2. Shunkeyev K., Sarmukhanov E., Bekeshev A., Sagimbaeva Sh., Bizhanova K. The cryostat for deformation of crystals at low temperatures // J. Physics: Conference Series 400 (2012) 052032.
3. German A., Lickevich A., Shunkeyev K., Ubayev Zh., Kulbatyr Zh. Avtomatizirovannaya luminescentnaya ustanovka po izmereniu spectrov rentgeno- i tunnelnoy luminescencyi shelochnogaloidnyh kristallov // Vestnik ARSU, 2019. - №2. - P. 4-10.
4. Aimaganbetova Z. K., S. J. Balan Siltiligaloidty kristaldardagy deformaciyamen intalandyrgan lyuminescenciya // Vestnik ARSU, 2018. - №2. - P. 52-59.
5. Lushchik C.B., Lushchik A.C. Decay of Electronic Excitations with Defect Formation in Solids. – M.: Nauka, 1989. - 264 p.

МРНТИ 27.31.17

МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

САРТАБАНОВ Ж.А., ОМАРОВА Б.Ж., РАХМЕТОВ А.А

Актюбинский региональный государственный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан

Аңдатпа. Зерттеуде квазипериодты дифференциалдау операторлы екі теңдеуден тұратын сызықты жүйе қарастырылды. Бір айнымалысы бойынша периоды, келесі айнымалысы бойынша квазипериодты және бірдей жиіліктер базисінен тұратын шешімнің бар және жалғыздығы есебін зерттеу нақты осьтің қандай да бір комплекс маңайында әрбір айнымалысы бойынша нақты аналитикалық жалғастырылатын көппериодты берілгендер бойынша анықталған жүйенің көппериодты шешімі теориясы әдісі негізінде жасалды. Айнымалылары бойынша нақты аналитикалық және квазипериодтылық және нормасы бойынша нақты осьтің маңайының енінен тәуелді шамамен жоғарыдан шектелген бағалау қасиеттері бар жалғыз шешімнің бар болуының жеткілікті шарты алынды. Берілген есепті сындық емес, сындық жағдайларда да шешуде қолданылатын жаңа зерттеу әдісі ұсынылды.

Түйін сөздер. Квазипериодическое решение, оператор дифференцирования, функция Грина, вещественно аналитическая функция, критический и некритический случаи.

Аннотация. В исследовании рассматривалась линейная система двух уравнений с квазипериодическим оператором дифференцирования. Исследование задачи существования и единственности решений периодических по одной переменной и квазипериодических по другой переменной с тем же частотным базисом разработана на основе методов теории многопериодических решений системы с многопериодическими входными данными, вещественно-аналитично продолжимыми по каждой переменной на некоторую комплексную окрестность действительной оси. Установлены достаточные условия существования единственного решения, обладающего свойствами вещественно-аналитичности и квазипериодичности по переменным и оценкой по норме сверху величиной, зависящей от ширины окрестности действительной оси.

Предложен новый метод исследования применимые для решения данной задачи, как в некритических, так и в критических случаях.

Ключевые слова. Квазипериодическое решение, оператор дифференцирования, функция Грина, вещественно аналитическая функция, критический и некритический случаи.

Abstract. A linear system of two equations with a quasiperiodic differentiation operator were considered in the study. The study of the problem of the existence and uniqueness of solutions, periodic in one variable and quasiperiodic in another variable with the same frequency basis is developed based on methods of the theory of multi-periodic solutions of a system with multi-periodic input data, that can be real-analytically continued in each variable to some complex neighborhood of the real axis. The sufficient conditions for the existence of a unique solution possessing the properties of real-analyticity and quasiperiodicity with respect to variables and an upper estimate for a norm depending on the width of the neighborhood of the real axis are established. A new research method that is applicable to solve this problem, both in non-critical and critical cases is proposed.

Key words: Quasiperiodic solution, differentiation operator, Green function, real analytic function, critical and non-critical cases.

1. Постановка задачи. В данной работе рассматривается система двух уравнений в частных производных от двух независимых переменных с одинаковым линейным дифференциальным оператором, заданным при помощи квазипериодической коэффициентной функции одной переменной, а сама система имеет постоянные коэффициенты, причем матрица коэффициентов обладает взаимно сопряженными комплексными собственными значениями. Свободные члены являются периодическими по одной из независимых переменных и квазипериодическими по другой переменной с некоторым частотным базисом.

