**МРНТИ 27.29.25**

# ФРЕДГОЛЬМ ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІ ҮШІН ҮШНҮКТЕЛІ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІ ТУРАЛЫ

**А.Т. АСАНОВА**[1,*][0000-0001-8697-8920]**, А.А. ЕРМЕК**[1,2][0000-0001-7737-3460]

[1]Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан,

[2]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

[*]e-mail: anartasan@gmail.com

**Андатпа.** Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін үшнүктелі шеттік есеп қарастырылды. Берілген аралықты екі бөлікке бөлу арқылы екі ішкіаралық алынды. Берілген фунцияның ішкіаралықтардағы сығылуы арнайы белгілеумен белгіленді. Үшнүктелі шеттік есебі пара-пар есепке көшірілді. Қосымша параметрлер енгізіле отырып, ішкіаралықтарда алмастырулар жүргізілді. Қарастырылып отырған есеп параметрлері бар шеттік есепке пара-пар болды. Арнайы Коши есебінің шешімі интегралдық-дифференциалдық теңдеулері және бастапқы шарттар арқылы фундаменталды матрица көмегімен жазылды. Параметрі бар есептің кейіптемелеріне әртүрлі түрлендірулер қолданылды. Кейіптемелердегі өрнектерді ықшамдау мақсатында арнайы белгілеулер енгізілді. Матрица қайтарымды деп жорамалданды. Өрнектердің аралықтағы шеткі нүктелеріндегі шектері табылды. Шектердің мәндерін шеттік және үзіліссіздік шарттарына қойылды. Параметрлерге сәйкес теңдеулер жүйесі алынды. Теорема тұжырылымдалды. Коши есебінің шешімі параметрдің бекітілген мәндерінде фундаменталды матрица арқылы жазылынды. Алынған есептердің пара – парлығы шығарылды. Берілген бастапқы есептің шешімінің жалғыз екені көрсетілді. Қарсы жору әдісі қолданылды. Шешімдер жұбы алынды. Арнайы Коши есептерінің шешімін фундаменталды матрица арқылы жазылды. Параметрлерге қатысты екі түрлі теңдеулер жүйесі алынды. Біртекті теңдеулер жүйесі құрылды. Теорема шарты бойынша қарастырылып отырған матрицаның қайтарымды екені ескерілді. Біртекті алгебралық теңдеулер жүйесінің тек нөлдік шешімі бар болатыны дәлелденді. Параметрлеу әдісінің алгоритмін қолдану арқылы берілген есептің шешілімдік шарттары зерттелінді.

**Түйін сөздер:** үшнүктелі шеттік есеп, параметр, пара- парлық, алгоритм, параметрлеу әдісі, арнайы Коши есебі.

## 1 Кіріспе

Дифференциалдық және интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есепті шешу мен зерттеудің сындарлы әдістерінің бірі – профессор Дулат Джумабаев ұсынған параметрлеу әдісі болып саналады [16]. [17]-[20] еңбектерінде параметрлеу әдісі Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін қос нүктелі шеттік есепті шешуге қолданылған еді. Аталған жұмыстарда осы есептің шешілімділігі мен бірмәнді шешілімділігі критерийлері орнатылды. Нәтижелер параметрлеу әдісіне және жалпы шешімнің жаңа концепциясына негізделген Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін қос нүктелі шеттік есептің жуықтау және сандық шешімдерін табудың алгоритмдері [21]-[23] еңбектерінде жетілдірілді.

Оған қоса әзірленген әдістер мен нәтижелер жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін көп нүктелі шеттік есепті [4] және Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін параметрі бар шеттік есепті [3] зерттеуде қолданылды.

Осы жұмыста Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін келесі сызықты үш нүктелі шеттік есеп зерттеледі. Параметрлеу әдісінің көмегімен осы есептің шешілімділік шарттары тағайындалады және жуық шешімдерін табу алгоритмдері ұсынылады.

## 2 Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін үш нүктелі шеттік есептің бірмәнді шешілімділігі

$\left[0,T\right]$ аралығында (1), (2) Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты шеттік есебін қарастырайық.

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x+\varphi(t)\int_0^T\psi(s)x(s)ds+f(t),\ x\in R^n,\ t\in\left[0,T\right] \tag{1}$$

$$Bx(0)+C_0x(t_1)+Cx(T)=d,\ d\in R^n, \tag{2}$$

мұндағы $x(t)=colon\left(x_1(t),x_2(t),...,x_n(t)\right)$ - белгісіз функция, $A(t)$ - $(n\times n)$ өлшемді матрицасы, $n$ өлшемді $f(t)$ векторы, $\varphi(t),\psi(s)$ матрицалары $\left[0,T\right]$-да үзіліссіз, $B,C_0,C$ - $(n\times n)$ өлшемді тұрақты матрицалар.

