (2.1_3)$$

где уравнения (2.1_2) получено из (1.1) с помощью предельного перехода по параметрам β $n-k$ раз, а уравнение (2.1_3) по параметрам α $n-k-l$ раз. В результате получена система

(2.1), в которой k первых уравнения совпадают с k первыми уравнениями системы (1.1), l следующих уравнений имеют вид (2.1$_2$) и остальные $n-k-l$ уравнений представляется в виде (2.1$_3$). В.И. Художников [3,с.836] совместно изучая систему (2.1) ввёл новую вырожденную функцию

$$\Phi_{B,n}^{k,l}\left(\begin{matrix}(\alpha_k), & (\alpha_l^{'}), & (\beta_k) \\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_n)\right)=\sum_{i_1,\dots,i_n}\frac{\Pi(\alpha_k)_{i_k}\cdot(\beta_k)_{i_k}}{(\gamma)_{\sum i_n}}\cdot\Pi(\alpha_1^{'})_{i_{l+k}}\cdot\Pi\frac{(z_n)^{i_n}}{i_n!}, \tag{2.2}$$

где использованы сокращения и обозначения [3,5] :

$$\Pi(\alpha_n)_{i_n}=\Pi_{k=1}^{n}(\alpha_k)_{i_k},\ \sum i_n=\sum_{k=1}^{n}i^k,\ \sum i_1,\dots,i_n=\sum_{i_1=0}^{\infty}\cdot\sum_{i_2=0}^{\infty}\cdot\dots\cdot\sum_{i_n=0}^{\infty}\cdot(\dots),$$

которая является частным решением системы (2.1). Ряд (2.2) сходиться абсолютно в области $|z_i|<1, i=\overline{1,k}$.

Он изучил некоторые её свойства привёл интегральное представление и рассматривал интегральные уравнения Вольтерра с ядрами, содержащими эту функцию. Однако, до сих пор, остается не исследованными возможности существования нормально-регулярных решений вида (1.3) и их связь с введёнными функциями В.И. Художникова $\Phi_{B,n}^{k,l}$. Такие исследования являются актуальными, поскольку, не исследованными остаются существующие решения вида (1.3) вблизи иррегулярной особенности $(\infty,\infty,\dots,\infty)$.

Определение 2.1. Вырожденные гипергеометрические функции двух переменных

$$\begin{gathered}\mathrm{E}_1(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1;\gamma;x,y)=\Phi_{B,2}^{1,1}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2^{'}, & \beta_1 \\ & \gamma & \end{matrix}\middle|x,y\right),\mathrm{E}_2(\alpha_1,\beta_1;\gamma;x,y)=\Phi_{B,2}^{0,1}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \beta_1 \\ \gamma & \end{matrix}\middle|x,y\right),\\ \Phi_2(\alpha_1,\alpha_2;\gamma;x,y)=\Phi_{B,2}^{0,2}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2^{'} \\ \gamma & \end{matrix}\middle|x,y\right),\Phi_3(\alpha_1;\gamma;x,y)=\Phi_{B,2}^{0,2}\left(\begin{matrix}\alpha_1 \\ \gamma\end{matrix}\middle|x,y\right)\end{gathered} \tag{2.3}$$

полученные из (2.2) называют вырожденными функциями Гумберта [3].

Они получены из функций Аппеля F_3 и хорошо исследованы [1]. Как известно, функция Аппеля F_3 является частным случаем системы Лауричелла (F_B) (1.1). Поэтому, путем предельного перехода из неё будут получены системы решениями которых являются вырожденные гипергеометрические функции двух переменных (2.3). Однако, в различных сочетаниях приведенных в (2.1) трёх уравнений.

3. Свойства нормально регулярных решений вырожденной системы состоящей из n уравнений

Приведенные в предыдущем пункте вырожденные гипергеометрические функции Гумберта двух переменных (2.3) можно обобщить на случай n переменных.

Теорема 3.1. Вырожденная система

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_1 \partial z_2} + (\gamma - z_i)\frac{\partial w}{\partial z_i} - \alpha_i w = 0, (i = \overline{1,n}) \tag{3.1}$$

состоящая из n уравнений полученная путем предельного перехода из системы Лауричелла F_B вблизи регулярной особенности $(0,0,...,0)$ имеет 2^n линейно-независимых частных решений, одним из которых являются вырожденная гипергеометрическая функция от n переменных Гумберта

$$\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\begin{matrix}\alpha_n^{'} \\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right) = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1^{'})_{m_1}...(\alpha_n^{'})_{m_n}}{(\gamma)_{m_1+...+m_n}} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\frac{z_2^{m_2}}{m_2!}. \tag{3.2}$$

Действительно, решение системы (3.1) состоящих из n уравнений ищется в виде ряда от n переменных

$$w(z_1,...,z_n) = z_1^{\rho_1}...z_n^{\rho_n} \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} A_{m_1,...,m_n} z_1^{m_1}...z_n^{m_n}, A_{0,...,0} \neq 0 \tag{3.3}$$

где $\rho_t (t = \overline{1,n}), A_{m_1,...,m_n} (m_1,....,m_n = 0,1,2,...) -$неизвестные постоянные.

Из системы характеристических функции $L_t[z_1^{\rho},...,z_n^{\rho_n}], (t = \overline{1,n})$ определим систему определяющих уравнений относительно особенности $(0,0,...,0)$:

$$f_{0,...,0}^{(t)}(\rho_1,\rho_n) = \rho_t(\rho_t - 1 + \sum_{t=1,i\neq t}^{n} \rho_t + \gamma) = 0, \tag{3.4}$$

$(t = \overline{1,n})$ которая имеет 2^n корней: $(\rho_1 = 0,...\rho_n = 0)$; $(\rho_1 = 1-\gamma,...\rho_2 = 0,...,\rho_n = 0)$, …, $(\rho_1 = 1-\gamma,...\rho_2 = 1-\gamma,...,\rho_n = 1-\gamma)$. Они являются показателями 2^n регулярных решений системы (3.1) в виде ряда (3.3). Неизвестные коэффициенты $A_{m_1,...,m_n} (m_1,...,m_n = 0,1,2,...)$ определяются из последовательностей рекуррентных соотношений. Построенное таким образом решение $w_{n_1}(z_1,...,z_n)$ определяет вырожденную гипергеометрическую функцию n переменных **(**3.3**).**

Нас интересует связь этого решения с нормально-регулярными решениями системы (3.1).

Теорема 3.2. Вспомогательная система полученная из системы (3.1) с помощью преобразования

$$w(z_1,...,z_n) = \exp(\alpha_{\underbrace{1,0,...,0}_{n}} z_1 + ... + \alpha_{\underbrace{0,...,0,1}_{n}} z_n) U(z_1,...,z_n) \tag{3.5}$$

где $\alpha_{1,0,...,0},...,\alpha_{0,...,0,1}$ –неизвестные постоянные, при выполнении двух необходимых условий

$$\alpha^2_{1,0,...,0}-\alpha_{1,0,...,0}=0,...,\alpha^2_{0,...,0,1}-\alpha_{0,0,...,0,1}=0 \quad (3.6)$$

и (3.4) имеют n нормально-регулярных решений.

На самом деле, (3.6) имеет 2^n корней: $(\alpha_{1,0,...,0}=0,\alpha_{0,1,0,...,0}=0,...,\alpha_{0,0,...,0,1}=0)$, $(\alpha_{1,0,...,0}=1,\alpha_{0,1,0,...,0}=0,...,\alpha_{0,...,0,1}=0)$,..., ..., $(\alpha_{1,0,...,0}=0,..,\alpha_{0,0,...,0,1}=0)$, ..., $(\alpha_{1,0,...,0}=1,\alpha_{0,1,0,...,0}=1,...,\alpha_{0,0,...,0,1}=1)$.

