

ЖАЛПЫЛАНҒАН ФУНКЦИЯЛАР ӘДІСІ БОЙЫНША ТЕРМОСЕРПІМДІ ӨЗЕКШЕНІҢ ДИНАМИКАСЫ

АЙНАКЕЕВА Н.Ж. 

Айнакеева Нұрсәуле Жұматқызы – Ғылыми қызметкер, академик У.Ә.Жолдасбеков атындағы механика және машинатану институты, Алматы қ, Қазақстан.

E-mail: nursaule_math@mail.ru, <http://orcid.org/0000-0003-4643-6072>

Андатпа. Өзек элементтері әртүрлі техникалық салаларда кеңінен қолданылады. Уақытша температура өрісінің өзгерісі өзекті құрылымдарда уақытша өзгеретін кернеу өрісін туындатады, бұл олардың беріктік қасиеттері мен сенімділігін пайдалануда әсер етеді. Өзек конструкцияларының механикалық қасиеттерін, әсіресе серпімділікті, ескере отырып, олардың термонапряжение күйін анықтау маңызды ғылыми-техникалық есеп болып табылады. Математикалық модельдеу әдістерінің қолданылуы құрылым мен оның элементтеріндегі термодинамикалық процестерді зерттеп, жобалау кезеңінде олардың динамикалық және беріктік сипаттамаларын анықтауға мүмкіндік береді. Бұл жұмыста ерікті бастапқы жағдайларда және күш пен жылу әсерінен термосерпімді өзек динамикасына арналған Коши есебі қарастырылады. Термосерпімділік теңдеулерінің Грин тензорын пайдалана отырып, есептің аналитикалық шешімі алынды, бұл өзекшенің кез келген қимасындағы деформацияларды, кернеулерді және температураны анықтауға мүмкіндік береді, егер бастапқы күйі мен әсер етуші күштер мен жылу көздері белгілі болса. Импульстік шоғырланған күш пен жылу көздерінің әсерінен температура мен орын ауыстырулардың сандық есептеулері келтірілген. Өзек бойымен таралатын тұрақты күш пен жылу көздерінің әсерінен Коши есебін шешу үшін есептеулер жүргізілді. Жасалған бағдарлама сингулярлы жалпыланған функциялармен сипатталған таралатын және шоғырланған импульсті жылу және күш көздерінің әсерінен әртүрлі физикалық және механикалық параметрлері бар өзектердегі термодинамикалық процестерді зерттеуге мүмкіндік береді.

Түйін сөздер: термосерпімді өзек, температура, орын ауыстыру, кернеу, жалпыланған функция әдісі, Грин тензоры.

Кіріспе

Термосерпімділік мәселелерін шешу теориясы мен әдістерінің дамуы техниканың және қолданбалы ғылымдардың көптеген салаларының қажеттіліктеріне негізделген. Мұндай мәселелер тау-кен өнеркәсібі, бу және газ турбиналары, реактивті және зымыран қозғалтқыштары, жоғары жылдамдықты ұшақтар, ядролық реакторлар мен пайдалы қазбалар кен орындарының жаңа конструкцияларын әзірлеуде туындайды. Бұл құрылымдардың элементтері біртекті емес және тұрақты емес қыздыру жағдайында жұмыс істейді, бұл өз кезегінде материалдардың механикалық қасиеттерінің өзгеруіне және құрылымдардың әртүрлі бөліктерінің тең емес термиялық кеңеюіне әкелетін температура градиенттерін тудырады [1-8]. Кейбір материалдар стационарлық емес температуралық өрістің айқын градиентіне байланысты қатты кернеулер пайда болған кезде сынғыш болып, термиялық соққыларға төтеп бере алмайды. Жылулық кернеулердің қайталануы құрылымдық элементтердің бұзылуына әкелуі мүмкін, сондықтан құрылымдар мен конструкциялардың кернеулі-деформациялық күйіне температуралық өрістің әсерін зерттеу маңызды ғылыми-техникалық міндет болып табылады.

Өзек элементтері әртүрлі техникалық салаларда кеңінен қолданылады. Өзек элементтерінің жүктелген конструкцияларының көптеген мысалдары бар, мысалы, әртүрлі құрылымдардың тіректері, ғимараттар, көпірлер және басқа да объектілер. Нақты жағдайда өзекшілер динамикалық жүктемелерге ұшырап, өзек элементтерінің сенімділігіне және, нәтижесінде, барлық құрылымның сенімділігіне айтарлықтай әсер ететін тербелістерді тудыруы мүмкін. Тұрақсыз температура өрісі өзекті құрылымдарда уақыт өте келе өзгеретін деформация өрісін қалыптастырып, олардың жұмыс кезіндегі беріктігі мен сенімділігіне ықпал етеді.