(1), (2) есебінің шешімі деп - (1) интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесін тепе-теңдікке айналдыратын, (2) шеттік шартын қанағаттандыратын $\left[0,T\right]$ аралығында үзіліссіз және үзіліссіз дифференциалданатын $x(t)$ вектор- функциясын айтады.

(1), (2) есебі параметрлеу әдісімен [1] зерттеледі. $0$, $0<t_1<T$, $T$ нүктелерін және $\left[0,T\right)$ аралығының екі ішкіаралыққа бөлінуін қарастырайық. $x(t)$ функциясының $[0,t_1)$ және $[t_1,T)$ ішкіаралықтарына сығылуын сәйкесінше $x_1(t),x_2(t)$ делік:

$$x_1(t)=x(t),\quad t\in\left[0,t_1\right),\qquad x_2(t)=x(t),\quad t\in\left[t_1,T\right).$$

$x\left[t\right]=\left(x_1(t),x_2(t)\right)$ функциялар жүйесі болып табылады және $\exists\lim\limits_{t\to t_1-0}x_1(t)$ , $\exists\lim\limits_{t\to T-0}x_2(t)$ орындалады. Онда (1), (2) үш нүктелі шеттік есебі келесі пара-пар есепке көшеді:

$$\frac{dx_1}{dt}=A(t)x_1(t)+\varphi(t)\left[\int_0^{t_1}\psi(s)x_1(s)ds+\int_{t_1}^T\psi(s)x_2(s)ds\right]+f(t),\quad t\in\left[0,t_1\right),$$

$$\frac{dx_2}{dt}=A(t)x_2(t)+\varphi(t)\left[\int_0^{t_1}\psi(s)x_1(s)ds+\int_{t_1}^T\psi(s)x_2(s)ds\right]+f(t),\quad t\in\left[t_1,T\right), \tag{3}$$

$$Bx_1(0)+C_0x_2(t_1)+C\lim_{t\to T-0}x_2(t)=d, \tag{4}$$

$$\lim_{t\to t_1-0}x_1(t)=x_2(t_1). \tag{5}$$

Енді $\lambda_1 = x_1(0)$, $\lambda_2 = x_2(t_1)$ қосымша параметрлерін еңгізе отырып, сәйкес $[0,t_1)$ және $[t_1,T)$ ішкіаралықтарында $u_1(t) = x_1(t) - \lambda_1$, $t \in [0,t_1)$, $u_2(t) = x_2(t) - \lambda_2$, $t \in [t_1,T)$, алмастыруларын жүргіземіз.

Сонда $x_1(t) = u_1(t) + \lambda_1$, $t \in [0,t_1)$, $x_2(t) = u_2(t) + \lambda_2$, $t \in [t_1,T)$ екені шығады.

(3)-(5) есебі келесі параметрлері бар шеттік есепке пара-пар болады:

$$\frac{du_1}{dt} = A(t)u_1(t) + A(t)\lambda_1 + \varphi(t)\left[\int_0^{t_1}\psi(s)ds\cdot\lambda_1 + \int_{t_1}^{T}\psi(s)ds\cdot\lambda_2\right] + f(t) +$$

$$+\varphi(t)\left[\int_0^{t_1}\psi(s)u_1(s)ds + \int_{t_1}^{T}\psi(s)u_2(s)ds\right], \qquad t \in [0,t_1),$$

$$\frac{du_2}{dt} = A(t)u_2(t) + A(t)\lambda_2 + \varphi(t)\left[\int_0^{t_1}\psi(s)ds\cdot\lambda_1 + \int_{t_1}^{T}\psi(s)ds\cdot\lambda_2\right] + f(t) +$$

$$+\varphi(t)\left[\int_0^{t_1}\psi(s)u_1(s)ds + \int_{t_1}^{T}\psi(s)u_2(s)ds\right], \qquad t \in [t_1,T), \tag{6}$$

$$u_1(0) = 0, \ u_2(t_1) = 0 \tag{7}$$

$$B\lambda_1 + C_0\lambda_2 + C\lim_{t\to T-0}u_2(t) + C\lambda_2 = d, \tag{8}$$

$$\lim_{t\to t_1-0}u_1(t) + \lambda_1 = \lambda_2. \tag{9}$$

(6), (7) арнайы Коши есебінің шешімін (6) интегралдық-дифференциалдық теңдеулері және бастапқы шарт $u_1(0) = 0$, $u_2(t_1) = 0$ екенін есере отырып, фундаменталды матрица көмегімен жазайық:

$$u_1(t) = X_1(t)\int_0^t X_1^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau\cdot\lambda_1 + X_1(t)\int_0^t X_1^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\left[\int_0^{t_1}\psi(s)u_1(s)ds + \int_{t_1}^{T}\psi(s)u_2(s)ds\right]d\tau +$$

$$+X_1(t)\int_0^t X_1^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\left[\int_0^{t_1}\psi(s)ds\cdot\lambda_1 + \int_{t_1}^{T}\psi(s)ds\cdot\lambda_2\right]d\tau + X_1(t)\int_0^t X_1^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \ t \in [0,t_1), \tag{10}$$

$$u_2(t) = X_2(t)\int_0^t X_2^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau\cdot\lambda_2 + X_2(t)\int_0^t X_2^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\left[\int_0^{t_1}\psi(s)u_1(s)ds + \int_{t_1}^{T}\psi(s)u_2(s)ds\right]d\tau +$$

$$+X_2(t)\int_0^t X_2^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\left[\int_0^{t_1}\psi(s)ds\cdot\lambda_1 + \int_{t_1}^{T}\psi(s)ds\cdot\lambda_2\right]d\tau + X_2(t)\int_0^t X_2^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \ t \in [t_1,T). \tag{11}$$

