МРНТИ: 27.25.19

О ДИСКРЕТИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И ПРЕДЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АГРЕГАТА

А.Б. УТЕСОВ[0000-0002-9094-6750]*, **У. КАЙЫРБАЕВА**[0000-0003-3553-4507]

Актюбинский региональный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан

*e-mail: adilzhan_71@ mail. ru

Аннотация. Вычисление числовой информации общего вида $l^{(N)}(f) \equiv \left(l_N^{(1)}(f),..., l_N^{(N)}(f)\right)$ объема N об изучаемом операторе $T : F \to Y,$ где F есть заданный функциональный класс, $Y-$ заданное нормированное пространство, для каждого числа $i \in \{1,,2,..., N\}$ через $l_N^{(i)}(f)$ обозначено значение функционала $l_N^{(i)}$, определенного на функциональном классе $F,$ за редкими исключениями, не может быть точным. Поэтому, возникает задача нахождения предельной погрешности оптимального вычислительного агрегата, построенного по числовой информации $l^{(N)}(f),$ сохраняющей точный порядок погрешности восстановления оператора $T : F \to Y$ и неулучшаемой по порядку в метрике нормированного пространства Y. Конкретизируя функциональный класс $F,$ нормированное пространство $Y,$ оператор $T : F \to Y,$ функционалы $l_N^{(i)}, i = 1,2,..., N$ получаем различные задачи нахождения предельных погрешностей оптимальных вычислительных агрегатов. В настоящей статье в качестве класса используются 1– периодические многомерные классы Коробова E_s^r, в качестве пространства Y – пространство $L^{2,\infty}$ со смешанной нормой, в качестве оператора $T : F \to Y$ – решение задачи Коши для волнового уравнения с начальными условиями f_1 и f_2 из классов Коробова, а в качестве функционалов $l_N^{(i)}, i = 1,2,..., N$ рассматриваются тригонометрические коэффициенты Фурье функций f_1 и f_2 и предлагается для каждого решения, представляющегося в виде суммы абсолютно сходящихся кратных функциональных рядов, оптимальный вычислительный агрегат с погрешностью $\left(\varepsilon_{\overline{N}_1}, \varepsilon_{\overline{N}_2}\right)$, сохраняющая точный порядок дискретизации и неулучшаемая по порядку в степенной шкале в метрике нормированного пространства $L^{2,\infty}$.

Ключевые слова. Дискретизация решений волнового уравнения, предельная погрешность, вычислительный агрегат.

Пусть $u(x,t) \equiv u(x,t; f_1, f_2)$ есть решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}\ (0\le t\le 1, x=(x_1,\ldots,x_s)\in R^s)$$

с начальными условиями $u(x,0)=f_1(x)$ и $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=f_2(x).$

В данной работе найдена предельная по порядку в степенной шкале погрешность некоторого оптимального вычислительного агрегата (см.приведенную ниже теорему 1),полученного при оптимальной дискретизации решений $u(x,t)\equiv u(x,t;\, f_1, f_2)$ в метрике пространства $L^{2,\infty}$ вычислительными агрегатами, построенными по тригонометрическим коэффициентам Фурье начальных условий $f_1(x)\in E_s^{r_1}(0,1)^s$ и $f_2(x)\in E_s^{r_2}(0,1)^s$, где $E_s^r\equiv E_s^r(0,1)^s$ есть 1 – периодический класс Коробова (определение класса Коробова и пространства $L^{q,\infty}, 1\le q\le\infty$ см. напр. в [1,стр. 13 – 14]).

Пусть даны целые положительные числа $N_i(i=1,2)$, $F_i(i=1,2)$ – класс функций, заданных на Ω_i , $Y-$ нормированное пространство функций,заданных на Ω_Y. Числовая информация $l^{(N_1,N_2)}=\left(l_1^{(1)}(f_1),\ldots,l_1^{(N_1)}(f_1),l_2^{(1)}(f_2),\ldots,l_2^{(N_2)}(f_2)\right)$

объема $N=N_1+N_2$ о начальных условиях $f_1\in F_1$ и $f_2\in F_2$ снимается с функционалов $l_1^{(1)}:F_1\mapsto C,\ldots, l_1^{(N_1)}:F_1\mapsto C$ и $l_2^{(1)}:F_2\mapsto C,\ldots, l_2^{(N_2)}:F_2\mapsto C$ соответственно.