Суть задачи для этой системы состоит в выяснении существования и определении решений периодических по одной переменной и квазипериодических по другой переменной с тем же частотным базисом. При этом использованы методы теории многопериодических решений системы с многопериодическими входными данными, вещественно-аналитично продолжимыми по каждой переменной на некоторую комплексную окрестность действительной оси.

В заметке указаны достаточные условия существования единственного решения, обладающего свойствами вещественно-аналитичности и квазипериодичности по переменным и оценкой по норме сверху величиной, зависящей от ширины окрестности действительной оси.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} Dx_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 + f_1(s, e\tau), \\ Dx_2 = -\beta x_1 + \alpha x_2 + f_2(s, e\tau) \end{cases} \tag{1.1}$$

с постоянными коэффициентами α,β, свободным членом $f(s,e\tau)=(f_1(s,e\tau), f_2(s,e\tau))$ и оператором дифференцирования

$$D=\frac{\partial}{\partial s}+\varphi(e\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}, \tag{1.2}$$

где

$\varphi(et)$ – функция переменной t, порожденной от функции $\varphi(t)=\varphi(t_1,..., t_m)$ при $t=e\tau, e=(1,...,1)$ – m -вектор.

Предположим, что функции $\varphi(t)$ и $f(s,e\tau)$ являются вещественно аналитическими и многопериодическими

$$\varphi(t+\omega)=\varphi(t)\in A_{\omega}^{b}(\prod\nolimits_{\delta}^{m}), \tag{1.3}$$

$$f(s+\theta_0,t+\omega)= f(s,t)\in A_{\theta_0,\omega}^{b}(\prod\nolimits_{\delta}\times\prod\nolimits_{\delta}^{m}), \tag{1.4}$$

где $\omega=(\omega_1,..., \omega_m)$ – вектор-период с координатами рационально несоизмеримыми между собой $\omega_1,..., \omega_m$ и вместе с периодами θ_0 ; $\Pi_{\delta}=\{\tau\in C:|Im\tau|<\delta\}, C$ – комплексная плоскость, $\Pi_{\delta}^{m}=\Pi_{\delta}\times\ldots\times\Pi_{\delta}, A_{\omega}^{b}(\Pi_{\delta}^{m})$ – класс ω -периодических вещественно аналитических в области Π_{δ}^{m} функций. При условиях (1.3) и (1.4) система (1.1) с оператором (1.2) интегрируема.

Поставим задачу о выяснении условий существования квазипериодических решений системы (1.1)-(1.2).

2. Условная многопериодичность характеристик оператора дифференцирования. Рассмотрим уравнение с начальным условием вида

$$\frac{d\tau}{ds}=\varphi(e\tau), \ \ \tau|_{s=0}=0, \tag{2.1}$$

решения которого называются характеристиками оператора дифференцирования (1.2).

Предположим, что функция $\varphi(t)$, кроме условия (1.3), удовлетворяет условию

$$\varphi(t)\neq 0, \ t\in\prod\nolimits_{\delta}^{m}. \tag{2.2}$$

Тогда в силу условия (2.2) уравнение (2.1) можно представить в виде

$$\frac{ds}{d\tau}=\varphi^{-1}(e\tau), \ \ s|_{\tau=0}=0, \tag{2.3}$$

Наряду с уравнением (2.3) рассмотрим уравнение

$$D_e x=\varphi^{-1}(t), \ \ x|_{t_1=0}=0, \tag{2.4}$$

где D_e - оператор дифференцирования вида

$$D_e=\frac{\partial}{\partial t_1}+...+\frac{\partial}{\partial t_m}. \tag{2.5}$$

В силу условия (1.3), разложив правую часть уравнения (2.4) в ряд Фурье получим

$$\varphi^{-1}(t)=\varphi_0+\sum_{k\neq 0}\varphi_k e^{2\pi i\langle k,\nu t\rangle}, \tag{2.6}$$