Өзек құрылымдарының механикалық қасиеттерін (әсіресе серпімділігін) ескере отырып,

олардың термиялық кернеу күйін анықтау қазіргі уақытта маңызды ғылыми-техникалық мәселелердің бірі болып табылады. Математикалық модельдеу әдістерін пайдалану конструкциялар мен олардың элементтеріндегі физикалық процестерді зерттеп, жобалау кезеңінде олардың динамикалық сипаттамаларын анықтауға мүмкіндік береді. Бұл сипаттамалар, өз кезегінде, өнімнің жұмыс жағдайларында тиімділігін болжауға негіз болады.

Бұл жұмыста түрлі күш пен жылу көздерінің әсерінен термосерпімді өзекшенің физикалық және механикалық қасиеттері мен бастапқы күйін ескере отырып, оның термодинамикалық сипаттамаларын анықтау әдісі ұсынылады.

Зерттеу материалдары мен әдістері.

1 Байланыспаған термосерпімділік теңдеулері үшін Коши есебінің қойылымы

Коши есебі термосерпімді өзекшеге қолданылғандай байланыспаған термосерпімділік теңдеулері үшін тұжырымдалған. Бұл өзекшенің күй теңдеулері келесі түрде өрнектеледі [9,10]:

$$\begin{cases} \rho c^2 u_{,xx} - \rho u_{,tt} - \gamma \theta_{,x} + \rho F_1(x, t) = 0 \\ \theta_{,xx} - \kappa^{-1} \theta_{,t} + F_2(x, t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

мұндағы $x \in R^1, t \geq 0$, ρ - массалық тығыздық, c - өзекшенің серпімді толқындардың таралу жылдамдығы, γ - жылу өткізгіштік коэффициенті, $\kappa = \frac{k}{\rho c}$ жылу диффузиялық өткізгіштік

коэффициенті, $u(x, t)$ - өзек бөліктерінің бойлық жылжулары, $\theta(x, t)$ - салыстырмалы температура, $F_1(x, t)$ - ұзындық бірлігіне сыртқы күштің бойлық құраушысы; $F_2(x, t)$ жылу көзінің қуатын сипаттайтын шама. **Мұнда және төменде дербес туындылар белгіленеді:**

$$u_1 = u, \quad u_2 = \theta, \quad u_{,x} = \partial_x u_i \square \frac{\partial u_i}{\partial x}, \quad u_{,t} = \partial_t u_i \square \frac{\partial u_i}{\partial t} \quad (i=1, 2).$$

Өзекшедегі термосерпімді кернеу Дюамель-Нейман қатынасымен анықталады:

$$\sigma = \rho c^2 u_{,x} - \gamma \theta \quad (2)$$

Бастапқы шарттар белгілі:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_0(x), \quad u_{,t}(x, 0) = v_0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_0(x), \\ u_0(x) \in C^2(R^1), \theta_0(x) \in C^2(R^1), v_0(x) \in C^2(R^1), \end{aligned} \quad (3)$$

мұндағы $C^n(R^1)$ n -ші ретке R^1 дейін дифференциалданатын функциялар кеңістігі.

Бастапқы мәндер мәселесі зерттеледі, оның шешімі, егер оның бастапқы күйі және әсер етуші күш пен жылу көздері белгілі болса, өзекшенің кез келген уақыттағы күйін анықтауға мүмкіндік береді.

Сәулелену жағдайларына сәйкес келетін бастапқы шарттары (3) бар (1) теңдеулердің шешімдерін табу керек.

$$u(x, t) \rightarrow 0, \quad \theta(x, t) \rightarrow 0 \quad |x| \rightarrow \infty, \quad \forall t \quad (4)$$

жылу көздеріне ұшыраған кезде: $F_j(x, t) = L_j(R^1)$, $j = 1, 2$.

2 Жалпыланған функциялар кеңістігіндегі Коши есебінің қойылуы

Мәселені шешу үшін Владимиров В.С. Коши есебі үшін әзірлеген әдісті толқындық теңдеулер үшін қолданамыз. [11,12]. R^2 бойынша анықталған келесі тұрақты жалпыланған функциялар енгізіледі:

$$\hat{u}(x,t) = u(x,t)H(t), \quad \hat{\theta}(x,t) = \theta(x,t)H(t), \quad \hat{F}_j(x,t) = F_j(x,t)H(t), \quad j = 1, 2. \quad (5)$$