Алгоритм переработки информации $\varphi_N(z_1,\ldots,z_N;\cdot):C^N\times\Omega_Y\mapsto C$ есть соответствие, которое при всяком фиксированном $(z_1,\ldots,z_N)\in C^N$ как функция от $(\cdot)$ есть элемент Y. Далее, $\left(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N\right)$ есть вычислительный агрегат дискретизации, действующий по правилу $\varphi_N\left(l_1^{(1)}(f_1),\ldots,l_1^{(N_1)}(f_1),l_2^{(1)}(f_2),\ldots,l_2^{(N_2)}(f_2);\cdot\right)$, а $D_{(N_1,N_2)}$ есть множество всех вычислительныхагрегатов $\left(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N\right)$.

Для заданных F_1 ,F_2 , Y и $D_N=\bigcup\limits_{\substack{N_1+N_2=N,\\ N_1,N_2=1,2,\ldots}} D_{(N_1,N_2)}$ положим

$$\delta_N(D_N;F_1:F_2)_Y = \min_{N_1+N_2=N\left(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N\right)\in D_N} \inf \delta_N\left(\left(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N\right);F_1,F_2\right)_Y,$$

где $\delta_N\left(\left(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N\right);F_1;F_2\right)_Y = \sup\limits_{(f_1,f_2)\in F_1\times F_2}\Big\| u(\cdot;f_1,f_2)-\varphi_N\Big(l_1^{(1)}(f_1),$

$$,\ldots,l_1^{(N_1)}(f_1),l_2^{(1)}(f_2),\ldots,l_2^{(N_2)}(f_2);\cdot\Big)\Big\|_Y.$$

Вычислительный агрегат $\left(\bar{l}^{(\bar{N}_1,\bar{N}_2)},\bar{\varphi}_N\right)$ называется оптимальным, если для некоторой положительной последовательности $\{\psi_N\}_{N\ge 1}$ имеют место соотношения

$$\delta_N(D_N;F_1;F_2)_Y \succ\prec \delta_N\left(\left(\bar{l}^{(\bar{N}_1,\bar{N}_2)},\bar{\varphi}_N\right);F_1;F_2\right)\succ\prec\psi_N.$$

Следуя работам [2] и [3], а также используя вышеприведенные определенияи обозначения, примем следующие определения 1 и 2:

Определение 1. Пара $\left(\varepsilon_{\bar{N}_1},\varepsilon_{\bar{N}_2}\right)$ положительных последовательностей $\varepsilon_{\bar{N}_1}$ и $\varepsilon_{\bar{N}_2}$ называется погрешностьюоптимального вычислительного агрегата $\left(\bar{l}^{(\bar{N}_1,\bar{N}_2)},\bar{\varphi}_N\right)$, если

$$\Delta_N\left(\left(\varepsilon_{\bar{N}_1},\varepsilon_{\bar{N}_2}\right);\left(\bar{l}^{(\bar{N}_1,\bar{N}_2)},\bar{\varphi}_N\right);F_1;F_2\right)_Y\succ\prec\psi_N,$$

где $\Delta_N\left(\left(\varepsilon_{\bar{N}_1},\varepsilon_{\bar{N}_2}\right);\left(\bar{l}^{(\bar{N}_1,\bar{N}_2)},\bar{\varphi}_N\right);F_1,F_2\right)_Y =$

$$= \sup_{(f_1,f_2)\in F_1\times F_2}\ \sup_{\left|\gamma_1^{(1)}\right|\le 1,\ldots,\left|\gamma_1^{(N_1)}\right|\le 1,\left|\gamma_2^{(1)}\right|\le 1,\ldots,\left|\gamma_2^{(N_2)}\right|\le 1}\Big\|u(\cdot;f_1,f_2)-\bar{\varphi}_N\Big(\bar{l}_1^{(1)}(f_1)+$$

$$+\gamma_1^{(1)}\varepsilon_{\bar{N}_1},\ldots,\bar{l}_1^{(N_1)}(f_1)+\gamma_1^{(N_1)}\varepsilon_{\bar{N}_1},\bar{l}_2^{(1)}(f_2)+\gamma_2^{(1)}\varepsilon_{\bar{N}_2},\ldots,\bar{l}_2^{(N_2)}(f_2)+\gamma_2^{(N_2)}\varepsilon_{\bar{N}_2};\cdot\Big)\Big\|_Y.$$

Определение 2. Погрешность $\left(\varepsilon_{\overline{N}_1}, \varepsilon_{\overline{N}_2}\right)$ называется предельной по порядку в степенной шкале, если для всяких $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$ имеет место равенство