Енді (10), (11)-ді $\psi(\tau_1)$-ге көбейтіп, және (10)-дан $t \in [0,t_1)$ бойынша, ал (11)-дан $t \in [t_1,T)$ бойынша интеграл алып, t айнымалысын $\tau_1$-ге айнымалысына ауыстырамыз:

$$\int_0^{t_1}\psi(\tau_1)u_1(\tau_1)d\tau_1 = \int_0^{t_1}\psi(\tau_1)X_1(\tau_1)\int_0^{\tau_1}X_1^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau d\tau_1\cdot\lambda_1 +$$

$$+\int_0^{t_1}\psi(\tau_1)X_1(\tau_1)\int_0^{\tau_1}X_1^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau d\tau_1\left[\int_0^{t_1}\psi(s)u_1(s)ds + \int_{t_1}^{T}\psi(s)u_2(s)ds\right] +$$

$$+\int_0^{t_1}\psi(\tau_1)X_1(\tau_1)\int_0^{\tau_1}X_1^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\left[\int_0^{t_1}\psi(s)ds\cdot\lambda_1 + \int_{t_1}^{T}\psi(s)ds\cdot\lambda_2\right]d\tau d\tau_1 +$$

$$+\int_0^{t_1}\psi(\tau_1)X_1(\tau_1)\int_0^{\tau_1}X_1^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau d\tau_1, \tag{12}$$

$$\int_{t_1}^{T}\psi(\tau_1)u_2(\tau_1)d\tau_1=\int_{t_1}^{T}\psi(\tau_1)X_2(\tau_1)\int_0^{\tau_1}X_2^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau d\tau_1\cdot\lambda_2+$$
$$+\int_{t_1}^{T}\psi(\tau_1)X_2(\tau_1)\int_0^{\tau_1}X_2^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau d\tau_1\left[\int_0^{t_1}\psi(s)u_1(s)ds+\int_{t_1}^{T}\psi(s)u_2(s)ds\right]+$$
$$+\int_{t_1}^{T}\psi(\tau_1)X_2(\tau_1)\int_0^{\tau_1}X_2^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\left[\int_0^{t_1}\psi(s)ds\cdot\lambda_1+\int_{t_1}^{T}\psi(s)ds\cdot\lambda_2\right]d\tau d\tau_1+$$
$$+\int_{t_1}^{T}\psi(\tau_1)X_2(\tau_1)\int_0^{\tau_1}X_2^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau d\tau_1. \tag{13}$$

Келесі белгілеулер енгізейік:

$$G=\int_0^{t_1}\psi(\tau_1)X_1(\tau_1)\int_0^{\tau_1}X_1^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau d\tau_1+\int_{t_1}^{T}\psi(\tau_1)X_2(\tau_1)\int_0^{\tau_1}X_2^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau d\tau_1$$

$$V_1=\int_0^{t_1}\psi(\tau_1)X_1(\tau_1)\int_0^{\tau_1}X_1^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau d\tau_1+\int_0^{t_1}\psi(\tau_1)X_1(\tau_1)\int_0^{\tau_1}X_1^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\int_0^{t_1}\psi(s)ds d\tau d\tau_1+$$
$$+\int_{t_1}^{T}\psi(\tau_1)X_2(\tau_1)\int_0^{\tau_1}X_2^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\int_0^{t_1}\psi(s)ds d\tau d\tau_1$$

$$V_2=\int_{t_1}^{T}\psi(\tau_1)X_2(\tau_1)\int_0^{\tau_1}X_2^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau d\tau_1+\int_0^{t_1}\psi(\tau_1)X_1(\tau_1)\int_0^{\tau_1}X_1^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\int_{t_1}^{T}\psi(s)ds d\tau d\tau_1+$$
$$+\int_{t_1}^{T}\psi(\tau_1)X_2(\tau_1)\int_0^{\tau_1}X_2^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\int_{t_1}^{T}\psi(s)ds d\tau d\tau_1$$

$$g=\int_0^{t_1}\psi(\tau_1)X_1(\tau_1)\int_0^{\tau_1}X_1^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau d\tau_1+\int_{t_1}^{T}\psi(\tau_1)X_2(\tau_1)\int_0^{\tau_1}X_2^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau d\tau_1. \tag{14}$$

$\int_0^{t_1}\psi(\tau_1)u_1(\tau_1)d\tau_1+\int_{t_1}^{T}\psi(\tau_1)u_2(\tau_1)d\tau_1$ өрнегін $\mu$ деп белгілейміз. Енді (12) және (13) теңдеулерін қосып, келесі өрнекті аламыз:

$$\mu=G\cdot\mu+V_1\cdot\lambda_1+V_2\cdot\lambda_2+g\ . \tag{15}$$

Осы жерден $\mu$ -ды анықтайтын болсақ, $[I-G]\mu=V_1\cdot\lambda_1+V_2\cdot\lambda_2+g$ өрнегін аламыз.