Из них, только начальные $n+1$ корней определяют совместные присоединенные системы уравнений. Как и раньше, при $(\alpha_{1,0,...,0}=0,..,\alpha_{0,0,...,0,1}=0)$ получаем исходную систему (3.1) с 2^n решениями вида (3.3). На основании теоремы 3.1 первое решение этой присоединенной системы соответствующее показателю $(\rho_1=0,...\rho_n=0)$ определяет функцию $\Phi^{0,n}_{B,n}$, то есть справедливо равенство

$$w_{n-1}(z_1,z_2,...,z_n)=\Phi^{0,n}_{B,n}\left(\begin{matrix}\alpha'_n\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right). \quad (3.7)$$

Последующие n присоединенных систем имеют нормально-регулярные решения

$$\begin{aligned}
&w_{n-1}(z_1,z_2,...,z_n)=e^{z_1}\Phi^{0,n}_{B,n}\left(\gamma-\alpha'_1,-...,-\alpha'_n,\alpha'_2,...,\alpha'_n;\gamma;-z_1,z_2-z_1,...,z_n-z_1\right),\\
&w_{n-2}(z_1,z_2,...,z_n)=e^{z_2}\Phi^{0,n}_{B,n}(\alpha'_1,\gamma-\alpha'_2-\alpha'_1-,...,-\alpha'_n,\alpha'_0,...,\alpha'_n;\\
&\gamma;z_1-z_2,-z_2,z_3-z_2,...,z_n-z_2),\\
&-----------------------------------\\
&w_{n,n+1}(z_1,z_2,...,z_n)=e^{z_n}\Phi^{0,n}_{B,n}(\alpha'_1,...,\alpha'_{n-1},\gamma-\alpha'_n-\alpha'_1,-...,-\alpha'_{n-1};\\
&\gamma;z_1-z_n,...,z_{n-1}-z_n,z_n).
\end{aligned} \quad (3.8)$$

Все построенные $w_{np}(z_1,...,z_n)(p=\overline{n+1})$ решений соответствуют показателю $(\rho_1=0,\rho_2=0,...,\rho_n=0)$, а все соответствующие присоединенные системы имеют одинаковые системы определяющих уравнений относительно особенности $(0,0,...,0)$. Переходим к свойствам нормально-регулярных решений.

Теорема 3.3.Имеют место равенства

$$e^{z_1}\Phi^{0,n}_{B,n}\left(\begin{matrix}\alpha'_n\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right)=\Phi^{0,n}_{B,n}\left(\gamma-\alpha'_1,-...,-\alpha'_n,\alpha'_2,...,\alpha'_n;\gamma;-z_1,z_2-z_1,...,z_n-z_1\right), \quad (3.9_1)$$

$$e^{z_2}\Phi^{0,n}_{B,n}\left(\begin{matrix}\alpha'_n\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right)=\Phi^{0,n}_{B,n}(\alpha'_1,\gamma-\alpha'_2-\alpha'_1-,...,-\alpha'_n,\alpha'_3,...,\alpha'_n;\gamma;z_1-z_2,-z_2,z_3,...,z_n-z_2), \quad (3.9_2)$$

———————————————————————————————

$$e^{z_n}\Phi_{B,n}^{0,n}(\alpha_1^{'},...,\alpha_{n-1}^{'},\gamma-\alpha_n^{'}-\alpha_1^{'},-...,-\alpha_{n-1}^{'};\gamma;z_1-z_n,...,z_{n-1}-z_n,z_n) \qquad (3.9_n)$$

Используя равенство (3.7) можно получить справедливость еще n равенств.

$$\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\begin{matrix}\alpha_n^{'}\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right)=e^{z_1}\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\gamma-\alpha_1^{'},-...,-\alpha_n^{'},\alpha_2^{'},...,\alpha_n^{'};\gamma;-z_1,z_2-z_1,...,z_n-z_1\right), \qquad (3.10_1)$$

$$\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\begin{matrix}\alpha_n^{'}\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right)=e^{z_2}\Phi_{B,n}^{0,n}(\alpha_1^{'},\gamma-\alpha_2^{'}-\alpha_1^{'}-,...,-\alpha_n^{'},\alpha_3^{'},...,\alpha_n^{'};\gamma;z_1-z_2,-z_2,z_3,...,z_n-z_2), \qquad (3.10_2)$$

———————————————————————————————————————

$$\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\begin{matrix}\alpha_n^{'}\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right)=e^{z_n}\Phi_{B,n}^{0,n}(\alpha_1^{'},...,\alpha_{n-1}^{'},\gamma-\alpha_n^{'}-\alpha_1^{'},-...,-\alpha_{n-1}^{'};\gamma;z_1-z_n,...,z_{n-1}-z_n,-z_n). \qquad (3.10_n)$$

Выводы. Таким образом в данной работе были изучены возможности существования нормально-регулярных решений ряда частных случаев вырожденных гипергеометрических систем (2.1) полученных из обобщенной системы Лауричелла (F_B) (1.1). Вырожденная система (2.1) состоит из трёх уравнений. Каждое уравнение в свою очередь, также являются системами состоящие из некоторого количества уравнений. Каждый из них имеют свои интересные особенности решения. Например, решениями частных случаев (2.1_1) являются функции Гаусса, Аппеля (F_1-F_4), гипергеометрические функции со списка Горна. Решениями частных случаев (2.1_2) являются функции Куммера, вырожденные гипергеометрические функции. Решениями (2.1_3) являются функции сводящаяся к функциям Бесселя одной и многих переменных [6,7,8].

Уникальность введенной новой функции (2.2) В.И. Художникова в том, что они является общим частным решением системы (2.1). Данная работа дополняет исследования В.И. Художникова, так как рассмотрена до сих пор, не исследованная, возможности существования нормально-регулярных решений вида (1.3) и их связь с функцией Художникова $\Phi_{B,n}^{k,l}$.

Использованная авторами классический подход с применением метода Фробениуса-Латышевой [4] позволяет взглянуть на вырожденную систему (2.1) всесторонне, учитывая регулярные и иррегулярные особые кривые. Особенно при построении решения неоднородных вырожденных систем.

В третьей части эти результаты обобщены на случай n переменных в теоремах 3.1 и 3.2. В (3.8)-(3.10) использованы обобщения формулы Эрдейи

$$\Phi_2\left(\gamma-\alpha_1-\alpha_2^{'},\gamma;-z_1,z_2-z_1\right)=\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{\left(\gamma-\alpha_1-\alpha_2^{'}\right)_{m_1}(\alpha_2^{'})_{m_2}(-z_1)^{m_1}(z_2-z_1)^{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2}m_1!m_2!}.$$

В работе больше внимание обращается на построения решении систем (2.1_2), поскольку, в (2.1) иррегулярную особенность имеет только это уравнение и нормально-регулярные решения существуют за счёт этого уравнения.