где $\varphi_0\neq 0,\varphi_k$ – коэффициенты Фурье, $k=(k_1,...,k_m)\in Z\times...\times Z=Z^m, Z$ – множество целых чисел, $t=(t_1,...,t_m)$, $\nu=(\nu_1,...,\nu_m)$, $\nu_j=\omega_j^{-1}$, $j=\overline{1,m}$, $\nu t=(\nu_1 t_1,...,\nu_m t_m)$, $\langle\alpha,\beta\rangle$ – скалярное произведение векторов α и β. Предположим, что частотный вектор $\nu=(\nu_1,...,\nu_m)$ обладает свойством сильной несоизмеримости вида

$$\left|\langle k,\nu\rangle\right|\geq c^{-1}|k|^{-\gamma} \tag{2.7}$$

с постоянными $c>0,\ \gamma\geq m+1$. Решение задачи (2.3) определим в виде ряда

$$x(t)=x_0 t_1+\sum_{k\neq 0}x_k\left[e^{2\pi i\langle k,\nu t\rangle}-e^{2\pi i\langle k,\nu(t-et_1)\rangle}\right] \tag{2.8}$$

с коэффициентами x_k, $k\in Z^m$. Подставив (2.8), (2.6) в уравнение (2.4) с оператором (2.5) находим коэффициенты x_k в виде

$$x_0=\varphi_0,\ \ x_k=\frac{\varphi_k}{2\pi i\langle k,\nu\rangle},\ \ k\neq 0. \tag{2.9}$$

Известно [1-7], что при условии (2.7) абсолютно равномерную сходимость ряда (2.8) с коэффициентами (2.9) можно доказать по методу КАМ-теории в полосе $t\in\prod_\rho^m,\ \ \rho<\delta.$

Тогда положив $t=e\tau$ из задачи (2.4) получим задачу (2.1), а следовательно, из её решения (2.8) с коэффициентами (2.9) получим решение $s=s_*(\tau)$ задачи (2.3) вида

$$s_*(\tau)=\tau\varphi_0+\sum_{k\neq 0}\frac{\varphi_k}{2\pi i\langle k,\nu\rangle}\left[e^{2\pi i\langle k,\nu\rangle\tau}-1\right], \tag{2.10}$$

где $\varphi_0\neq 0$. Таким образом, доказано, что задача (2.3) имеет условно периодическое решение вида (2.10). Так как $s=s_0+s_*(\tau)$ с произвольной постоянной s_0 представляет собой общее решение уравнения задачи (2.3). В силу этого решение (2.10) можно представить в виде

$$s=\alpha_0^{-1}\tau+\beta_0+\Psi(e\tau), \tag{2.11}$$

где $\alpha_0^{-1}=\varphi_0,\beta_0$ – произвольная постоянная,

$$\Psi(e\tau)=\sum_{k\neq 0}s_k e^{2\pi i\langle k,\nu\rangle\tau}$$

– функция с нулевым средним с коэффициентами $s_k=x_k, k\neq 0$.

Также нетрудно доказать, что функция $s=\alpha_0^{-1}\tau+\Psi(e\tau)$ обратима, причем

$$\tau=\alpha_0 s+h(es), \tag{2.12}$$

где $h(es)$ **– *функция, порождаемая функцией*** $h(t)$ ***при*** $t = es$***, обладающей свойством***

$$h(t+\omega) = h(t) \in A_\omega^b(\prod_r^m), \;\; 0 < r < \rho. \tag{2.13}$$

Соотношение (2.12)-(2.13) представляет собой решение задачи (2.1). Решение характеристического уравнения с начальным условием вида

$$\frac{d\tau}{ds} = \varphi(e\tau), \;\; \tau\big|_{s=s^0} = \tau^0 \tag{2.14}$$

в силу (2.12) можно представить в виде

$$\tau = \tau^0 + \alpha_0(s - s^0) + h(e(s - s^0)). \tag{2.15}$$

Таким образом, подытоживая, сформулируем следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия (1.3), (2.2) и (2.7). Тогда решение задачи (2.14) является условно многопериодическим, представляемым соотношениями (2.15) и (2.13).*

Далее, вводим дополнительный вектор-переменную $t = (t_1,..., t_m)$ и среднее значение α_0 функции $\varphi(e\tau)$ будем считать равным единице: $\alpha_0 = 1$. Последнее можно всегда добиться линейной заменой $\tau = \alpha_0\tau'$ в заданной системе (1.1)