$[I-G]$ матрицасы қайтарымды деп жорамалдайық. $[I-G]^{-1}=M$ деп белгілеп алсақ, онда (15) өрнегі келесі түрде жазылады:

$$\mu=M[V_1\cdot\lambda_1+V_2\cdot\lambda_2+g]=M\cdot V_1\cdot\lambda_1+M\cdot V_2\cdot\lambda_2+M\cdot g\ . \tag{16}$$

Келесі белгілеулерді қолданамыз:

$$D_{11}(t)=X_1(t)\int_0^{t}X_1^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau+X_1(t)\int_0^{t}X_1^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau\cdot M\cdot V_1+$$
$$+X_1(t)\int_0^{t}X_1^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau\cdot\int_0^{t_1}\psi(s)ds ,$$

$$D_{12}(t)=X_1(t)\int_0^t X_1^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\cdot M\cdot V_2+X_1(t)\int_0^t X_1^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\cdot\int_{t_1}^T\psi(s)ds,$$

$$F_1(t)=X_1(t)\int_0^t X_1^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau\cdot M\cdot g+X_1(t)\int_0^t X_1^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,$$

$$D_{21}(t)=X_2(t)\int_0^t X_2^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau+X_2(t)\int_0^t X_2^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau\cdot M\cdot V_1+$$

$$+X_2(t)\int_0^t X_2^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau\cdot\int_0^{t_1}\psi(s)ds,$$

$$D_{22}(t)=X_2(t)\int_0^t X_2^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\cdot M\cdot V_2+X_2(t)\int_0^t X_2^{-1}(\tau)\varphi(\tau)\cdot\int_{t_1}^T\psi(s)ds,$$

$$F_2(t)=X_2(t)\int_0^t X_2^{-1}(\tau)\varphi(\tau)d\tau\cdot M\cdot g+X_2(t)\int_0^t X_2^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Енді (10), (11)-дегі $\left[\int_0^{t_1}\psi(s)u_1(s)ds+\int_{t_1}^T\psi(s)u_2(s)ds\right]$ қосындысының орнына (16) өрнегінің оң жағындағы мәнді қойып және белгілеулерді ескеріп, келесідей түрде жаза аламыз:

$$u_1(t)=D_{11}(t)\lambda_1+D_{12}(t)\lambda_2+F_1(t),\quad t\in[0,t_1),\tag{17}$$

$$u_2(t)=D_{21}(t)\lambda_1+D_{22}(t)\lambda_2+F_2(t),\quad t\in[t_1,T).\tag{18}$$

Енді $D_{11}(t),D_{12}(t),F_1(t),D_{21}(t),D_{22}(t),F_2(t)$ сәйкес $[0,t_1)$ және $[t_1,T)$ ішкіаралықтарында үзіліссіз екенін ескеріп, (17), (18) өрнектерінен аралықтардың шеткі нүктелеріндегі шектерін табамыз:

$$\lim_{t\to t_1-0}u_1(t)=D_{11}(t_1)\lambda_1+D_{12}(t_1)\lambda_2+F_1(t_1),\tag{19}$$

$$\lim_{t\to T-0}u_2(t)=D_{21}(T)\lambda_1+D_{22}(T)\lambda_2+F_2(T).\tag{20}$$

Енді осы $\lim\limits_{t\to T-0}u_2(t),\ \lim\limits_{t\to t_1-0}u_1(t)$ мәндерін шеттік және үзіліссіздік шарттарына - яғни, сәйкес (8), (9) шарттарына қойып, $\lambda_1,\lambda_2$ параметрлеріне қатысты ықшамдасақ, келесі теңдеулер жүйесін аламыз

$$Q_*(t_1,T)\lambda=-F^*,\tag{21}$$

мұнда $Q_*(t_1,T)=\begin{pmatrix}B+CD_{21}(T) & C_0+CD_{22}(T)\lambda_2+C\\ D_{11}(t_1)+I & D_{12}(t_1)-I\end{pmatrix},\ \lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix},\ F^*=\begin{pmatrix}-d+CF_2(T)\\ F_1(t_1)\end{pmatrix}.$