мұндағы $u(x,t)$, $\theta(x,t)$ - Коши есебінің шешімі, $H(t)$ - Хевисайд функциясы: $t > 0$ үшін $H(t) = 1$, $t < 0$ үшін $H(t) = 0$. Яғни, анықтау облысынан тыс Коши есебінің шешімін нөлге дейін анықтаймыз ($t < 0$ үшін) (1) жүйенің дифференциалдық операторының осы функцияға әрекетін жалпыланған функциялар кеңістігінде қарастырайық $D'(R^2)$ [11,12]

Алдымен осы функциялардың жалпыланған туындыларын табамыз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t} H(t) + u_0(x)\delta(t), \quad \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} H(t) + v_0(x)\delta(t) + u_0(x)\delta'(t), \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} &= \frac{\partial \theta}{\partial t} H(t) + \theta_0(x)\delta(t), \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} H(t), \quad \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} H(t), \quad \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} H(t), \quad \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} H(t), \end{aligned}$$

Мұнда $\delta(t)$ сингулярлы δ функция берілген. Содан кейін жүйе (1) $D'(R^2)$ да келесі түрде алынады:

$$\begin{aligned} c^2 \hat{u}_{,xx} - \hat{u}_{,tt} - \tilde{\gamma} \hat{\theta}_{,x} + F_1(x,t)H(t) &= -v_0(x)\delta(t) - u_0(x)\delta'(t), \\ \hat{\theta}_{,xx} - \kappa^{-1} \hat{\theta}_{,t} + F_2(x,t)H(t) &= \kappa^{-1} \theta_0(x)\delta(t), \\ \tilde{\gamma} &= \frac{\gamma}{\rho}. \end{aligned} \quad (6)$$

Бұл теңдеулерде бастапқы шарттар сингулярлық массалық күштер және жылу көздері ретінде енгізілген. Әрі қарай белгілейміз

$$\begin{aligned} \hat{F}_1(x,t) &= F_1(x,t)H(t), \quad \hat{F}_2(x,t) = F_2(x,t)H(t), \\ \hat{G}_1(x,t) &= \hat{F}_1(x,t) + v_0(x)\delta(t) + u_0(x)\delta'(t) \\ \hat{G}_2(x,t) &= \hat{F}_2(x,t) - \kappa^{-1} \theta_0(x)\delta(t) \end{aligned} \quad (7)$$

Бұл есептің жалпыланған функциялар кеңістігіндегі шешімі тензорлық-функционалдық свертка (*) арқылы өрнектеледі:

$$\begin{aligned} \hat{u}(x,t) &= u(x,t)H(t) = \hat{U}_1^k(x,t) * \hat{G}_k(x,t), \\ \hat{\theta}(x,t) &= \theta(x,t)H(t) = \hat{U}_2^k(x,t) * \hat{G}_k(x,t), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

$\hat{U}_j^k(x,t)$ - концентрленген импульстік көздер тудыратын термосерпімді толқындарды сипаттайтын Грин тензоры теңдеулері (1) орналасқан. Өнімдегі бірдей индекстердің барлық жерінде қосынды 1-ден 2-ге дейін болады (тензорлық свертка).

Белгілі болғандай, дифференциалдық теңдеулерді шешу осы теңдеулердің Грин тензоры бар сверткалық алгебрасында бірегей болып табылады.

3 Біріктірілмеген термосерпімділік теңдеулерінің Грин тензоры

Грин тензоры $U_i^j(x,t)$ – импульстік шоғырланған күш пен белгілі бір типтегі жылу көзінің

$$F_1 = \delta(x)\delta(t)\delta_1^j, \quad F_2 = \delta(x)\delta(t)\delta_2^j, \quad j=1,2 \quad (9)$$

мында δ_i^j - Кронеккер атырауы. $j = 1$ кезінде қуат көзі жұмыс істейді, $j = 2$ кезінде жылу көзі әсер етеді. Грин тензоры келесі *сәуелелену шарттарын қанағаттандырады* :

$$U_i^j(x, t) = 0, \quad t < 0,$$

$$U_i^j(x, t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \text{ для } \forall x \in R^1. \quad (10)$$

$$U_i^j(x, t) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty \text{ для } \forall t > 0$$