Список использованной литературы

1. Appell P. and Kampe de Feriet J., Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques. - Polynomes d Hermite:Gauthier-Villars, New York, 1944.
2. Bateman G. and Erdeyi A., Higher transcendental functions. Hypergeometric function. M: Science, 1965.
3. В.И. Художников. Две новые вырожденные гипергеометрические функции многих переменных и интегральные уравнения с ними //Дифф.уравнения, 2003, том 39, №6, с.835-843.
4. Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Актобе: ИП Жандилдаева С.Т., 2015. -464 с.
5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И., Интегралы и ряды: Дополнительные главы. М., 1986.
6. Srivastava H. M., Karlsson P.W., Multiple Gaussian Hypergeometric Series. New York. 1985, 415 p.
7. Тасмамбетов Ж.Н., Об иррегулярных особых кривых систем типа Уиттекера//Вестник Сам.гос.тех. университета. Серия физ-мат науки. 2013, №4(11). С.25-33.
8. Babister A.W., Trancendental function satisfying nonhomogeneous linear dierential equations. New York-London. 1967, 414 p.

ТУЫНДАЛҒАН ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ҚАЛЫПТЫ-ТҰРАҚТЫ ШЕШІМДЕРІН ҚҰРУ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ ТУРАЛЫ

Ж.Н. ТАСМАМБЕТОВ[1], Ж.К. УБАЕВА[1]

[1] Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

E-mail: tasmam@rambler.ru; zhanar_ubaeva@mail.ru

Аңдатпа. Лауричелла жүйесінен шекке көшу арқылы алынған гипергеометриялық жүйелердің қалыпты тұрақты теңдеулерінің болуы зерттелген. Олардың кейбір қасиеттері зерттелді. В.И. Художников функциясымен байланысы, сондай-ақ біртекті емес жүйелердің жеке дербес жағдайларының шешімдерін құру ерекшеліктері дәлелденді.

Түйінді сөздер: Қалыпты-тұрақты шешімдер, туындалған, гипергеометриялық, жүйе, функция, құру.

ON THE FEATURES OF CONSTRUCTING NORMALLY REGULAR SOLUTIONS OF DEGENERATE SYSTEMS

Zh.N. TASMAMBETOV[1], Zh.K. ABAYEVA[1]

[1]Aktobe Regional University named after K.Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan

e-mail: tasmam@rambler.ru; zhanar_ubaeva@mail.ru

Abstract. The possibility of existence of normal-regular equations of degenerate hypergeometric systems obtained by passing to the limit from the Lauricella system is investigated. Some of their properties have been studied. The connection between the established normal-regular solutions of degenerate systems and the one introduced by V.I. Khudozhnikov with a new function representing a particular solution of the system under study.

Key words: System, degenerate, hypergeometric, normal-regular, by passage to the limit, function, variables.

УДК 517.968.72
МРНТИ 27.29.17

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИНВОЛЮЦИЕЙ.

К.И. УСМАНОВ, К.Ж. НАЗАРОВА, Б.Х. ТУРМЕТОВ
Международный Казахско-Турецкий университет им. А.Ясави
E-mail: y_kairat@mail.ru, gjnazarova@mail.ru.

Аннотация: В данной работе рассматривается многоточечная краевая задача для систем интегро – дифференциальных уравнении с инволюцией, когда производная от искомой функции содержится в правой части уравнения. Используя свойства инволютивного преобразования, задача сводится к исследованию многоточечной краевой здадачи для систем интегро-дифференциальных уравнении. Рассматривая интегральное уравнение II рода типа Фредгольма относительно ядра $K_2(t,s)$ и определив его резольвенту, можно избавится от производной искомой функции в правой части. Далее к данной задаче можно применит метод параметризации предложенный профессором Д.Джумабаевым. На основе этого решение задачи сводится к решению специальной задачи Коши и системы линейных уравнений. Используя методы решения интегральных уравнении, однозначная разрешимость исходной задачи, сводится к обратимости матрицы, которая зависит от исходных данных.

Ключевые слова: Система интегрально-дифференциальных уравнений, метод параметризации, параметр, краевые условия, однозначная разрешимость.

Исследование краевых задач интегро-дифференциальных уравнений были рассмотрены в работах многих авторов [1-7], однако с развитием компьютерных технологий, возникает вопрос о создание констуктивных методов получение решения поставленной задачи. Связи с этим, профессором Д.Джумабаевым был предложен метод параметризации решения линейной двухточечной краевой задачи для систем дифференциальных уравнений [8]. В работах [9-12] данный метод был применен к исследования краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнении и установлены критерии их однозначной разрешимости.

На отрезке $[0,T]$ рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dx(\mathrm{t})}{dt}+diag(a_1,a_2,\ldots,a_n)\frac{dx(\alpha(t))}{dt}=\sum_{k=1}^{m}\int_0^T K_1(t,s)x(s)\,ds+\int_0^T K_2(t,s)\dot{x}(s)\,ds+f(t),\quad \mathrm{t}\in[0,T], \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} B_i x(\theta_i) = d\ , \quad d \in R^n, \tag{2}$$

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{m-1} < \theta_m = T,$$

где матрицы $K_1(t,s)$, $K_2(t,s)$ непрерывны соответственно на $[0,T]\times[0,T]$, n - мерная вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, матицы B_i, $i=\overline{1,m}$ - постоянные матрицы. $\alpha(t)-$ изменяющий ориентацию гомеоморфизм $\alpha:[0,T]\to[0,T]$ такой, что $\alpha^2(t)=\alpha(\alpha(\mathrm{t}))=\mathrm{t}$. Гомеоморфизм $\alpha(t)$ называют инволютивным преобразованием или просто инволюцией. На отрезке $[0,T]$ в качестве такого преобразования можно рассмотреть гомеоморфизм $\alpha(t)=\mathrm{T}-t$. Свойства инволютивного преобразования были изучены в работах Г.С.Литвинчука [13], Н.К.Карапетянца и С.Г.Самко [14] и др.

Рассмотрим значения уравнения (1) в точке $t=\alpha(t)$

$$\frac{dx(\alpha(t))}{dt} + diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{m}\int_0^T K_1(\alpha(t),s)x(s)\,ds + \int_0^T K_2(\alpha(t),s)\dot{x}(s)\,ds + f(\alpha(t)).$$

Из системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx(\mathrm{t})}{dt} + diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)\dfrac{dx(\alpha(t))}{dt} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\int_0^T K_1(t,s)x(s)\,ds + \int_0^T K_2(t,s)\dot{x}(s)\,ds + f(t), \\ \dfrac{dx(\alpha(t))}{dt} + diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)\dfrac{dx(t)}{dt} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m}\int_0^T K_1(\alpha(t),s)x(s)\,ds + \int_0^T K_2(\alpha(t),s)\dot{x}(s)\,ds + f(\alpha(t)). \end{cases}$$

определим

$$diag(1-a_1^2, 1-a_2^2, \ldots, 1-a_n^2)\frac{dx(t)}{dt} = \int_0^T \left[K_1(t,s) - diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)K_1(\alpha(t),s)\right]x(s)ds +$$

$$+\int_0^T \left[K_2(t,s) - diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)K_2(\alpha(t),s)\right]\dot{x}(s)ds + \left[f(t) - diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)f(\alpha(t))\right].$$

Предположим, что матрица $diag(1-a_1^2, 1-a_2^2, \ldots, 1-a_n^2)$ не является вырожденной, тогда она обратима и краевую задачу (1), (2) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^T \tilde{K}_1(t,s)x(s)ds + \int_0^T \tilde{K}_2(t,s)\dot{x}(s)ds + \tilde{f}(t), \quad \mathrm{t}\in[0,T], \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} B_i x(\theta_i) = d\ , \quad d \in R^n, \tag{4}$$

$$0=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_{m-1}<\theta_m=T,$$

где $\tilde{K}_1(t,s)=diag(1/(1-a_1^2),1/(1-a_2^2),\ldots,1/(1-a_n^2))\left[K_1(t,s)-diag(a_1,a_2,\ldots,a_n)K_1(\alpha(t),s)\right]$,

$\tilde{K}_2(t,s)=diag(1/(1-a_1^2),1/(1-a_2^2),\ldots,1/(1-a_n^2))\left[K_2(t,s)-diag(a_1,a_2,\ldots,a_n)K_2(\alpha(t),s)\right]$,

$\tilde{f}(t)=diag(1/(1-a_1^2),1/(1-a_2^2),\ldots,1/(1-a_n^2))\left[f(t)-diag(a_1,a_2,\ldots,a_n)f(\alpha(t))\right]$.