Таким образом, соотношение (2.15) можно представить с помощью условно многопериодической функции

$$\tau = \tau^0 + s - s^0 + h(t - t^0) \tag{2.16}$$

при $t = es,\; t^0 = es^0$. На основе (2.16) $\varphi(e\tau)$ выразим в виде

$$\varphi(e\tau) = \varphi\left(e\tau^0 + es - es^0 + eh\left(t - t^0\right)\right) = \varphi\left(e\tau^0 + t - t^0 + eh\left(t - t^0\right)\right).$$

Если пользуясь заменой

$$\tau - \tau^0 = s + h(t) \tag{2.16º}$$

вводим новый оператор дифференцирования с дополнительными независимыми переменными $t_1,..., t_m$ вида

$$\widetilde{D} = \frac{\partial}{\partial s} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle + \varphi\left(e\tau^0 + t + eh(t)\right)\frac{\partial}{\partial \tau}, \tag{2.17}$$

то легко убедиться, что этот оператор (2.17) имеет общую характеристику, содержащую семейство характеристик (2.15) оператора D вида (1.2), причем он является многопериодическим по t периода $\omega = (\omega_1,..., \omega_m)$.

Теорема 2.2. *При условиях теоремы 2.1 общая характеристика оператора дифференцирования (1.2) является семейством характеристик оператора дифференцирования (2.17).*

Действительно, уже доказано, что оператор (1.2) имеет общую характеристику вида (2.15), определенную задачей (2.14). Следовательно, с учётом $\alpha_0 = 1$ имеем:

$$\frac{d\tau}{ds} = \varphi\left(e\tau^0 + e(s - s^0) + eh\left(e(s - s^0)\right)\right)$$

с начальными данными (s^0, τ^0).

Теперь рассмотрим характеристическую систему уравнений оператора (2.17) вида

$$\frac{dt}{ds} = e, \ \ \frac{d\tau}{ds} = \varphi\left(e\tau^0 + t + eh(t)\right). \tag{2.18}$$

Так как из первого уравнения получим

$$t = t^0 + e(s - s^0), \tag{2.19}$$

то второе уравнение представляется в виде

$$\frac{d\tau}{ds} = \varphi(e\tau^0 + t^0 + e(s - s^0) + eh(t^0 + e(s - s^0))). \tag{2.20}$$

Как видно, при $t^0 = 0$ из уравнения (2.20) имеем уравнение (2.18). Следовательно, семейство характеристик оператора D содержится в общей характеристике оператора $\overline{D}$. Теорема 2.2 доказана.

В заключение, как следствие теорем 2.1 и 2.2 отметим, что оператор дифференцирования $\tilde{D}$, действующий на непрерывно дифференцируемую функцию $y(s,t,\tau)$ при $t = es$ переходит в оператор D, действующий на функцию $x(s,\tau) = y(s,es,\tau)$:

$$\tilde{D}y(s,t,\tau)\Big|_{t=es} = Dx(s,\tau). \tag{2.21}$$

Таким образом, формула (2.21) позволяет переходить от рассмотрения уравнений, квазипериодических по переменным (s,τ) к уравнениям, многопериодических по переменным (s,t,τ).

3. Многопериодические решения линейных систем в некритическом случае. Рассмотрим систему (1.1) в случае $\alpha > 0$. В случае, когда $\alpha \neq 0$ система называется *некритической*. В некритическом случае задача такого типа раньше рассматривалась в работах [8-13]. Для удобства систему запишем в векторно-матричной форме

$$Dx = Ax + f(s, e\tau), \tag{3.1}$$

где $x = (x_1, x_2), \ \ Dx = (Dx_1, Dx_2), \ \ f = (f_1, f_2), \ \ A = \left[a_{kj}\right]_1^2, \ a_{11} = a_{22} = \alpha > 0, \ a_{12} = -a_{21} = \beta.$

Система (3.1) квазипериодична по τ, но в силу теоремы 2.2, от неё можно переходить к многопериодической системе вида

$$\tilde{D}y = Ay + f(s, t + eh(t)), \tag{3.2}$$

где $\tilde{D}$ – оператор дифференцирования, заданным соотношением (2.17), а переменная τ заменена соотношением (2.16º). Очевидно, что вектор-функция

$$f(s,t+eh(t)) = g(s,t) \tag{3.3}$$

(θ_0,ω) – периодична по (s,t) и в силу (1.3) и (1.4) вещественно аналитична:

$$g(s+\theta_0,t) = g(s,t+\omega) = g(s,t) \in A^b_{\theta_0,\omega}(\Pi_\delta \times \Pi^m_\delta). \tag{3.4}$$