Грин тензоры құрастырылған, оның келесі түрі бар (тензорды шығару үшін [13,14] қараңыз):

$$U_1^j(x, t) = \delta_1^j k^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} - \delta_1^j \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} - \delta_2^j \tilde{\gamma} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} - \delta_1^j \Sigma_3(t) \delta(x) + \delta_2^j \tilde{\gamma} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial x}, \quad (11)$$

$$U_2^1 = 0, \quad U_2^2 = c^2 \Sigma_3(x, t) + c^2 \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2}, \quad j = 1; 2$$

$$\Sigma_1(x, t) = \frac{k}{c} H(ct - |x|) \left[\frac{k}{c^2} \left(1 - e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} \right) + t - \frac{|x|}{c} \right], \quad \Sigma_2(x, t) = AH(t) \left\{ e^{-\frac{c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau - \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau \right\},$$

$$\Sigma_3(x, t) = -\frac{k}{c^2} H(t) (e^{\frac{c^2}{k}t} - 1),$$

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} = -\frac{k}{c} H(ct - |x|) \left[e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} - 1 \right], \quad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} = \frac{k}{c^2} H(ct - |x|) \operatorname{sgn} x \left[e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} + 1 \right],$$

$$\frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} = -\frac{AH(t)}{k} \left\{ e^{-\frac{c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} \frac{x}{2\tau} d\tau - \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} \frac{x}{2\tau} d\tau \right\},$$

$$\frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} = \left(-\frac{k}{c^2} \delta(ct - |x|) + \frac{2k}{c^2} H(ct - |x|) \delta(x) \right) \left[e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)} + 1 \right] + \frac{1}{c} H(ct - |x|) e^{\frac{c}{k}(|x|-ct)},$$

$$\frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2} = AH(t) \left\{ \frac{c^4}{k^2} e^{-\frac{c^2}{k}t} \int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} d\tau - \frac{c^2}{k} e^{-\frac{c^2}{k}t} \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\sqrt{\tau}} \right\} -$$

$$-AH(t) \left\{ e^{-\frac{c^2}{k}t} \frac{e^{\frac{c^2}{k}t - \frac{x^2}{4kt}}}{k\sqrt{t}} \left(c^2 - \frac{x^2}{4t^2} \right) + \frac{x^2}{4kt^2} \frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{t}} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} = \frac{AH(t)}{2k} \left\{ e^{-\frac{c^2}{k}t} \left[\int_0^t \frac{e^{\frac{c^2}{k}\tau - \frac{x^2}{4k\tau}}}{\tau\sqrt{\tau}} \left(\frac{x^2}{2k\tau} - 1 \right) d\tau \right] - \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4k\tau}}}{\tau\sqrt{\tau}} \left(\frac{x^2}{2k\tau} - 1 \right) d\tau \right\}.$$

Грин тензорын біле отырып, кез келген көздер үшін (7) жүйенің шешімін тензорлық-функционалдық свертка (8) түріндегі тұрғызуға болады, (8) формулаларда құрамдас бөліктер бойынша жинақтау жалпыланған функциялар кеңістігіндегі свертка анықтамасына сәйкес орындалады [11,12]. Жергілікті интегралдық функциялармен сипатталған тұрақты көздер үшін бұл формула интегралды түрде ұсынылуы мүмкін:

$$u_j(x, t) = \iint_{R^2} U_j^k(x - y, t - \tau) * F_k(y, \tau) dy d\tau \quad j, k = 1, 2. \quad (12)$$

4 Коши есебінің шешімі

Жалпыланған шешімнің интегралды көрінісін алу үшін (8) сверткаларды аламыз (7) ескере отырып, функциялардың және оның туындысының қасиеттерін пайдалана отырып (айнымалы x свертка белгісі тек x - ке қатысты толық емес свертканы білдіреді):

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, t) = u(x, t)H(t) &= \hat{U}_1^1(x, t) * F_1(x, t)H(t) + \hat{U}_1^1(x, t) *_{\kappa} \nu_0(x) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}_1^1(x, t) *_{\kappa} u_0(x) + \hat{U}_1^2(x, t) *_{\kappa} F_2(x, t)H(t) + \hat{U}_1^2(x, t) *_{\kappa} \kappa^{-1} \theta_0(x) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\hat{\theta}(x, t) = \theta(x, t)H(t) = \hat{U}_2^2(x, t) * F_2(x, t)H(t) + \hat{U}_2^2(x, t) *_{\kappa} \kappa^{-1} \theta_0(x) \quad (14)$$

Қатынастардың оң жақ бөлігіне (13), (14) кіретінін ескеріңіз . (13), (14) теңдеулердің оң жағындағы функциялар дұрыс болғандықтан, шешімнің бұл кескіндерін келесі интегралдық түрде жазуға болады.

Келесі теореманы тұжырымдаймыз.