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{\Delta_N\left(\left(\overline{N}_1^{\alpha_1}\varepsilon_{\overline{N}_1}, \overline{N}_2^{\alpha_2}\varepsilon_{\overline{N}_2}\right); \left(\bar{l}^{(\overline{N}_1,\overline{N}_2)}, \overline{\varphi}_N\right); F_1, F_2\right)_Y}{\psi_N} = +\infty.$$

Из теорем 3.2.3 и 3.3.3, сформулированных и доказанных в работе [4, стр.60 и 63], вытекает следующая

Теорема 1. Пусть даны целые $s \geq 1, N \geq 2$ и пусть $\Phi_N = \bigcup\limits_{\substack{N_1+N_2=N,\\ N_1,N_2=1,2,\ldots}} \Phi_{(N_1,N_2)}$, где $\Phi_{(N_1,N_2)}$ есть множество вычислительных агрегатов $\left(l^{(N_1,N_2)};\varphi_N\right)$ сфункционалами $l_1^{(1)}(f_1) = \hat{f}_1\left(m_1^{(1)}\right),\ldots, l_1^{(N_1)}(f_1) = \hat{f}_1\left(m_1^{(N_1)}\right)$, $l_2^{(1)}(f_2) = \hat{f}_2\left(m_2^{(1)}\right),\ldots,$ $l_2^{(N_2)}(f_2) = \hat{f}_2\left(m_2^{(N_2)}\right)$. Тогда при выполнении условий $r_1 > 3, r_2 \geq r_1 - 1/s$ для всех N имеют место соотношения

$$\delta_N\left(\Phi_N; E_s^{r_1}; E_s^{r_1}\right)_{L^{2,\infty}} \asymp \delta_N\left(\left(\bar{l}^{(\overline{N}_1,\overline{N}_2)}, \overline{\varphi}_N\right); E_s^{r_1}; E_s^{r_1}\right)_{L^{2,\infty}} \asymp \frac{\ln^{r_1(s-1)} N}{N^{r_1-1/2}},$$

причем оптимальныйвычислительный агрегат $\left(\bar{l}^{(\overline{N}_1,\overline{N}_2)}, \overline{\varphi}_N\right)$ определяется равенством

$$\left(\bar{l}^{(\overline{N}_1,\overline{N}_2)}, \overline{\varphi}_N\right)(x,t) = \sum_{m\in\Gamma_{\bar{n}_1}} \hat{f}_1(m)\cos\left(2\pi\sqrt{m_1^2+\ldots+m_s^2}\cdot t\right) +$$

$$+\hat{f}_2(0)\cdot t + \sum_{m\in\Gamma_{\bar{n}_2}} \hat{f}_2(m)\frac{\sin\left(2\pi\sqrt{m_1^2+\ldots+m_s^2}\cdot t\right)}{2\pi\sqrt{m_1^2+\ldots+m_s^2}},$$

здесь целые положительные $\overline{N}_1$ и $\overline{N}_2$ такие, что $\overline{N}_1+\overline{N}_2 = N$,

$$\min_{\substack{N_1+N_2=N,\\ N_1,N_2=1,2,\dots}}\left(\frac{(\ln N_1)^{r_1(s-1)}}{N_1^{r_1-1/2}}+\frac{(\ln N_2)^{(r_2+1/s)(s-1)}}{N_2^{r_2-1/2+1/s}}\right)=$$

$$=\frac{(\ln \overline{N}_1)^{r_1(s-1)}}{\overline{N}_1^{r_1-1/2}}+\frac{(\ln \overline{N}_2)^{(r_2+1/s)(s-1)}}{\overline{N}_2^{r_2-1/2+1/s}},$$

а целые положительные числа $\overline{n}_i=\overline{n}_i(\overline{N}_i,s)\,(i=1,2)$ выбираются из условий

$$\left|\Gamma_{\overline{n}_1}\right|\le \overline{N}_1<\left|\Gamma_{\overline{n}_1+1}\right|,\left|\Gamma_{\overline{n}_2}\right|\le \overline{N}_2<\left|\Gamma_{\overline{n}_2+1}\right|.$$

где $\Gamma_n=\{m=(m_1,\dots,m_s)\in Z^s:\overline{m}_1\dots\overline{m}_s\le 2^n, n=1,2,\dots\}$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 2. Пусть $s=3,4,\dots$ и $r_1>3, r_2\ge r_1-1/s.$ Тогда пара $\left(\varepsilon_{\overline{N}_1},\varepsilon_{\overline{N}_2}\right)$ с