Система (3.2) с вектор - функцией (3.3), обладающей свойством (3.4) имеет единственное (θ_0,ω) – периодическое решение. В связи с этим легко доказать нижеследующую теорему

Теорема 3.1. *При условиях (1.3), (1.4), (2.2), (2.7) в некритическом случае* $\alpha > 0$ *система (3.2) допускает единственное* (θ_0,ω) – *периодическое по* (s,t) *решение* $y^*(s,t) \in A^b_{\theta_0,\omega}(\Pi_\rho \times \Pi^m_\rho)$ *вида*

$$y^*(s,t) = \int\limits_{+\infty}^{s} \mathrm{X}(s-\sigma) g(\sigma, t-es+e\sigma) d\sigma, \tag{3.5}$$

где $g(s,t)$ *определена соотношением (3.3), а* $\mathrm{X}(s) = \exp[\,\mathrm{A}s\,]$, *следовательно, имеет вид*

$$\mathrm{X}(s) = e^{\alpha s}\begin{pmatrix} \cos\beta s & \sin\beta s \\ -\sin\beta s & \cos\beta s \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Доказательство теоремы (3.1) опускаем, поскольку она является частным случаем, рассмотренным в [14, 15] теоремы.

Как приложения теоремы 3.1, получим следующую теорему.

Теорема 3.2. *При условиях теоремы 3.1 система (3.1) имеет единственное* θ_0 - *периодическое по* s *и квазипериодическое по* τ *решение вида*

$$x^*(s,\tau) = \int\limits_{+\infty}^{s} \mathrm{X}(s-\sigma) g(\sigma, t-es+e\sigma) d\sigma, \tag{3.7}$$

где

$$t = es, \;\; \tau = \tau^0 + s - h(t).$$

Действительно, доказательство следует из того, что $\tau = \tau^0 + s - h(t),\;\; t = es,$ согласно соотношениям (2.16) и (2.16º).

В заключение, отметим, что аналогичным результатам приходим к при $\alpha < 0$. При этом интегралы (3.5) и (3.7) имеют пределы от $-\infty$ до s, а сходимость несобственных интегралов обеспечиваются в силу (3.6).

4. Многопериодические решения линейных систем в критическом случае. Теперь рассмотрим случай $\alpha = 0$, но $\beta > 0$. Этот случай относится к критическому случаю. Рассматривается система, в силу (1.1) имеем вид

$$Dx = A_0 x + f(s, e\tau), \tag{4.1}$$

где

$A_0 = [a_{kj}]_1^2$ -матрица с элементами $a_{11} = a_{22} = 0,\ a_{12} = -a_{21} = \beta,$ остальные обозначения сохраняют прежний символ.

Колебательные решения системы (4.1) исследуем путем перехода к многопериодической системе вида

$$\tilde{D}y = A_0 y + f(s, t + eh(t)), \tag{4.2}$$

где оператор $\tilde{D}$ при $t = es$ переходит в оператор D , $e\tau^0 + t + eh(t)\big|_{t=es} = e\tau.$

Согласно (3.6) матрициант $\mathrm{X}(s)$ при $\alpha = 0$ обращается в матрициант $\mathrm{X}_0(s)$ системы (4.1) вида

$$\mathrm{X}_0(s) = \begin{pmatrix} \cos\beta s & \sin\beta s \\ -\sin\beta s & \cos\beta s \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} e^{i\beta s} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} e^{-i\beta s} = \Gamma_+ e^{i\beta s} + \Gamma_- e^{-i\beta s}, \tag{4.3}$$

где

$\Gamma_\pm = \begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ \mp i & 1 \end{pmatrix}$, причем

$$\mathrm{X}_0^{-1}(s) = \Gamma_- e^{i\beta s} + \Gamma_+ e^{-i\beta s}. \tag{4.4}$$

Очевидно, что решение системы (4.2) с начальным условием

$$y\big|_{s=s^0} = u(t) \in C_t^{(e)}(R^m) \qquad (4.1^0)$$

представляется в виде

$$y(s,t) = X(s - s^0)u(t - es + es^0) + \int_{s^0}^{s} X(s-\sigma) g(\sigma, t - es + e\sigma) d\sigma, \tag{4.5}$$

где

$\mathrm{X}(s),\ g(s,t),\ u(t)$ определяются соотношениями (4.3), (4.4), (3.3) и (4.1^0), а $C_t^{(e)}(R^m)$ - класс функций дифференцируемы по $t = (t_1, ..., t_m)$ порядка $e = (1, ..., 1)$ – m - вектор.