Условие А. Пусть интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$z(t)=\int_0^T\tilde{K}_2(t,s)z\left(s\right)ds+\Phi(t) \tag{5}$$

имеет единственное решение при любой функции $\Phi(t)\in C\left(\left[0,T\right],R^n\right)$.

Если выполнено условие А, то существует $\Gamma_2(t,s;1)$ - резольвента интегрального уравнения Фредгольма второго рода с ядром $\tilde{K}_2(t,s)$ и решение интегрального уравнения можно записать в виде

$$z^*(t)=\Phi(t)+\int_0^T\Gamma_2(t,s;1)\Phi\left(s\right)ds.$$

Пользуясь условием А, задачу (3), (4) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt}=\int_0^T\tilde{K}_1(t,s)x(s)ds+\tilde{f}(t)+\int_0^T\Gamma_2(t,\tau;1)\left[\int_0^T\tilde{K}_1(\tau,s)x(s)ds+\tilde{f}(\tau)\right]d\tau,\quad \mathrm{t}\in\left[0,T\right], \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^m B_i x(\theta_i)=d\ ,\quad d\in R^n, \tag{7}$$

$$0=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_{m-1}<\theta_m=T,$$

В интегральном члене меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_0^T\Gamma_2(t,s;1)\int_0^T\tilde{K}_1(s,\tau)x(\tau)d\tau ds=\int_0^T\left(\int_0^T\Gamma_2(t,\tau;1)\tilde{K}_1(\tau,s)d\tau\right)x(s)ds=\int_0^T K^*{}_1(t,s)x(s)ds.$$

Введем обозначения

$$\hat{K}_1(t,s)=K^*{}_1(t,s)+\tilde{K}_1(t,s)\ ,\qquad \hat{f}(t)=\tilde{f}(t)+\int_0^T\Gamma_2(t,\tau;1)\tilde{f}(\tau)d\tau.$$

Тогда задачу (6), (7) запишем в виде

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^T \hat{K}_1 t, s) x(s) ds + \hat{f}(t), \quad \mathrm{t} \in [0, T], \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} B_i x(\theta_i) = d, \quad d \in R^n, \tag{9}$$

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{m-1} < \theta_m = T,$$

К краевой задачи (9), (10) применяем метод параметризации Д.Джумабаева [8], для этого берем натуральное число $l \in \mathrm{N}$ и по нему производим разбиение: $[0, T) = \bigcup\limits_{r=1}^{m(l+1)} [t_{r-1}, t_r),$

где $t_{i(l+1)+j} = t_{i(l+1)} + \dfrac{h_{i+1}}{l}$, $h_i = \theta_i - \theta_{i-1}$, $i = \overline{0, m-1}$, $j = \overline{1, l+1}$. Обозначим $h = \max\{h_1, h_1, \ldots, h_m\}$, $\beta = \max\limits_{t,s \in [0,T]} \|K(t,s)\|$.

На основе данного метода получим следующее утверждение:

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *условие А,*
2) *матрица* $diag(1 - a_1^2, 1 - a_2^2, \ldots, 1 - a_n^2)$ обратима.

Тогда *для однозначной разрешимости задачи (8), (9) необходимо и достаточно существования* $l \in N$ *, при котором матрица* $Q_{*,*}(l)$ *обратима.*

Где l определяется из условия $q(l) = \beta T \dfrac{h}{l} < 1$.

Это исследование было частично поддержано Министерством образования и науки Республики Казахстан, Гранты № AP09259137

Список использованной литературы

1. Brunner H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations. Cambridge: Cambridge University Press; 2004.
2. Chen J, Huang Y, Rong H, Wu T, Zeng T. A multiscale Galerkin method for second-order boundary value problems of Fredholm integro-differential equation. J Comput Appl Math. 2015;290:633-640.
3. Du H, Zhao G, Zhao C. Reproducing Kernelmethod for solving Fredholm integro-differential equations withweakly singularity. J Comput Appl Math. 2014;255:122-132.

4. Maleknejad K, Attary M. An efficient numerical approximation for the linear Fredholm integro-differential equations based on Cattani's method. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 2011;16:2672-2679.
5. Molabahrami A. Direct computation method for solving a general nonlinear Fredholm integro-differential equation under the mixed conditions: degenerate and non-degenerate Kernels. J Comput Appl Math. 2015;282:34-43.
6. Yuzbasi Së . Numerical solutions of system of linear Fredholm-Volterra integro-differential equations by the Bessel collocation method and error estimation. Appl Math Comput. 2015;250:320-338.
7. Wazwaz AM. Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications. Beijing and Springer-Verlag: Higher Education Press; 2011.
8. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. 29(1989), No 1, 34-46.
9. Джумабаев Д.С. Об одном методе решения линейной краевой задачи для интегродифференциального уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 7. С. 1209-1221.
10. Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integrodifferential equation, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 53(2013), No 6, 736-758.
11. Dulat Dzhumabaev, “Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41:4 (2018), 1439-1462
12. А.Т. Асанова, А.А. Ермек. Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін үшнүктелі шеттік есептің шешімі туралы. Вестник Актюбинского регионального университета им. К. Жубанова, №1(63), март, 2021, Физико-математические науки, 14-25 б.
13. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. — Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1977.
14. Карапетянц Н.К., Самко С.Г. Уравнения с инволютивными операторами и их приложения // Ростов-н/Д. Изд-во РГУ. -1988. 188 с.

ИНВОЛЮЦИЯСЫ БАР ФУНКЦИОНАЛДЫ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН КӨПНҮКТЕЛІ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ БІРМӘНДІ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ.

УСМАНОВ К.И. [1], НАЗАРОВА К.Ж. [1] , ТУРМЕТОВ Б.Х. [1]

[1]Қ.А.Ясауи атындағы Халықаралық Қазақ-Түрік университеті

E-mail: y_kairat@mail.ru, gjnazarova@mail.ru.

Андатпа. Бұл жұмыста ізделінді функцияның туындысы теңдеудің оң жағында болған кезде инволюциясы бар интегралдық – дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін көпнүктелі шеттік есеп қарастырылады. Инволютивті түрлендірудің қасиеттерін қолдана отырып, есеп интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін көпнүктелі шеттік есепті зерттеуге дейін келтіріледі. Фредгольм II типіндегі интегралдық теңдеуді өзекке қатысты қарастырып, оның резольвентасын анықтай отырып, теңдеу оң жақта ізделінді функцияның туындысы болмайтын интегралдық-дифференциалдық теңдеуге келтіріледі. Әрі қарай, есепкеа профессор Д.Жұмабаевпен ұсынылған параметрлеу әдісін қолдануға болады. Оның негізінде есепті шешу арнайы Коши есебі мен сызықтық теңдеулер жүйесін шешуге келтіріледі. Интегралдық теңдеулерді шешу теориясын қолдана отырып, қойылған есептің бірмәнді шешімділігі, бастапқы берілгендерге тәуелді матрицаның қайтымдылығына байланыстырылады.