Теорема. Егер функциялар $F_1(x, t), F_2(x, t)$ R^2 бойынша интегралданатын болса және $u_0(x), v_0(x), \theta_0(x)$ R бойынша үзіліссіз болса , онда қосылмаған термосерпімділік теңдеулері үшін Коши есебінің шешімі келесі түрде болады:

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, t) &= H(t) \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} U_1^1(x - y, \tau) F_1(y, t - \tau) dy + H(t) \int_{-\infty}^{\infty} U_1^1(x - y, \tau) \nu_0(y) dy + \\ &+ H(t) \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} U_1^1(x - y, \tau) u_0(y) dy + H(t) \int_{-\infty}^{\infty} U_1^2(x - y, \tau) F_2(y, t - \tau) dy + \\ &+ \kappa^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} U_1^2(x - y, \tau) \theta_0(y) dy \end{aligned} \quad (15)$$

$$\hat{\theta}(x, t) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} U_2^2(x - y, \tau) F_2(y, t - \tau) dy + \kappa^{-1} H(t) \int_{-\infty}^{\infty} U_2^2(x - y, \tau) \theta_0(y) dy \quad (16)$$

мұндағы $t > 0$.

Грин тензорының (11) және (7) $\hat{G}_1(x, t), \hat{G}_2(x, t)$ көрінісін пайдаланып, Коши есебінің шешімі келесі түрде болады:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \hat{U}_1^j * \hat{G}_j = \\
&= \delta_1^j \kappa^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} * G_j - \delta_1^j \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} * G_j - \delta_2^j \tilde{\gamma} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} * G_j - \delta_1^j \Sigma_3(t) \delta(x) * G_j + \delta_2^j \tilde{\gamma} \frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} * G_j = \\
&= \left\{ \left(\kappa^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} \right) - \Sigma_3(t) \right\} * G_1 + \tilde{\gamma} \left(\frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} - \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} \right) * G_2 = \\
&= \left\{ \left(\kappa^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} \right) - \Sigma_3(t) \right\} * \hat{F}_1 + \tilde{\gamma} \left(\frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} - \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} \right) * \hat{F}_2 + \\
&\quad \left\{ \left(\kappa^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} \right) - \Sigma_3(t) \right\}_x * v_0(x) - \kappa^{-1} \tilde{\gamma} \left(\frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} - \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x} \right)_x * \theta_0(x) + \\
&\quad + \partial_t \left\{ \left(\kappa^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} \right) - \Sigma_3(t) \right\}_x * u_0(x) \\
\theta(x, t) &= \hat{U}_2^j * \hat{G}_j = c^2 \Sigma_3(x, t) * G_2 + c^2 \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} * G_2 - \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2} * G_2 = \\
&= \left(c^2 \Sigma_3(x, t) + c^2 \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2} \right) * F_2(x, t) H(t) - \left(c^2 \Sigma_3(x, t) + c^2 \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2} \right)_x * \kappa^{-1} \theta_0(x)
\end{aligned} \tag{17}$$

Келесі белгілерді енгізейік:

$$\begin{aligned}
f1(x, t) &= \kappa^{-1} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Sigma_1}{\partial x^2} - \Sigma_3(t), \quad f2(x, t) = \frac{\partial \Sigma_2}{\partial x} - \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x}, \\
f3(x, t) &= c^2 \Sigma_3(x, t) + c^2 \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Sigma_2}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