Предположим выполненным условие

$$\det[\mathrm{X}(\theta) - \mathrm{X}(0)] \neq 0. \tag{4.6}$$

Пусть при некотором постоянном векторе $u = u^*$ система (4.2) имеет (θ_0, ω) - периодическое по (s,t) решение $y^*(s,t)$. Тогда на основе (4.5) и (4.6) его можно представить в виде

$$y^*(s,t) = [\mathrm{X}^{-1}(s+\theta_0) - \mathrm{X}^{-1}(s)]^{-1}\left\{\int_{-\theta_0}^{s} \mathrm{X}^{-1}(\theta_0+\sigma) g(\sigma, t-es+e\sigma)d\sigma + \right.$$
$$\left. + \int_{s}^{0} \mathrm{X}^{-1}(\sigma) g(\sigma, t-es+e\sigma)d\sigma \right\} = \int_{-\theta_0}^{0} G(s,\sigma) g(\sigma, t-es+e\sigma)d\sigma, \tag{4.7}$$

где матрица Грина $G(s,\sigma)$ определяется соотношением

$$G(s,\sigma) = \begin{cases} [\mathrm{X}^{-1}(s+\theta_0) - \mathrm{X}^{-1}(s)]^{-1}\mathrm{X}^{-1}(\theta_0+\sigma), & -\theta_0 \le \sigma \le s, \\ [\mathrm{X}^{-1}(s+\theta_0) - \mathrm{X}^{-1}(s)]^{-1}\mathrm{X}^{-1}(\sigma), & s < \sigma \le 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

и обладает свойствами

1°. $G(s,\sigma) = A_0 G(s,\sigma), \quad s \ne \sigma;$ $\qquad (4.8_1)$

2°. $G(s,s-0) - G(s,s+0) = E;$ $\qquad (4.8_2)$

3°. $G(s+\theta_0, \sigma+\theta_0) = G(s,\sigma).$ $\qquad (4.8_3)$

Если θ_0-периодично продолжим по s, то решение (4.6) можно представив в виде

$$y^*(s,t) = \int_{s^*(s)-\theta_0}^{s^*(s)} G(s,\sigma) g(\sigma, t-es+e\sigma)d\sigma, \tag{4.9}$$

где

$s^*(s) = [s/\theta]\theta$ – функция, θ_0-периодично дифференцируемая с устранимо разрывными производными в точках $s = k\theta$ функция, причем устранив разрыв, имеем $\frac{ds^*(s)}{ds} = 0, \ s \in R,$ $[s]$ – целая часть $s \in R.$

Очевидно, что $g(s,t)$ в силу (1.3), (1.4) и (3.3) а следовательно, в силу (1.4) и (2.13) является вещественно аналитической в $\prod_r \times \prod_r^m$:

$$g(s+\theta_0, t+\omega) = g(s,t) \in A^b_{\theta_0,\omega}(\prod_r \times \prod_r^m). \tag{4.10}$$

Далее, приняв обозначение

$$G_0(s) = \begin{cases} [\mathrm{X}^{-1}(s+\theta_0) - \mathrm{X}^{-1}(s)]^{-1}\mathrm{X}^{-1}(\theta_0), & -\theta_0 \le \sigma \le s, \\ [\mathrm{X}^{-1}(s+\theta_0) - \mathrm{X}^{-1}(s)]^{-1}, & s < \sigma \le 0, \end{cases} \tag{4.11}$$

в силу (4.4), матрицу Грина представим в виде

$$G(s,\sigma) = G_0(s)[\Gamma_- e^{2\pi i \nu^0 \sigma} + \Gamma_+ e^{-2\pi i \nu^0 \sigma}], \tag{4.12}$$