Түйін сөздер: Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі, параметрлеу әдісі, параметр, шекті шарттар, бір мәнді ажыратымдылық.

ON THE UNAMBIGUOUS SOLVABILITY OF A MULTIPOINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INVOLUTION.

USMANOV K.I.[1], K.ZH. NAZAROVA[1], TURMETOV B.K.[1]

[1]Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan
E-mail: y_kairat@mail.ru, gjnazarova@mail.ru.

Abstract. In this paper, we consider a multipoint boundary value problem for systems of integro–differential equations with an involution when the derivative of the desired function is contained in the right side of the equation. Using the properties of the involutive transformation, the problem is reduced to the study of a multipoint boundary value problem for systems of integro-differential equations. Considering an integral equation of the second kind of Fredholm type with respect to the kernel and determining its resolvent, the equation reduces to an integro-differential equation that does not contain the derivative of the desired function in the right part. Further, the parameterization method proposed by Professor D.Dzhumabaev can be applied to this problem. Based on this, the solution of the problem is reduced to solving a special Cauchy problem and a system of linear equations. Using the methods of solving integral equations, the unambiguous solvability of the original problem is reduced to the reversibility of the matrix, which depends on the initial data.

Key words: System of integral differential equations, parametrization method, parameter, boundary conditions, unambiguous solvability.

ӘОЖ 373.1.02:372.8
ҒТАХР 14.25.09

«БІЛІМ БЕРУ РОБОТОТЕХНИКАСЫ» ПӘНІН ОҚЫТУДЫҢ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ

Ш.Т. ШЕКЕРБЕКОВА
Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
E-mail: sh_shirin@mail.ru

Аннотация. Мақалада білім беру робототехникасын оқыту мәселелері қарастырылады. Білім алушылардың робототехника бойынша жобалық іс-әрекетін ұйымдастыру талданады.

Түйін сөздер: робототехника, білім беру робототехникасы, жобалық іс-әрекет, Tinkercad ортасы.

XXI ғасыр робототехниканың заманы болып табылады. Экономикамызды ілгерілету үшін робототехникаға терең ден қоюымыз керек. Қоғамдық салалардың барлығын ақпараттандыру, оқу үдерісін қарқындандыру негізгі жалпы білімді жаңғыртып, оның рөліне жаңаша көзқараспен қарауды талап етеді. Осыған байланысты оқушыларға ғылыми-техникалық білім берудің роботтехникасы сияқты саласының өзектілігі артады [1].

Робототехника - роботтардың құрылысымен, жұмысы мен қолдануымен айналысатын, оған қоса олардың басқару, сезіну мен мәлімет өңдеумен айналысатын механикалық, электр және электронды инженерия мен компьютер ғылымдарының бүгінгі таңда біріккен саласы болып отыр. Басқаша айтқанда, робототехника дегеніміз бірнеше ғылымның үйлесім табуы. Робот жасау арқылы балалардың ойлау қабілеті дамиды,программа үйренеді. Мұндағы басты мақсат – балаларды ғылымға баулу [2].

«Білім беру робототехникасы» пәні педагогикалық бағыттағы мамандықтарда оқыту барысында білім алушылар робототехниканың заманауи даму үрдістерін, робототехника бойынша білім беру процесін ұйымдастырудың жеке тәсілдері, робототехникалық конструкторларда жұмыс жасауды және оларды өздерінің болашақ кәсіби қызметінде пайдалана алуға үйренеді. Сонымен қатар, олар практикалық жұмыстар жасауға машықтанады. Оқытуда бар құралдар ретінде Lego, Arduino және т.б. конструкторлардың мүмкіндіктерімен жобалар әдісі аясында құрамында әртүрлі дачиктері бар техникалық құрылғыларды программалауды үйренеді. «Білім беру робототехникасы» пәнін онлайн оқыту жағдайында виртуалды лабораториялық порталдарды пайдалануға болады. Виртуалды орта — интернет технологиясын қолданып онлайн білім беру ортасы. Бұл ортада білім талапкерлері виртуалды класстарға, оқу материалдарына, тесттерге, тапсырмаларға, басқа онлайн ресурстарына интернет немесе локалды желі арқылы қол жеткізе алады [3]. Сол секілді Arduino-ның виртуалды формасы Tinkercad ортасы болып табылады. Tinkercad - 3D дизайны, электроника және кодтауға арналған ақысыз, қолдануға ыңғайлы бағдарлама. Мұғалімдер, балалар, әуесқойлар мен дизайнерлер оны кез-келген нәрсені жобалау және жасау үшін пайдаланады. Бұл ортадан көптеген жобаларды виртуалды түрде қарастыруға болады.

Бүгінгі таңда білім беру жүйесі оқушылардан барлық пәндер бойынша дайын білім беруді үйреніп қана қоймай, сонымен қатар олардың дайындықтары мен жеке ерекшеліктеріне сәйкес оқу процесінде әлеуметтік және шығармашылықты дамытуға жағдай жасау. Сондықтан, оқу процесінде жобалық іс-әрекетті қалыптастыруда робототехникадағы жоба жұмысының рөлі зор болып табылады [4].

Жобаны іске асыру кезеңдері және оған қатысушылардың функциялары 1-кестеде келтірілген.

Кесте 1. Жобаны іске асыру кезеңдері және оған қатысушылардың функциялары

Жоба бойынша кезеңдер	Жұмыстың мазмұны	Оқушылардың іс-әрекеті	Мұғалімнің іс-әрекеті
1	2	3	4
Мәселе	Жоба жұмысының тақырыбын, мақсатын анықтау. Жобаға қатысатын жұмыс тобын белгілеу.	Мұғаліммен бірге жоба жұмысының тақырыбын талқылау, мәліметтер жинақтау.	Әдіспен таныстырады, оқушыларды ынталандырады. Тақырыпты, жобаның мақсаттарын анықтауға, мерзімдерін белгілеуге көмектеседі.
Жобалау	- керекті мәліметтерді айқындау - мәліметтерді жинау және талдау әдістерін анықтау - нәтижелерін көрсету әдісін айқындау - жоба жұмысының нәтижесін бағалауды және	Жоба жұмысының міндерттерін белгілеп көрсетеді. Жобалық іс-әрекеттің критерийін белгілеп негіздейді	Мұғалім оқушыларға идея айтады, жұмыстың болжамын келтіреді, оқушылардың жоба жұмысын жасауын бақылап отырады..

	оны бағалау критерийін келтіру. - топтағы оқушылардың міндеттерін бөліп беру		
Іске асыру	- қажет ақпаратты жинақтау және нақтылап алу - жоба жұмысын жасаудағы баламаларды айқындау, талқылап алу - жоба жұмысының ең жақсы нұсқасын таңдау - жоба жұмысының міндеттерін ретімен кезең бойынша орындау	Жоба жұмысының міндеттерін кезеңмен жасау	Жұмыс барысында оқушылардың іс-әрекетін бақылап отырады, кеңес беріп, сырттан басқарып отырады
Жобаны таныстыру, рефлексия	Алынған нәтижелерді және оның себептерін түсіндіре отырып, жобаның орындалу барысы туралы есеп дайындау.	Олар жобаны ұсынады, оның ұжымдық өзі өзін талдау және бағалауына қатыса алады.	Оқушыларды тыңдап, жобаға қатысты сұрақ қоя алады. Керек болған жағдайда жобаны талдауды басқара алады. Жобаны бағалауға қатысады.