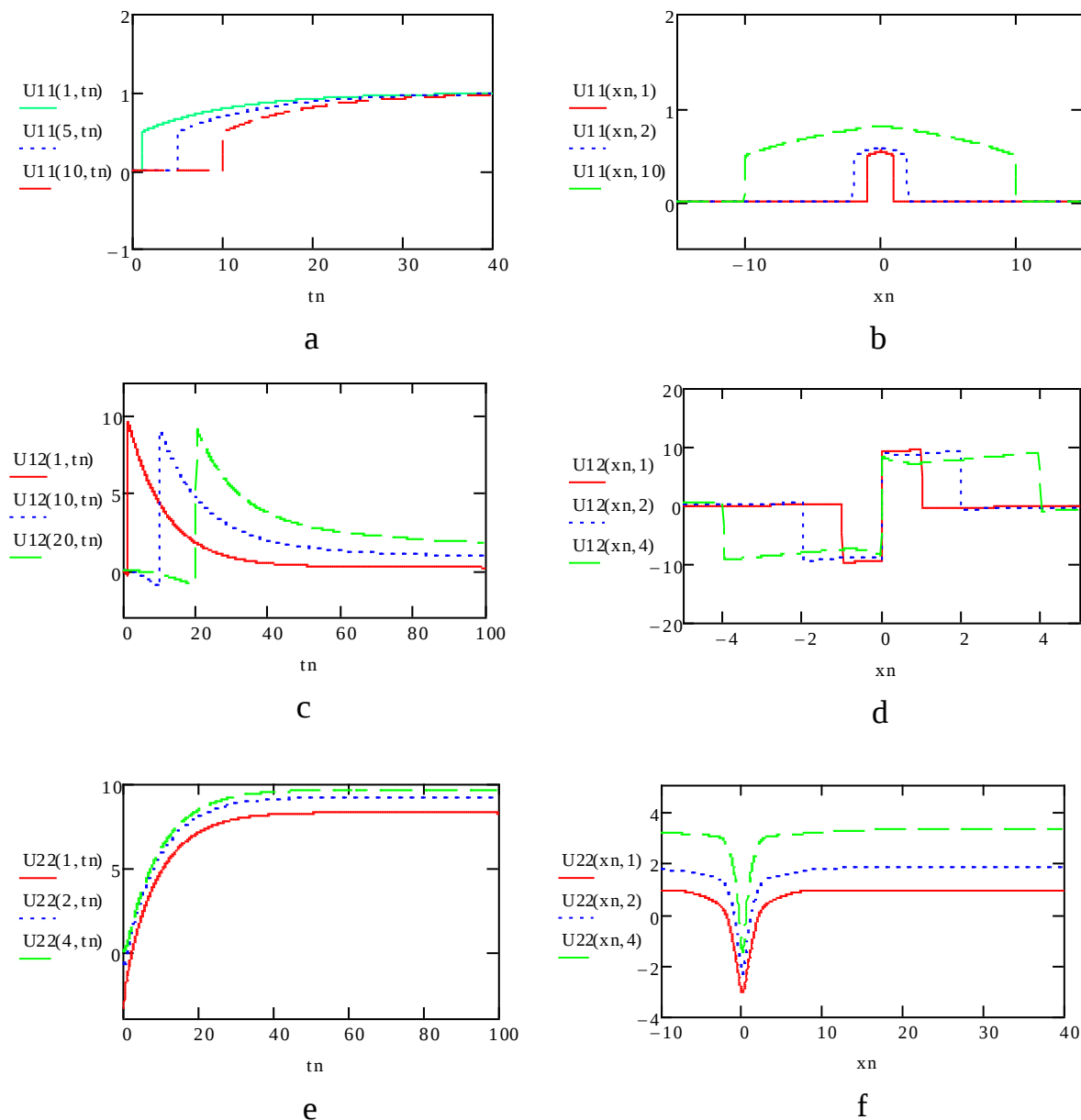
Сонда (15,16) интегралды бейнелеу келесі түрге ие болады:

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= H(t) \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \{ f1(x-y, t-\tau) F_1(y, \tau) + \tilde{\gamma} f2(x-y, t-\tau) * F_2(y, \tau) \} dy + \\
&\quad + H(t) \int_{-\infty}^{\infty} \{ f1(x-y, t) v_0(y) - \kappa^{-1} \tilde{\gamma} f2(x-y, t) \theta_0(y) + \partial_t f1(x-y, t) u_0(y) \} dy \\
\theta(x, t) &= H(t) \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f3(x-y, t-\tau) F_2(y, \tau) dy - \kappa^{-1} H(t) \int_0^t f3(x-y, t) \theta_0(y) dy
\end{aligned}$$

Формулалар (15), (16) жеке көздер кезінде де қолдануға болатынын ескеріңіз $\hat{F}_1(x, t)$, $\hat{F}_2(x, t)$ бірақ бұл жағдайда свертка жалпыланған функциялар кеңістігіндегі свертка ережесі бойынша сәйкес алынуы керек [11,12].

5 Грин тензорының сандық есептеулері

MatCad-15 жүйесінде Грин тензорды $U_i^j(x,t)$ есептеу бағдарламасы жасалған. Мұнда келесі өлшемсіз шартты термосерпімді параметрлер үшін осы матрицаның құрамдас бөліктерінің есептеулері берілген: $\rho=1$, $c=1$, $\gamma=1$, $\kappa=2$.



Сурет 1. Грин тензорының құрамдас бөліктері ($U_{ij}(x_n, t_n) = U_i^j(x, t)$) тұрақты нүктеде және белгіленген уақытта

($x=x_n$) және уақыттың берілген моментіндегі ($t=t_n$) Грин тензорының сәйкес компоненттерінің уақыт бойынша өзгерістері көрсетілген. Графиктерде көрсетілген орын ауыстырулардың $t_n = x_n/c$ уақытындағы x_n нүктесіне серпімді соққы толқынының келу сәтімен байланысты секірулері бар.