**Теорема**. *Келесі шарттар орындалсын: 1)* $[I-G]$ *матрицасы қайтарымды болсын;*

*2)* $Q_*(t_1,T)$ *матрицасы қайтарымды болсын.*

*Онда (1), (2) есебінің жалғыз шешімі бар болады.*

**Дәлелдеуі:** (1), (2) шеттік есебін қарастырайық. $[0,T)$ аралығын бөліп, (1), (2) есебіне $\lambda$ параметрін енгізу арқылы $(u(t),\lambda)$-дан тәуелді (6)-(9) пара-пар есебіне келейік. (6), (7) арнайы Коши есебінің шешімін, біз $X_1(t),X_2(t)$ фундаменталды матрицаларын пайдалана отырып, $\lambda$ параметрінің бекітілген мәндерінде фундаменталды матрица арқылы (10), (11) түрінде жазамыз. Осы (10), (11) түрінде жазылған шешімдерге қатысты өрнектерді пайдалана отырып, біз өрнектің оң жағында тұрған, интеграл астындағы белгісіз функцияларға қатысты интегралдардан құтылуымыз керек. Сол себепті біз жоғарыда келтірілген түрлендірулер жүргізу арқылы $\mu$-ға қатысты теңдеуге келеміз:

$$\mu = G\cdot\mu + V_1\cdot\lambda_1 + V_2\cdot\lambda_2 + g\ . \tag{22}$$

Енді, теорема шартын пайдаланып $\mu$-ды табамыз. 1) шарты бойынша $\left[I-G\right]$ матрицасы қайтарымды. Ендеше (22) теңдеулер жүйесінен $\mu^*$-ны жалғыз түрде тауып аламыз. $\mu^* = \left[I-G\right]^{-1}\left\{V_1\cdot\lambda_1 + V_2\cdot\lambda_2 + g\right\}$. (23)

Енді (23) арқылы анықталған $\mu^*$ -ны (10), (11) өрнектеріндегі $\int_0^{t_1}\psi(\tau_1)u_1(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_1}^{T}\psi(\tau_1)u_2(\tau_1)d\tau_1$ қосындысының орнына қоямыз. Сонда $\lambda_1,\lambda_2$ арқылы $u_1(t)$ мен $u_2(t)$ функциясының кейіптемесін аламыз:

$$u_1(t) = D_{11}(t)\lambda_1 + D_{12}(t)\lambda_2 + F_1(t),\quad t\in[0,t_1), \tag{24}$$

$$u_2(t) = D_{21}(t)\lambda_1 + D_{22}(t)\lambda_2 + F_2(t),\quad t\in[t_1,T). \tag{25}$$

Енді $\lim\limits_{t\to T-0}u_2(t),\ \lim\limits_{t\to t_1-0}u_1(t)$ мәндерін тауып, шеттік және үзіліссіздік шарттарына қойып, топтастыра отырып, келесі теңдеулер жүйесіне келеміз:

$$Q_*(t_1,T)\lambda = -F^*. \tag{26}$$

Теореманың 2) шарты бойынша $Q_*(t_1,T)$ матрицасы қайтарымды, яғни оның кері матрицасы $\left[Q_*(t_1,T)\right]^{-1}$ бар. (27) өрнегінен $\lambda^*$-ны табамыз: $\lambda^* = -\left[Q_*(t_1,T)\right]^{-1}\cdot F^*$,

яғни $\lambda^* = \begin{pmatrix}\lambda_1^*\\ \lambda_2^*\end{pmatrix}$ табылады. Ал (24), (25) өрнектерінде $\lambda_1,\lambda_2$ орнына $\lambda_1=\lambda_1^*$, $\lambda_2=\lambda_2^*$ қою арқылы $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$ функцияларын таба аламыз. Табылған $u_1^*(t)$, $u_2^*(t)$ және $\lambda_1^*,\lambda_2^*$ арқылы $x_1^*(t)$ мен $x_2^*(t)$ функцияларын келесі қосындылар көмегімен анықтайық:

$$x_1^*(t) = u_1^*(t) + \lambda_1^*,\quad t\in[0,t_1),\qquad x_2^*(t) = u_2^*(t) + \lambda_2^*,\quad t\in[t_1,T).$$

$x_1^*(t)$ мен $x_2^*(t)$ функциялары арқылы $x^*(t)$ функциясын құрамыз:

$$x^*(t) = x_1^*(t),\ t\in[0,t_1),\quad x^*(t_1) = \lim_{t\to t_1-0}x_1^*(t),\quad x^*(t) = x_2^*(t),\quad t\in[t_1,T),\ x^*(T) = \lim_{t\to T-0}x_2^*(t).$$