компонентами $\varepsilon_{\overline{N}_1}=(\ln\overline{N}_1)^{r_1(s-1)}\cdot\overline{N}_1^{-(r_1-1)}$ и $\varepsilon_{\overline{N}_2}=(\ln\overline{N}_2)^{(r_2+1/2)(s-1)}\cdot\overline{N}_2^{-r_2}$

является погрешностью оптимального вычислительного агрегата $\left(\bar{l}^{(\overline{N}_1,\overline{N}_2)},\overline{\varphi}_N\right)$ и для

всяких $\alpha_1>0$ и $\alpha_2>0$ имеет место равенство

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}}\frac{\Delta_N\left(\left(\overline{N}_1^{\alpha_1}\varepsilon_{\overline{N}_1},\ \overline{N}_2^{\alpha_2}\varepsilon_{\overline{N}_2}\right);\left(\bar{l}^{(\overline{N}_1,\overline{N}_2)},\overline{\varphi}_N\right);E_s^{r_1},E_s^{r_12}\right)_{L^{2,\infty}}}{\psi_N}=+\infty,$$

где $\psi_N=\dfrac{\ln^{r_1(s-1)}N}{N^{r_1-1/2}}.$

Список литературы

1. Темиргалиев Н. Дискретизация решений уравнений в частных производных в контексте компьютерного (вычислительного) поперечника / Н. Темиргалиев, Г.Е. Таугынбаева, Ш.К. Абикенова // Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева — 2019. — №1 (126). — С. 8 – 51.

2. Temirgaliev N. Discretization of Solutions to a Wave Equation, Numerical Differentiation and Function Recovery with the Help of Computer (Computing) Diameter / N. Temirgaliev, Sh.K. Abikenova, A.Zh Zhubanysheva, G.E. Taugynbaeva // Russian Mathematics (Iz. VUZ). — 2013. — 57(8). — P. 75–80.

3. Temirgaliev N. Exact Orders of Computational Croos – Sections in Problems of Reconstructing Functions and Sampling Solutions of the Klein– Gordon Equation from Fourier Coeffcients / N. Temirgaliev, K.E. Sherniyazov, M.E. Berikhanova // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Suppelementary issues). —2013. — 282, suppl. 1. — P. 165–191.

4. Абикенова Ш.К. Дискретизация периодических решений волнового уравнения с начальными условиями из классов $W_2^r(0,1)^s, W_2^{\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_s}}(0,1)^s$ и E_s^r. Дисс. на соиск. уч. степ. к.ф.-м.н. / Ш.К. Абикенова. — Астана, 2010.

References

1. Temirgaliev N., Taugynbaeva G.E., Abikenova SH.K. (2019). Diskretizaciya reshenij uravnenij v chastnyh proizvodnyh v kontekste Komp'yuternogo (vychislitel'nogo) poperechnika [Discretization of solutions of partial differential equations in the context of Computer (computational) diameter] Vestnik ENU im. L.N.Gumileva [in Russian].

2. Temirgaliev N., Abikenova Sh.K., Zhubanysheva A.Zh., Taugynbaeva G.E. (2013). Discretization of Solutions to a Wave Equation, Numerical Differentiation and Function Recovery with the Help of Computer (Computing) Diameter. Russian Mathematics (Iz. VUZ).

3. Temirgaliev N., Sherniyazov K.E., Berikhanova M.E. (2013) Exact Orders of Computational Croos – Sections in Problems of Reconstructing Functions and Sampling Solutions of the Klein– Gordon Equation from Fourier Coeffcients. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Suppelementary issues).

4. Abikenova SH.K. (2010) Diskretizaciya periodicheskih reshenij volnovogo uravneniya s nachal'nymi usloviyami iz klassov $W_2^r(0,1)^s, W_2^{\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_s}}(0,1)^s$ i E_s^r. [Discretization of periodic solutions of the wave equation with initial conditions from the classes $W_2^r(0,1)^s, W_2^{\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_s}}(0,1)^s$ and E_s^r] Diss. na soisk. uch. step. k.f.-m.n. [in Russian].

ТОЛҚЫНДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ ШЕШІМДЕРІН ДИСКРЕТИЗАЦИЯЛАУ ЖӘНЕ ОПТИМАЛДЫ ЕСЕПТЕУ АГРЕГАТЫНЫҢ ШЕКТІК ҚАТЕЛІГІ ТУРАЛЫ

Ә.Б. ӨТЕСОВ*, Ұ.Ж. ҚАЙЫРБАЕВА

Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Казахстан

*e-mail: adilzhan_71@ mail. ru

Аңдатпа. Зерттелуге тиіс $T:F\to Y$ операторынан алынған N көлемді жалпы түрдегі $l^{(N)}(f)\equiv\left(l_N^{(1)}(f),..., l_N^{(N)}(f)\right)$ сандық мәліметтерін, мұнда F – алдын ала берілген функционалдық класс, $Y-$ алдын ала берілген нормаланған кеңістік, әрбір $i\in\{1,,2,...,N\}$ үшін $l_N^{(i)}(f)$ арқылы функционалдық F класында анықталған $l_N^{(i)}$ функционалының мәні белгіленген, есептеу әрдайым мүмкін немесе дәл бола бермейді. Сондықтан $l^{(N)}(f)$ сандық мәліметтері бойынша құрылған оптималды есептеу агрегатының нормаланған Y кеңістігі метрикасында $T:F\to Y$ операторының қалыптастыру қателігінің дәл ретін сақтайтын және реті бойынша жақсармайтын қателігін табу есебі туындайды. Функционалдық F класын, нормаланған Y кеңістігін, $T:F\to Y$ операторын, $l_N^{(i)}, i=1,2,...,N$ функционалдарын нақтылай отырып, оптималды есептеу агрегаттрының шектік қателерін табу бойынша әртүрлі есептер аламыз. Бұл мақалада класс ретінде 1 – периодты көпөлшемді Коробовтың E_s^r кластары, Y кеңістігі ретінде аралас нормалы $L^{2,\infty}$ кеңістігі, $T:F\to Y$ операторы ретінде алғашқы f_1 және f_2 шарттары 1– периодты көпөлшемді Коробов кластарында жататын толқындық теңдеудің Коши есебінің шешімі, ал $l_N^{(i)}, i=1,2,...,N$ функционалдары ретінде f_1 және f_2 функцияларының тригонометриялық Фурье коэффициенттері қарастырылып, абсолютті жинақталатын еселі функционалдық қатар түріндегі әрбір шешім үшін $L^{2,\infty}$ нормаланған кеңістігі метрикасында оптималды, шектік қателігі $\left(\varepsilon_{\overline{N}_1},\varepsilon_{\overline{N}_2}\right)$ болатын және дәрежелік шкалада реті бойынша жақсармайтын дискретизациялау агрегаты ұсынылды.

Түйін сөздер. Толқындық теңдеудің шешімдерін дискретизациялау, шектік қателік, есептеу агрегаты.

ON DISCRETIZATIONOF SOLUTIONS OF THE WAVE EQUATION AND THE LIMITING ERROR OF THE OPTIMAL COMPUTING UNIT

A.B. UTESSOV*, U. KAIYRBAYEVA
K. Zhubanov Aktobe regional university, Aktobe, Kazakhstan
*e-mail: adilzhan_71@ mail. ru

Abstract. The calculation of the numerical information of the general form $l^{(N)}(f) \equiv \left(l_N^{(1)}(f),..., l_N^{(N)}(f) \right)$ of the volume N about the operator $T: F \to Y$ under study, where F is a given functional class, Y is a given normalized space For each number $i \in \{1,,2,..., N\}$ denotes $l_N^{(i)}(f)$ the value of the functional $l_N^{(i)}$, defined on the functional class F with rare exceptions, cannot be exact. Therefore, the problem arises of finding the limiting error of the optimal computing unit constructed from numerical information $l^{(N)}(f)$, that preserves the exact order of the operator $T: F \to Y$ recovery error and is unimprovable in order in the metric of the normalized space Y. Concretizing the functional class F, the normalized space Y, the operator $T: F \to Y$, functionals $l_N^{(i)}, i = 1,2,..., N$ we obtain various different problems of finding the limiting errors of optimal computing units. In this article, as a class F we use 1 - periodic multidimensional Korobov classes E_s^r, as a space Y - a space $L^{2,\infty}$ with a mixed norm, as an operator $T: F \to Y$ - a solution of the Cauchy problem for a wave equation with initial conditions f_1 and f_2 from Korobov classes and as functionals $l_N^{(i)}, i = 1,2,..., N$ we consider the trigonometric Fourier coefficients of functions f_1 and f_2 and it is proposed for each solution, which is represented as a sum of absolutely converging multiple functional series, an optimal computing unit with an error $\left(\varepsilon_{\overline{N}_1}, \varepsilon_{\overline{N}_2} \right)$, that preserves the exact discretization order and is unimprovable in order on a power scale in the metric of a normalized space $L^{2,\infty}$.

Key words. Discretization of solutions of the wave equation, limiting error, computing unit.