Жоғарыдағы кестеден көргеніміздей, жоба жұмыстарын жүзеге асырудың әр кезеңдерінде мұғалімнің әрекеттері өзгеріп отырады. Жоба жұмысына дайындық жасауда жоба жұмысының идеясының пайда болуына ықпал ету етеді, сонымен бірге алғашқы жоспарлауға көмектесе алады.

Жоба жұмысын іске асыру барысында мұғалім жеке мәселелер бойынша көмек беруші, кеңес беруші және қосымша ақпарат көзі ретінде қатысады. Жоба жұмысының соңғы кезеңінде мониторинг жасау және бағалау функциясының рөлі жоғарылайды, себебі мұғалім тәуел емес эксперт ретінде жоба жұмысына қорытынды жасайды.

Жоба бойынша жұмыс кезеңдеріне тоқталайық.

Оқушылардың жобалық қызметін ұйымдастыра отырып, жұмыс кезінде ескеру қажет бірқатар жағдайлар бар. Оқушыға жоба ретінде ұсынылуы мүмкін емес, оны орындау үшін оның дағдылары туралы білімі жоқ, дегенмен бұл білім мен дағдыларды табаитын және алатын жері жоқ. Басқаша айтқанда, жоба бойынша жұмыс істеу үшін автор белгілі бір бастапқы (ең аз болса да) дайындық деңгейіне ие болуы керек. Әрине, жоба өте таныс, бұрын бірнеше рет орындалған, жаңа шешімдерді іздеуді қажет етпейтін және сәйкесінше жаңа білім мен дағдыларды алуға мүмкіндік бермейтін жұмыс бола алмайды. Жоба бойынша жұмыстың бірінші кезеңі проблема болып табылады-бар жағдайларды бағалау және мәселені тұжырымдау қажет. Бұл кезеңде іс-әрекеттің негізгі мотиві пайда болады, өйткені проблеманың болуы үйлесімсіздік сезімін тудырады және оны жеңуге деген ұмтылысты тудырады.

Жұмыстың екінші кезеңі- мақсат қою. Бұл кезеңде мәселе жеке маңызды мақсатқа айналады және болашақта жобалық өнімде жүзеге асырылатын күтілетін нәтиженің бейнесін алады. Жоба бойынша жұмыстың маңызды кезеңі - бұл жоспарлау, оның нәтижесінде алыс мақсат қана емес, сонымен бірге жақын қадамдар да айқын болады. Жұмыс жоспары болған кезде ресурстар (материалдар, жұмыс қолдары, уақыт) және түсінікті мақсат болса, жұмысқа кірісуге болады. Жоба циклінің келесі кезеңі - бар жоспарды жүзеге асыру.

Жұмысты аяқтағаннан кейін нәтижені жоспармен салыстыру қажет, егер мүмкін болса, түзетулер енгізу керек. Бұл түсіну, жіберілген қателіктерді талдау, жұмыстың болашағын көруге тырысу, олардың жетістіктерін, жұмыс барысында және соңында пайда болған сезімдер мен эмоцияларды бағалау кезеңі. Жұмыстың соңғы кезеңі - өзін-өзі бағалау және рефлексия.

Робототехника бойынша жоба жұмыстарын жасау және оны түзетуде білім алушылар бір-бірімен тәжірибе алмасуға мүмкіндіктері болады, бұл білім алушылардың танымдық және шығармашылық қабілеттерін арттыруға, сонымен бірге білім алушылардың жеке және топта жұмыс істеуіне ықпал жасайды. Сондықтан білім алушылар Tinkercad ортасында калькулятор, жарық сигнал беретін жоба және т.б. жобаларды жасап үйренді.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Вязовов С.М,Калягина О.Ю,Слезин К.А. Әдістемелік құралдар. «Жарысқыш роботты техника», «EV3 ортасында бағдарламалау тәсілдері» -132 б.

2. Козлова В.А. «Білім берудегі роботты техника [электронды қор] //http:lego.rkc74ru/index/php/2009-04-03-08-35-17, Пермь, 2011.

3. Gorkov D. Tinkerkad For beginners //Detailed guide to getting started in Tinkercad MTK 2015.

4. Шекербекова Ш.Т., Абдулкаримова Г.А., Арынова Г.С., Ербол А. Білім беру робототехникасын оқыту барысында болашақ информатика мұғалімдерінің жобалық іс-әрекетін ұйымдастыру. //ҚазҰПУ Хабаршы. «Физика - математика ғылымдары» сериясы. – 2021. -№2 (74). - Алматы. - Б. 77-85.

ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ «ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ РОБОТОТЕХНИКА»

Ш.Т. ШЕКЕРБЕКОВА
Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан
E-mail: sh_shirin@mail.ru

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы обучения образовательной робототехнике. Анализируется организация проектной деятельности обучающихся по робототехнике.

Ключевые слова: робототехника, образовательная робототехника, проектная деятельность, среда Tinkercad.

FEATURES OF TEACHING THE DISCIPLINE «EDUCATIONAL ROBOTICS»

Sh.T. SHEKERBEKOVA
Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan
E-mail: sh_shirin@mail.ru

Abstract. The issues of teaching educational robotics are considered in the article. The organization of project activities of students in robotics is analyzed.

Keywords: robotics, educational robotics, project activity, Tinkercad environment.

АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТ
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ
INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Abek A.N. – L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan, e-mail: azhar.abekova@gmail.com

Assanova A.T. – doctor of physical and mathematical sciences, professor, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan, Aktobe, Kazakhstan, e-mail: assanova@math.kz

Assan Zh. – master's student, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: zh.assanova98@gmail.com

Aruğaslan Çinçin D. – professor, Süleyman Demirel University, Isparta, Turkey, e-mail: duyguarugaslan@sdu.edu.tr

Akhmet M. – professor, Middle East Technical University, Ankara, Turkey, e-mail: marat@metu.edu.tr

Bokayev N.A. – professor, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan, e-mail: bokayev2011@yandex.ru

Gogatishvili A. – PhD, Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences, Prague, Czech Republic, e-mail: gogatish@math.cas.cz

Kabdrakhova S.S. – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: symbat2909.sks@gmail.com

Yuldashev T. K. – Candidate of Physical and Mathematical Sciences**,** National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan ., e-mail: tursun.k.yuldashev@gmail.com

Абдикаликова Г.А. – доцент, ф.м.ғ.к, Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан, e-mail: agalliya@mail.ru

Ахманова Д.М. – к.ф.-м.н., Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан, e-mail: danna.67@mail.ru

Айтенова Г.М. – докторант, Западно-Казахстанский университет имени М.Утемисова, Уральск, Казахстан, e-mail: gulsezim-88@mail.ru;

Баширова А.Н. – докторант, Евразийский национальный университет имени Л,Н,Гумилева, Нур-Султан, Казахстан, e-mail: anar_bashirova@mail.ru

Гульманов Н.К. – докторант, Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан, e-mail: gulmanov.nurtay@gmail.com

АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТ
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ
INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Дженалиев М.Т. – доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан, e-mail: muvasharkhan@gmail.com

Жумагулова Э.К. – магистрант, Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан, e-mail: elmira09@inbox.ru

Канатбеккызы З. – Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, Алматы, Қазақстан

Космакова М.Т. – PhD, доцент Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан, e-mail: svetlanamir578@gmail.com

Кошанов Б.Д. – доктор физико-математических наук, профессор, Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, Алматы, Қазақстан, e-mail: koshanov@list.ru