(1), (2) және (6)-(9) есептерінің пара-парлығынан $x^*(t)$ функциясы (1), (2) есебінің шешімі болатындығы шығады. Енді (1), (2) есебінің табылған шешімінің жалғыз екенін көрсетейік. Қарсы жорып, екі шешім: $\tilde{x}(t)$ және $\hat{x}(t)$ шешімдері болсын дейік. Онда сәйкес (6)-(9) есептеріне көшсек, $\left(\tilde{u}[t],\tilde{\lambda}\right)$ және $\left(\hat{u}[t],\hat{\lambda}\right)$ шешімдер жұбын аламыз. Сәйкес арнайы Коши есептерінің шешімін фундаменталды матрица арқылы жазып, $\tilde{\mu}$ мен $\hat{\mu}$ үшін келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\tilde{\mu} = \left[I-G\right]^{-1}\left\{V_1\cdot\tilde{\lambda}_1 + V_2\cdot\tilde{\lambda}_2 + g\right\},\ \ \hat{\mu} = \left[I-G\right]^{-1}\left\{V_1\cdot\hat{\lambda}_1 + V_2\cdot\hat{\lambda}_2 + g\right\}.$$

Ал, сәйкес $\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2$ және $\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2$ параметрлеріне қатысты келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$Q^*(t_1,T)\tilde{\lambda} = -F^*,\qquad Q^*(t_1,T)\hat{\lambda} = -F^*. \tag{27}$$

(27) теңдеулерінің сәйкес оң жақтары мен сол жақтарының айырмасын алсақ,

$$Q^*(t_1,T)\left(\tilde{\lambda}-\hat{\lambda}\right) = 0 \tag{28}$$

біртекті теңдеулер жүйесін аламыз. Теорема шарты бойынша $Q^*(t_1,T)$ матрицасы қайтарымды, ендеше (28) біртекті алгебралық теңдеулер жүйесінің тек нөлдік шешімі бар болады: $\tilde{\lambda}-\hat{\lambda}=0$ . Яғни бұдан $\tilde{\lambda}=\hat{\lambda}$ екені шығады, онда $\tilde{\mu}=\hat{\mu}$ болады. Ендеше, сәйкес арнайы Коши есептерінің шешімдері де өзара тең болады:

$$\tilde{u}_1(t)=\hat{u}_1(t), \quad t\in[0,t_1), \qquad \tilde{u}_2(t)=\hat{u}_2(t), \quad t\in[t_1,T).$$

$$\tilde{x}_1(t)=\tilde{u}_1(t)+\tilde{\lambda}_1, \quad t\in[0,t_1), \qquad \tilde{x}_2(t)=\tilde{u}_2(t)+\tilde{\lambda}_2, \quad t\in[t_1,T),$$

$$\hat{x}_1(t)=\hat{u}_1(t)+\hat{\lambda}_1, \quad t\in[0,t_1), \qquad \hat{x}_2(t)=\hat{u}_2(t)+\hat{\lambda}_2, \quad t\in[t_1,T),$$

теңдіктерімен анықталған $\tilde{x}_1(t),\tilde{x}_2(t)$ және $\hat{x}_1(t),\hat{x}_2(t)$ функциялары да сәйкес аралықтарда өзара тең болады. Сонда $\tilde{x}(t)=\tilde{x}_1(t)$, $t\in[0,t_1)$, $\tilde{x}(t)=\tilde{x}_2(t)$, $t\in[0,t_1)$,
және $\hat{x}(t)=\hat{x}_1(t)$, $t\in[0,t_1)$, $\hat{x}(t)=\hat{x}_2(t)$, $t\in[0,t_1)$,
функциялары да өзара тең болады: $\tilde{x}(t)=\hat{x}(t)$, $t\in[0,T]$, яғни (1), (2) есебінің шешімі жалғыз екендігі шығады. Теорема дәлелденді.

## Әдебиеттер тізімі

1. Assanova A.T. Numerical solution to a control problem for integro-differential equations / A.T. Assanova, E.A. Bakirova, Zh.M. Kadirbayeva // Comput. Math. and Math. Phys. - 2020. - Vol. 60. - P. 203–221. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542520020049.
2. Assanova A.T. Numerical solution of systems of loaded ordinary differential equations with multipoint conditions / A.T. Assanova, A.E. Imanchiyev, Z.M. Kadirbayeva // Comput. Math. and Math. Phys. - 2018. - Vol. 58. - P. 508-516. DOI: https://doi.org/10.1134/S096554251804005X.
3. Boichuk A.A. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems / A.A. Boichuk, A.M. Samoilenko. - VSP, Utrecht, 2004. DOI: https://doi.org/10.1515/9783110944679.
4. Brunner H. Collocation methods for Volterra integral and related functional equations / H. Brunner. - Cambridge University Press, 2004. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511543234.
5. Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений / Я.В. Быков. - Фрунзе: Киргиз. гос. ун-т, 1957. - 327 с.
6. Cohen H. Numerical approximation methods/ H. Cohen. - Springer, 2011. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1- 4419-9837-8.
7. Джумабаев Д.С. Корректная разрешимость линейной многоточечной краевой задачи / Д.С. Джумабаев, А.Е. Иманчиев // Матем. журнал. - 2005. - Т. 5, №1 (15). - С. 30-38.
8. Иманчиев А. Е. Необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости линейной многоточечной краевой задачи / А. Е. Иманчиев // Известия МОН РК, НАН РК. Серия физ.- матем. - 2002. - №3. - С. 79-84.