6 Бөлінген қуат және жылу көздерінің әрекетіндегі Коши есебінің шешімдері

Әртүрлі бөлінген қуат және тұрақты типтегі жылу көздерінің әсерінен Коши есебінің

шешімдерін қарастырайық.

Коши мәселесі 1. Өзекшенің сегментіне келесі күш түсірілсін:

$$F_1(x, t) = A(x, t)H(L - |x|), F_2(x, t) = 0.$$

Бастапқы шарттар нөлге тең. Сонда 15, 16 формулаларын және 1 теореманы қолданып, орын ауыстыруды аламыз:

$$u(x, t) = U_1^1(x, t) * A(x, t)H(L - |x|) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-L}^L U_1^1(x - y, \tau) A(y, t - \tau) dy$$

(2) формуладан шығады

$$\begin{aligned} \sigma_1(x, t) &= \rho c^2 u_{,x} = \rho c^2 U_{1,x}^1(x, t) * F_1(x, t) = \rho c^2 U_1^1(x, t) * \frac{\partial F_1(x, t)}{\partial x} = \\ &= \rho c^2 U_1^1(x, t) * (A(x, t)H(L - |x|))_{,x} = \\ &= \rho c^2 U_1^1(x, t) * A(x, t) \{ \delta(L + x) - \delta(L - x) \} + \rho c^2 U_1^1(x, t) * (A_{,x} H(L - |x|)) = \\ &= \rho c^2 H(t) \int_0^t \{ U_1^1(x + L, \tau) A(-L, t - \tau) - U_1^1(x - L, \tau) A(L, t - \tau) \} d\tau \\ &\quad + \rho c^2 H(t) \int_{-L}^L dy \int_0^t U_1^1(x - y, \tau) A(y, t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Коши мәселесі 2. Сегментте әрекет ететін жылу көзі болсын:

$$F_1(x, t) = 0, F_2(x, t) = A(x, t)H(L - |x|)$$

Бастапқы шарттар нөлге тең. Содан кейін

$$\begin{aligned} u(x, t) &= U_1^2(x, t) * A(x, t)H(L - |x|) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-L}^L U_1^2(x - y, \tau) A(y, t - \tau) dy \\ \theta(x, t) &= U_2^2(x, t) * A(x, t)H(L - |x|) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-L}^L U_2^2(x - y, \tau) A(y, t - \tau) dy \\ \sigma(x, t) &= \rho c^2 u_{,x} - \gamma \theta = \\ &= \rho c^2 H(t) \int_0^t \{ U_1^2(x + L, \tau) A(-L, t - \tau) - U_1^2(x - L, \tau) A(L, t - \tau) \} d\tau + \\ &\quad + \rho c^2 H(t) \int_{-L}^L dy \int_0^t \{ U_1^2(x - y, \tau) - \gamma U_2^2(x - y, \tau) \} A(y, t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Коши мәселесі 3. Өзекшенің кесіндісіне күш қолданылсын: Бастапқы шарттар нөлге тең.

$$F_1(x, t) = A(x)H(L - |x|)H(t), F_2(x, t) = 0$$

$$u(x, t) = U_1^1(x, t) * A(x, t)H(L - |x|) = H(t) \int_{-L}^L A(x - y) dy \int_0^t U_1^1(y, \tau) d\tau$$

$$\sigma(x, t) = \rho c^2 H(t) \int_0^t \left\{ U_1^1(x+L, \tau) A(-L) - U_1^1(x-L, \tau) A(L) \right\} d\tau + \\ + \rho c^2 H(t) \int_{-L}^L A(x-y) dy \int_0^t U_1^1(y, \tau) d\tau$$

Коши мәселесі 4. Сегментте әрекет ететін жылу көзі болсын:

$$F_1(x, t) = 0, F_2(x, t) = A(x)H(t)H(L - |x|)$$

Бастапқы шарттар нөлге тең. Бұл жағдайда

$$u(x, t) = U_1^2(x, t) * A(x, t)H(L - |x|) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-L}^L U_1^2(x-y, \tau) A(y) dy \\ \theta(x, t) = U_2^2(x, t) * A(x, t)H(L - |x|) = H(t) \int_0^t d\tau \int_{-L}^L U_2^2(x-y, \tau) A(y) dy \\ \sigma(x, t) = \rho c^2 u_{,x} - \gamma \theta = \\ = \rho c^2 H(t) \int_0^t \left\{ U_1^2(x+L, \tau) A(-L) - U_1^2(x-L, \tau) A(L) \right\} d\tau + \\ + \rho c^2 H(t) \int_{-L}^L A(y) dy \int_0^t \left\{ U_1^2(x-y, \tau) - \gamma U_2^2(x-y, \tau) \right\} d\tau$$

Осы түрдегі қуат пен жылу көздерін бірге таратқанда, шешім олардың әрқайсысы үшін сәйкес шешімдердің қосындысы болады.