Кумарбеков С. – Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, Алматы, Қазақстан, e-mail: koshanov@list.ru

Қуанышева Г. – Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

Койлышов У.К. – ф.-м.ғ.к., профессор, Институт Математики и Математического Моделирования, Алматы, Казахстан, e-mail: koylyshov@mail.ru

Керимбеков А. – профессор, ф.-м.ғ.д.,Қырғыз-Ресей Славян Университеті, Бішкек, Қырғызстан, e-mail: akl7@rambler.ru

Қағазбаева Ә.К. – п.ғ.к, профессор, Қ.Жубанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан, e-mail: aspet-k@mail.ru

Қайдасов Ж. – ф.-м.ғ.к., профессор, Қ.Жубанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан, e-mail: jet-k@mail.ru

Назарова К.Ж. – к.ф.-м.н., доцент, Международный Казахско-Турецкий университет им. А.Ясави, e-mail: y_kairat@mail.ru

Нурсултанов Е.Д. – доктор физико-математических наук, профессор, Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, Нур-Султан, Казахстан, e-mail: er-nurs@yandex.ru

Нугаева З.Т. – PhD, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан, e-mail: zahira2009.85@mail.ru

АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТ
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ
INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Рамазанов М.И. – доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан, e-mail: ramamur@mail.ru

Рахымбекұлы Д. – Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, Алматы, Қазақстан

Сартабанов Ж.А. – академик, доктор физико – математических наук, профессор, Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан, e-mail: sartabanov42@mail.ru;

Садыбеков М.А. – доктор физико-математических наук, профессор, Институт Математики и Математического Моделирования, Алматы, Казахстан

Саржанова А. – Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

Сарсимбаева С.М. – к.ф.-м.н., Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан, e-mail: sarsi@mail.ru

Сәрсенбі Ә.М. – профессор, ф.-м.ғ.д., М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Шымкент, Қазақстан, e-mail: abzhahan@gmail.com

Сұраған Д. – ассоциированный профессор, PhD Назарбаев университет, Нур-Султан, Казахстан, e-mail: durvudkhan.suragan@nu.edu.kz

Тасмамбетов Ж.Н. – доктор физико-математических наук, профессор, Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова, Актобе, Казахстан, e-mail: tasmam@rambler.ru

Тлеуханова Н.Т. – профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики, доктор физико-математических наук, Евразийский национальный университет имени Л,Н,Гумилева, Нур-Султан, Казахстан, e-mail: tleukhanova@rambler.ru

Тлеубергенова М.А. – ф.-м.ғ.к., Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан, e-mail: madina_1970@mail.ru

Турметов Б.Х. – доктор физико-математических наук, профессор, Международный Казахско-Турецкий университет им. А.Ясави, e-mail: gjnazarova@mail.ru

Убаева Ж.К. – докторант, Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан, e-mail: zhanar_ubaeva@mail.ru

АВТОРЛАР ТУРАЛЫ МӘЛІМЕТ
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ
INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Утегенова В.К. – магистр, Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан, e-mail: kasym1973@mail.ru

Усманов К.И. – к.ф.-м.н., доцент, Международный Казахско-Турецкий университет им. А.Ясави, e-mail: y_kairat@mail.ru

Шекербекова Ш.Т. – п.ғ.к., доцент, Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

Юлдашев Т.К. – п.ғ.к., доцент, Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

«Қ.ЖҰБАНОВ АТЫНДАҒЫ АҚТӨБЕ ӨҢІРЛІК УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ»
ғылыми журналына мақалалар беру тәртібі

Мақаланың рәсімделуі

1. Мақалалар компьютерде терілген жазбалар түрінде, бір данамен қабылданады. Сонымен қатар мақаланың Microsoft Word 2010 жүйесінде, жадыда электрондық нұсқасы да ұсынылады.
2. Қолжазбаларды авторлар мұқият тексеріп, қатесіз тапсыруы керек.
3. Мақала көлемі компьютерде терілген мәтінмен 3-10 бет (мәтін Times New Roman қарпімен теріледі, қаріп өлшемі-12) жадағай ара қашықтықта, абзацтық шегініс-1,25 см. Жиектік өлшемдері 2 см.

Мақала құрылымының жалпы тәртібі

ҒТАМР (Ғылыми-техникалық ақпараттық мемлекетаралық рубрикаторы) (12 қаріп өлшемімен).
Мақаланың атауы (12 қаріп өлшемі, бас, қою әріптермен).
Автордың(лардың) аты-жөні. (12 қаріп өлшемімен, қою қаріптермен).
Аннотация үш тілде (10 қаріп өлшемімен, ашық курсивпен, көлемі -150-200 сөз).
Мақаланың түйіндемесі және кілт сөздері болуы керек. (қазақ, орыс және ағылшын тілдерінде, 10 қаріп өлшемімен, тік қаріппен, сөздер – ашық курсивпен).
Мақалаға ғылым докторының немесе кандидаттың пікірі беріледі.
Автордың аты-жөні (толық), ғылыми дәрежесі, ғылыми атағы, жұмыс орны көрсетілуі керек. Сонымен қатар автор(лардың) пошталық мекен-жайы, қызметтік және мобильді телефон нөмірлері, электрондық поштасы қосымша ұсынылады.

Мақаланың мәтіні 12-ші қаріп өлшемімен басылады. Тәжірибелік сипаттағы мақалалар мынадай бөлімдерге бөлінеді: Кіріспе (бас тақырыпсыз), Материал және Зерттеу әдістемесі, Нәтижелер және оны талқылау, Тұжырым. Егер тақырыпшалар бар болса 12-ші қаріп өлшемімен, қою курсивпен теріледі. «Жаратылыстану ғылымдары» айдарында көрсетілетін өсімдіктер мен жануарлардың латынша атаулары мәтінде курсивпен көрсетіледі.

Суреттер мен кестелер мәтінде келтірілген тәртіп бойынша нөмірленеді, әр кесте мен суреттің жеке тақырыбы болуы керек, тақырып қою қаріппен жазылады.

Қысқартулар. Жалпыға белгілі өлшем бірліктерінің (физикалық, математикалық, химиялық терминдердің, т.б.,) қысқаша аталуын көрсетуге болады. Барлық қысқартулар мен шартты шамалардың мәтінде толықтай атауы (10 қаріп өлшемімен) көрсетілуі керек. Мекемелердің атаулары мәтінде алғаш кездескенде толығымен жазылып, қасына жақшаның ішіне қысқартылған түрі көрсетіледі.

Әдебиеттер

Әдебиеттер 12-ші қаріп өлшемімен нөмірленіп, мақаланың ішіндегі сілтемелер төртбұрышты жақшалар арқылы көрсетіледі.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі дереккөздердің түпнұсқалық тілінде (қазақ, орыс және басқа да ағылшын емес тілдерде) 7.1-2003 МЖСТ "Библиографиялық жазба. Библиографиялық сипаттама. Құрастырудың жалпы талаптары мен ережелері" бойынша рәсімделуі керек.

Латинизацияланған әдебиеттер тізімі келесі түрде рәсімделуі керек: автор(-лар) (транслитерация, http://www.translit.ru). (Шыққан жылы жақшада). Мақала атауы транслитерацияланған нұсқада [мақала атауының ағылшын тіліне аудармасы төртбұрышты жақшада], дереккөздің транслитерацияланған нұсқада атауы (немесе ағылшынша атауы – егер бар болса), шығыс деректері ағылшын тілінде.