9. Maleknejad K. An efficient numerical approximation for the linear Fredholm integrodifferential equations based on Cattani's method / K. Maleknejad, M. Attary // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. - 2011. - Vol. 16, - P. 2672-2679. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.09.037.

10. Molabahrami A. Direct computation method for solving a general nonlinear Fredholm integrodifferential equation under the mixed conditions [Degenerate and non-degenerate kernels] / A. Molabahrami // J. Comput. Appl. Math. - 2015. - Vol. 282. - P. 34-43. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.12.025.

11. Wazwaz A.M. Linear and Nonlinear Integral Equations [Methods and Applications] / A.M. Wazwaz. - Higher Equacation Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-21449-3.

12. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation / D.S. Dzhumabayev // U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. - 1989. - Vol. 29. - P. 34-46.

13. Dzhumabaev D.S. A method for solving the linear boundary value problem for an integrodifferential equation / D.S. Dzhumabaev // Comput. Math. Math. Phys. - 2010. - Vol. 50. - P. 1150-1161. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542510070043.

14. Dzhumabaev D.S. Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundaryvalue problems for the Fredholm integro-differential equation / D.S. Dzhumabaev // Ukr. Math. J. —2015. — Vol. 66. — P. 1200-1219. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-015-1003-6.

15. Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving the linear boundary value problem for an integrodifferential equation / D.S. Dzhumabaev // Comput. Math. Math. Phys. — 2013. — Vol. 53. — P. 736-758. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542513060067.

16. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations / D.S. Dzhumabaev, E.A. Bakirova // Differ. Equ. - 2013. - Vol. 49. - P. 1087-1102. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266113090048.

17. Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations / D.S. Dzhumabaev // J. Comput. Appl. Math. - 2016. - Vol. 294. - P. 342-357. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.08.023.

18. Dzhumabaev D.S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations / D.S. Dzhumabaev // Math. Meth. Appl. Sci. - 2018. - Vol. 41. - P. 1439-1462. DOI: https://doi.org/10.1002/mma.4674.

19. Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems / D.S. Dzhumabaev // J.

Comput. Appl. Math. - 2018. - Vol. 327. - P. 79–108. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.06.010

20. Assanova A.T. Novel approach for solving multipoint boundary value problem for integro-differential equation / A.T. Assanova, E.A. Bakirova, R.E. Uteshova // Kazakh Math. J., - 2020. - Vol. 20. - №1. - P. 103–124.

## References

1. Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. (2020). Numerical solution to a control problem for integro-differential equations. Comput. Math. and Math. Phys., Vol. 60, 203-221. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542520020049

2. Assanova A.T., Imanchiyev A.E., Kadirbayeva Z.M. (2018). Numerical solution of systems of loaded ordinary differential equations with multipoint conditions. Comput. Math. and Math. Phys., Vol. 58, 508-516. DOI: https://doi.org/10.1134/S096554251804005X.

3. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. (2004). Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. VSP, Utrecht. DOI: https://doi.org/10.1515/9783110944679

4. Brunner H. (2004). Collocation methods for Volterra integral and related functional equations. Cambridge University Press. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511543234

5. Bykov, Ya.V. (1957). O nekotorykh zadachakh teorii intehro-differentsialnykh uravnenii [On some problems in the theory of integro-differential equations]. Frunze: Kirhizskii hosudarstvennyi Universitet [in Russian].

6. Cohen H. (2011). Numerical approximation methods. Springer. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1- 4419-9837-8

7. Dzhumabaev D.S., Imanchiev A.E. (2005). Korrektnaya razreshimost' lineynoy mnogotochechnoy krayevoy zadachi [Correct Solvability of a Linear Multipoint Boundary Value Problem]. Matematicheskiy zhurnal— Mathematical journal, Vol. 5, No 1, 30-38 [in Russian].

8. Imanchiev A.E. (2002). Neobkhodimyye i dostatochnyye usloviya odnoznachnoy razreshimosti lineynoy mnogotochechnoy krayevoy zadachi [Necessary and sufficient conditions of the unique solvability of linear multipoint boundary value problem]. Izvestiya MON RK, NAN RK - News of MES RK, NAS RK, Seriya fiziko- matematicheskaya - Phys.-Mathem. Series, Vol. 3, 79-84 [in Russian].

9. Maleknejad K., Attary M. (2011). An efficient numerical approximation for the linear Fredholm integrodifferential equations based on Cattani’s method. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., Vol. 16, 2672-2679. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.09.037

10. Molabahrami A. (2015). Direct computation method for solving a general nonlinear Fredholm integrodifferential equation under the mixed conditions: Degenerate and non-degenerate kernels. J. Comput. Appl. Math., Vol. 282, 34-43. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.12.025

11. Wazwaz, A.M. (2011). Linear and Nonlinear Integral Equations [Methods and Applications]. Higher Education Press, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-21449-3

12. Dzhumabayev D.S. (1989). Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation. U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys., Vol. 29, 34-46.