где $\nu^0 = (2\pi)^{-1}\beta.$ Теперь вместо условия несоизмеримости (2.7) предположим выполнением расширенное условие несоизмеримости вида

$$\left|\left\langle \tilde{k}, \tilde{\nu} \right\rangle\right| = \left|k^0\nu^0 + k_0\nu_0 + \left\langle k, \nu \right\rangle\right| \geq \tilde{c}^{-1}\left|\tilde{k}\right|^{-\tilde{\gamma}} \tag{4.13}$$

с некоторыми положительными постоянными $\tilde{c} > 0$ и $\tilde{\gamma} \geq m+3,$ где $\tilde{k} = (k^0, k_0, k) = (k^0, k_0, k_1,..., k_m) \in Z \times Z \times ... \times Z = Z^{m+2}$ - множество целочисленных $(m+2)$ - векторов, $\tilde{\nu} = (\nu^0, \nu_0, \nu_1,..., \nu_m)$ – частотный $(m+2)$ -вектор.

Таким образом, интегрируемость и многопериодичность при определении решения (4.9) обеспечиваются соотношениями (4.6), (4.9), (4.10) и (4.13).

Очевидно, что функции

$$g_{\pm}(\sigma, s, t) = e^{\pm 2\pi i \nu^0 \sigma} g(s,t) \tag{4.14}$$

в силу свойства (4.10) аналитичны по $(\sigma, s, t) \in \prod_r \times \prod_r \times \prod_r^m$ и представим в виде рядов

$$g_{\pm}(\sigma, s, t) = \sum_{(k^0, k_0, k)} g^{\pm}_{(k^0, k_0, k)} e^{2\pi i \left(\pm \nu^0 \sigma + k_0 \nu_0 s + \left\langle k, \nu t \right\rangle\right)} \tag{4.15}$$

при $(\sigma, s, t) \in \overline{\prod}_r \times \overline{\prod}_r \times \overline{\prod}_r^m,$ причем коэффициенты $g^{\pm}_{(k^0, k_0, k)}$ подчиняются оценке

$$\left|g^{\pm}_{(k^0, k_0, k)}\right| \leq Me^{-2\pi\nu^0 r} \cdot e^{-2\pi\left(\nu_0|k_0| + \left|\left\langle k, \nu \right\rangle\right|\right)r},$$

где $M = \|g\|,$ $k^0 = \pm 1$.

Следовательно [2-4], сумма (4.14) рядов (4.15) при условий (4.13) удовлетворяет оценке

$$\left\|g_{\pm}(\sigma, s, t)\right\|_{r/2} \leq \frac{4Me^{-2\pi\nu^0 (r/2)}}{r/2} = 8Me^{-\pi\nu^0 r}. \tag{4.16}$$

Очевидно, что существование решения (4.9) зависит от интегрируемости функций (4.14) с разложениями в ряды Фурье (4.15).

В силу условия (4.13) средние значения функций $g_{\pm}(\sigma, s, t)$ равны нулю в соответствии с их структурами (4.14). Далее, заметим, что решение (4.9) (θ_0, ω)- периодично по (s,t). Поэтому значения интегралы $I^*(\sigma, s, t)$ функции $G(s,\sigma)g(\sigma, t - es + e\sigma)$ при нижних и верхних пределах интеграла по переменной σ, отличающихся на период - θ_0, совпадают.

Следовательно, решение (4.9) определяется значениями $I^*(s-0, s, t)$ и $I^*(s+0, s, t)$ в точках разрыва функции Грина представленной задачи.

Тогда решение (4.9), в силу представления матрицианта (4.3), функции Грина (4.12) и оценки (4.16) подчиняется оценке

$$\left\|y^*\right\|_{r/2} \le a\frac{e^{-\beta^* r}}{r^{\gamma^*}}\left\|g\right\|_r,\ \ (s,t)\in\prod_{r/2}\times\prod_{r/2}^m \tag{4.17}$$

с некоторой постоянной $a>0,$ зависящей $\delta,\tilde{e},\tilde{\gamma}$ и $\left\|\mathrm{X}\right\|_r$, а $\beta^*=\pi\nu^0$, $\gamma^*=\tilde{\gamma}+1.$

В итоге доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия (1.3), (1.4), (2.2) и (4.13). Тогда в критическом* $\alpha=0,\beta\neq 0$ *случае линейная система (4.2) имеет единственное решение, которое представляется в виде (4.9) при помощи функции типа Грина (4.8) со свойствами* (4.8_1) - (4.8_3) *и подчиняется оценке (4.17).*

Далее, учитывая, что s,τ и t связанные соотношениями

$$\tau=s+h(es),\ \ s=\tau+\psi(e\tau),\ \ t=es, \tag{4.18}$$

как приложение теоремы 4.1 к исследованию периодических по s и квазипериодических по τ с частотным базисом $(\nu_1,...,\nu_m)=\nu$ решений системы (4.1), имеем следующую теорему.