Журналдың тақырыптық айдарлары

Физика-математика ғылымдары
Жаратылыстану ғылымдары
Техника ғылымдары
Филология ғылымдары
Тарих, философия және әлеуметтану
Экономика және құқық
Педагогика және психология
Өнер, мәдениет және спорт

Порядок приема статей в научный журнал «ВЕСТНИК АКТЮБИНСКОГО РЕГИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМ. К. ЖУБАНОВА»

Оформление рукописи

1. Статья должна быть представлена в электронном виде (на съемных накопителях) или по электронной почте. Электронная версия записывается в формате Microsoft Word 2010.
2. Рукописи должны быть тщательно выверены и отредактированы авторами.
3. Объем статей должен составлять 3-10 страниц (текст набирается шрифтом Times New Roman; размер кегля -12; межстрочный интервал – полуторный; абзацный отступ -1,25 см.) Поля 2 см.

Общий порядок расположения частей статьи

МРНТИ (Межгосударственный рубрикатор научно-технической информации) (12 кегль)
Название статьи (12 кегль, жирн., прописные)
Инициалы, фамилия автор(ов) (12 кегль, жирн., прописные)
Место работы. (12 кегль, светлый курсив)
Аннотация на трех языках (на казахском, русском и английском, 10 кегль, объем 150-200 слов)
Ключевые слова на трех языках (на казахском, русском и английском, 10 кегль, прямым шрифтом, сами слова – светлым курсивым)
К статье прилагается рецензия доктора или кандидата наук.
Ф.И.О автора(ов) указываются без сокращений, место работы, почтовый и электронный адрес, а также служебные и мобильные номера телефонов.

Текст статьи (12 кегль). В статьях эксперементального характера должны быть разделы: Введение (без заголовка), Материал и методика исследований, Результаты и их обсуждение, Выводы. Подзаголовки набираются по центру. (12 кегль, жирным курсивым)

В рубрике «Естественные науки» латинские названия растений и животных, приводящиеся в тексте выделяются курсивым.

Таблицы и рисунки нумеруются в порядке упоминания их в тексте, каждая таблица и рисунок должны иметь свой заголовок (жирным строчным шрифтом), текст таблицы 10 шрифтом.

Сокращения. Разрешаются лишь общепринятые сокращения – названия мер, физических, химических и математических величин и терминов и т.п. Все сокращения должны быть расшифрованы, за исключением небольшого числа общеупотребительных. Названия учреждений при первом упоминании их в тексте даются полностью и сразу же в скобках приводится общепринятое сокращение.

Литература

Литература нумеруется размером шрифта 12 кегль, а ссылки внутри статьи указываются в квадратных скобках.

«Список литературы» - на оригинальном языке источников (казахском, русском и других не английских языках) оформляется в соответствии с ГОСТ 7.1-2003 «Библиографическая запись. Библиографическое описание. Общие требования и правила составления».

Латинизированный список литературы должен оформляться по шаблону: автор(-ы) (транслитерация, http://www.translit.ru). (Год выпуска в круглых скобках). Название статьи в транслитерированном варианте [перевод названия статьи на английский язык в квадратных скобках], название источника в транслитерированном варианте (либо английское название – если есть), выходные данные с обозначениями на английском языке.

Тематические рубрики журнала:

Физико-математические науки
Естественные науки
Технические науки
Филологические науки
История, философия и социология
Экономика и право
Педагогика и психология
Искусство, культура и спорт

Rules of submitting articles for publication in the scientific journal

"BULLETIN OF AKTOBE REGIONAL UNIVERSITY NAMED AFTER K. ZHUBANOV"

Registration of the manuscript

1. The article is to be submitted in electronic form (on mass storage devices) or by e-mail. The electronic version is to be made in Microsoft Word, 2010 format.
2. The manuscripts are to be carefully verified and edited by the authors.
3. The length of articles is to make up 3-10 pages (the text is typed by the Times New Roman font; font size-12; a line spacing – one-and-a-half; paragraph indention -1,25 cm). Margins: top, lower – 2 cm; left, right – 2 cm.

General order of an arrangement of parts of article

* IRSTI (Inter-state rubricator for scientific and technical information) (font size 12)
* Headline of the article (font size 12, bold type, capital letters)
* Initials, authors' surnames (font size 12, bold type, capital letters)
*Place of employment (font size 12, light italic)
*Abstracts in three languages (Kazakh, Russian and English, font size 10, length up to 150 units)
* Key words in three languages (Kazakh, Russian and English, font size 10,upright font, words – in light italic)
* A referee report of a Doctor or Candidate of Sciences is to be attached to the article.
*Tthe author(s)' names are to be written in full form, place of employment, a postal and e-mail address, and also office and mobile phone numbers.

The text of the article (font size 12). Articles of experimental character are to contain the following sections: Introduction (without heading), Material and technique of research, Results and their discussion, Conclusions. Subtitles are printed on the center. (font size 12, bold italic type). In the heading "Natural Sciences" the Latin names of plants and animals which are provided in the text are printed in italic type. .

Tables and drawings are numbered as their mention in the text, each table and drawing have to have the heading (bold lower case font), the text of the table is to be printed by font 10..

Abbreviations. Only the standard abbreviations – names of measures, physical, chemical and mathematical values and terms, etc. are allowed. All abbreviations are to be expanded, except for a small number of the most common ones. Names of institutions are to be given fully at their first mention in the text and at once the standard abbreviation is to be given in brackets.

List of references

The literature is numbered with a font size of 12 pins, and references within the article are indicated in square brackets.

"References" - in the original language of the sources (Kazakh, Russian and other non-English languages) is made out in accordance with STST 7.1-2003 "Bibliographic record. Bibliographic description.

The style of the Romanized list of literature (References): author (s) (transliteration, http://www.translit.ru). (year in parentheses). article title in transliterated version [translation of the article title into English in square brackets], name of the source (transliteration, or English name - if available), and notation in English.

Thematic sections of the journal:

Physical and Mathematical Sciences
Natural Sciences
Technical Sciences
Philological Sciences
History, Philosophy and Sociology
Economics and Law
Pedagogics and Psychology
Art, Culture and Sport

Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университетінің

ХАБАРШЫСЫ
ВЕСТНИК

Актюбинского регионального университета им.К.Жубанова

2005 жылдан бастап шығады   Издается с 2005 года

Үш айда бір рет шығады   Выходит один раз в три месяца

Редакция мекен-жайы:
030000, Ақтөбе қаласы,
Ә. Молдағұлова д-лы, 34
Қ. Жұбанов атындағы
Ақтөбе өңірлік университеті

Адрес редакции:
030000, город Актобе,
пр-т А. Молдагуловой, 34
Актюбинский региональный
Университет имени К. Жубанова

Телефон, факс: 8(7132) 241831, e-mail: vestnikarsu_aktobe@mail.ru

Жауапты редакторлар: Сатбай Ж.И.
Жауапты редактордың көмекшісі: Жантлеуова К.М.

Шығарылған күні 20.06.2022
Форматы А4. Көлемі 28,0 баспа табақ. Таралымы 300 дана.
Тапсырыс № 414 Бағасы келісім бойынша.
Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университетінің
Медиа орталығында басылды.
Мекен-жайы: Ақтөбе қаласы, Ә. Молдағұлова даңғылы, 34

Дата выхода 20.06.2022
Формат А4. Объем 28,0 п.л. Тираж 300 экз.
Заказ № 414 Цена договорная.
Отпечатано в Медиа центре
Актюбинского регионального университета имени К.Жубанова
Адрес: г. Актобе, пр-т А. Молдагуловой, 34