13. Dzhumabaev D.S. (2010). A method for solving the linear boundary value problem for an integrodifferential equation. Comput. Math. Math. Phys., Vol. 50, 1150-1161. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542510070043

14. Dzhumabaev D.S. (2015). Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary value problems for the Fredholm integro-differential equation. Ukr. Math. J., Vol. 66, 1200-1219. DOI: https://doi.org/10.1007/s11253-015-1003-6

15. Dzhumabaev D.S. (2013). An algorithm for solving the linear boundary value problem for an integrodifferential equation. Comput. Math. Math. Phys., Vol. 53, 736-758. DOI: https://doi.org/10.1134/S0965542513060067

16. Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. (2013). Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations. Differ. Equ.,Vol. 49, 1087-1102. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266113090048

17. Dzhumabaev D.S. (2016). On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations. J. Comput. Appl. Math., Vol. 294, 342-357. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.08.023

18. Dzhumabaev D.S. (2018). Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations. Math. Meth. Appl. Sci., Vol. 41, 1439-1462. DOI: https://doi.org/10.1002/mma.4674

19. Dzhumabaev, D.S. (2018). New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems. J. Comput. Appl. Math., Vol. 327, 79–108. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.06.010

20. Assanova A.T., Bakirova E.A., Uteshova R.E. (2020). Novel approach for solving multipoint boundary value problem for integro-differential equation. Kazakh Math. J. Vol. 20, No. 1, 103-124.

# О РЕШЕНИИ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА

**А.Т. АСАНОВА[1,*], А.А. ЕРМЕК[1,2]**

[1]Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан,

[2]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

[*]e-mail: anartasan@gmail.com

**Аннотация**. Рассмотрена трехточечная краевая задача для системы интегрально-дифференциальных уравнений Фредгольма. Разделив данный интервал на две части, были получены два подинтервала. Было введено обозначение для внутренней сжатии данной функции. Трехточечная краевая задача сводится к эквивалентой задаче. Были произведены замены введением дополнительных параметров. Рассматриваемая задача было сведено к задаче с параметром. Решение специальной задачи Коши было записано с использованием фундаментальной матрицы, а так же с использованием интегрально-дифференциальных уравнений и начальных условий. Были использованы различные преобразования для задачи с параметром. Для упрощения выражений были введены специальные обозначения. Матрица считалась обратимой. Найдены пределы выражений на концах интервала. Значения пределов задаются граничным условиям и условиям непрерывности. По параметрам получена система уравнений. Теорема сформулирована. Решение задачи Коши записывалось с использованием фундаментальной матрицы при фиксированных значениях параметра. Былы получены, что задачи эквивалентны. Показано, что решение исходной задачи единственно. Был использован метод контраргумента. Была получена пара решений. Решения специальных задач Коши были записаны с использованием фундаментальной матрицы. Получены две различные системы уравнений относительно параметров. Создана система однородных уравнений. Было отмечено, что при условии теоремы матрица была обратимой. Доказано, что система однородных алгебраических уравнений имеет только нулевые решения. Условия решения задачи были исследованы с помощью алгоритма метода параметризации.

**Ключевые слова**: трехточечная краевая задача, параметр, эквивалентность, алгоритм, метод параметризации, специальная задача Коши.

## ON THE SOLUTION OF A THREE POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

**A.T. ASSANOVA [1,*], A.A. YERMEK[1,2]**

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan,

[2]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

[*]e-mail: anartasan@gmail.com

**Abstract**. A three point boundary value problem for the system of Fredholm integral-differential equations is considered. Dividing this interval into two parts, two subintervals were obtained. A notation was introduced for the internal compression of this function. The three point boundary value problem is reduced to an equivalent problem. Replacements were made by introducing additional parameters. The initial problem was reduced to a problem with a parameter. The solution to the special Cauchy problem was written using the fundamental matrix, as well as using integral differential equations and initial conditions. Various transformations were used for the parameter problem. To simplify expressions, special notation has been introduced. The matrix was considered reversible. The limits of expressions at the ends of the interval are found. Limit values are specified by boundary conditions and continuity conditions. A system of equations is obtained from the parameters. The theorem is formulated. The solution to the Cauchy problem was written using a fundamental matrix at fixed values of the parameter. The problems were found to be equivalent. It was shown that the solution to the original problem is unique. The method of counterargument was used. A couple of solutions have been received. Solutions to special Cauchy problems were written using the fundamental matrix. Two different systems of equations for the parameters are obtained. A system of homogeneous equations has been created. It was noted that under the condition of the theorem, the matrix was invertible. It was proved that the system of homogeneous algebraic equations has only zero solutions. The conditions for solving the problem were investigated using the algorithm of the parameterization method.

**Key words**: three-point boundary value problem, parameter, equivalence, algorithm, parameterization method, special Cauchy problem.