Теорема 4.2. *При условиях теоремы 4.1 система (4.1) имеет единственное* θ_0 *-периодическое по* s *и квазипериодическое по* τ *с частотным базисом* $(\nu_1,...,\nu_m)=\nu$ *вещественно аналитическое по* $(s,\tau)\in\prod_{r/2}\times\prod_{r/2}$ *решение*

$$x^*(s,\tau)=\int\limits_{s^*(s)-\theta_0}^{s^*(s)}G(s,\sigma)\,f(\sigma,e\tau-es+e\sigma+\theta h(e\tau-es+e\sigma))d\sigma, \tag{4.19}$$

удовлетворяющее оценке

$$\left\|x^*\right\|_{r/2}\le ar^{-\gamma^*}e^{-\beta^* r}\left\|f\right\|_r. \tag{4.20}$$

Доказательство теоремы 4.2 следуя из того, что функции h и ψ , приведенное в соотношении (4.18), связаны с уравнениями (2.1) и (2.4). Эта связь позволяет перейти от системы (4.1) к (4.2) и обратно, с учетом $t=es.$ Тогда из решения (4.9) системы (4.2) имеем решение (4.19) системы (4.1), а из оценки (4.17) следует оценка (4.20).

Единственность получим из единственности решения (4.9) системы (4.2). Этим завершается доказательство теоремы.

Список использованной литературы

1. Колмогоров А.Н. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. – 1954. – Т. 98, вып. 4. – С. 527-530.
2. Арнольд В.И. Малые знаменатели I: Об отображениях окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1961. – Т. 25, вып. 1. – С. 21-86.

3. Арнольд В.И. Малые знаменатели. Доказательство теоремы А.Н.Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Украинский математический журнал. – 1963. – Т. 18, вып. 5(113). – С. 13-40.

4. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике // Украинский математический журнал. – 1963, Т. 18, вып. 6. – С. 91-192.

5. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. - М.: Мир, 1973. – 168с.

6. Мозер Ю. КАМ-теория и проблемы устойчивости. - Ижевск: НИЦ «Регуляр. и хаотич. динамика», 2001. – 448 с.

7. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. - Киев: Наукова думка, 1969. – 248 с.

8. Харасахал В.Х. Почти-периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. - Алма-Ата: Наука, 1970. -200 с.

9. Умбетжанов Д.У. Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Алма-Ата: Наука, 1979.- 210 с.

10. Сартабанов Ж. Об одном способе изучения периодических решений систем уравнений в частных производных специального вида // Известия АН КазССР, Сер. физ.-мат. – 1989. - №1. – С. 42-49.

11. Мухамбетова А.А., Сартабанов Ж.А. Устойчивость решений систем дифферен-циальных уравнений с многомерным временем. – Актобе: Принт А, 2007. – 168 с.

12. Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. Периодические решения систем дифферен-циальных уравнений с многомерным временем. – Уральск: РИЦ ЗКГУ, 2013. – 167 с.

13. Sartabanov, Z.A. The multi-period solution of a linear system of equations with the operator of differentiation along the main diagonal of the space of independent variables and delayed arguments // AIP Conference Proceedings. - 2017. - Vol. 1880. - 040020.

14. Sartabanov Zh.A., Omarova B.Zh. Multiperiodic solutions of autonomous systems with operator of differentiation on the Lyapunov's vector field // AIP Conference Proceedings. – 2018. - 1997. – 020041

15. Sartabanov Zh.A., Omarova B.Zh. Multiperiodic solutions of the one autonomous system of equations with the operator of differentiation with respect to spatial and time variables // Вестник АРГУ им.К.Жубанова. - 2018. - №1(51). - С.60-64.