Материалдар мен тәсілдер

Термосерпімді материалдың термиялық кернеу күйін анықтауға арналған Коши есебінің шешімі бөлінген күш пен жылу көздерінің әрекетіндегі өзек. Зерттеу үшін жалпыланған функциялар әдісі қолданылды.

Нәтижелер және оларды талқылау.

Жүргізілген зерттеу нәтижесі температура мен сандық есептеулер болып табылады импульстік шоғырланған күштің және жылу көздерінің әсерінен өзекшенің қозғалыстары нақтылар.

Қорытынды

Алынған формулалар мен әзірленген бағдарлама сингулярлы жалпыланған функциялармен сипатталған тараған және импульстік және центрлі әртүрлі жылу және күш көздерінің әсерінен өзекшелердегі термодинамикалық процестерді зерттеуге мүмкіндік береді.

Сондай-ақ әзірленген компьютерлік бағдарлама машина жасауда және жер үсті және жер асты құрылыстарын, мысалы, құрылыс тіректерін, бағандарды және басқа элементтерді тұрғызу кезінде қолданылатын негізі конструкцияларды пайдалану кезінде беріктік пен сенімділікті бағалау үшін пайдаланылуы мүмкін.

Растау Бұл зерттеу жұмысы Қазақстан Республикасы Ғылым және Жоғары Білім министрлігінің Ғылым комитетінің гранты (Грант № BR20280990) бойынша орындалды.

Әдебиеттер тізімі

1. Li Y. Investigation of heat transfer characteristics on rod fastening rotor. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – V 3, – 677p.
2. Shibib K., Minshid M., Alattar N. Thermal and stress analysis in Nd: YAG laser rod with

different double end pumping methods. Thermal Science. – 2011. – No. 15. – p. 399–407.

3. Andreev V., Turusov R. Nonlinear modeling of the kinetics of thermal stresses in polymer rods. Advanced Materials and Structural Engineering. – 2016, p. 719–722.

4. Sukarno, D. H. Analysis of nuclear fuel rod temperature distribution using CFD calculation and analytical solution. Proceedings of the 6th international symposium on current progress in mathematics and sciences. 2021.

5. Mishchenko, A. Spatially Structure Spatial Problem of the Stressed - Deformed State of a Structural Inhomogeneous Rod. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering – 2020. – p 953.

6. Hwang, J.K. Thermal Behavior of a Rod during Hot Shape Rolling and Its Comparison with a Plate during Flat Rolling. Processes. – 2020, – Vol. 8. – No. 3. – 327p.

7. Liu, Q., He, X. Thermal analysis of terfenol-d rods with different structures. Micromachines – 2023. –Vol. 14. – No. 1, 216 p.

8. Arshidinova M., Tashev A., Kudaykulov A. Developing a method of accounting for the existence of local surface heat exchange in rods of variable cross-section. Applied mechanics. – 2023. – No. 7, – Vol. 3, – 123p.

9. Новацкий В. Теория упругости. Москва: Мир. – 1975, – 872с.

10. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. Москва: Мир. – 1970, –256 с.

11. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – 1981, –512 с.

12. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – 1979. – Москва: Наука.

13. Алексеева Л.А., Дадаева А.Н., Айнакеева Н.Ж. Фундаментальные и обобщенные решения уравнений нестационарной динамики термоупругих стержней. Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. – 2018, №2 (123), стр 56-64.

14. Alexeyeva L.A, Dadayeva A.N., Ainakeyeva N.Zh. Green tensor and regular solutions of equations of rods thermodynamics and their properties. Journal of theoretical and applied mechanics. – 2021. – Vol. 59. – No. 2. –p. 227-238.

References

1. Li Y. Investigation of heat transfer characteristics on rod fastening rotor. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – V 3, – 677p.

2. Shibib K., Minshid M., Alattar N. Thermal and stress analysis in Nd: YAG laser rod with different double end pumping methods. Thermal Science. – 2011. – No. 15. – p. 399–407.

3. Andreev V., Turusov R. Nonlinear modeling of the kinetics of thermal stresses in polymer rods. Advanced Materials and Structural Engineering. – 2016, p. 719–722.

4. Sukarno, D. H. Analysis of nuclear fuel rod temperature distribution using CFD calculation and analytical solution. Proceedings of the 6th international symposium on current progress in mathematics and sciences. 2021.

5. Mishchenko, A. Spatially Structure Spatial Problem of the Stressed - Deformed State of a Structural Inhomogeneous Rod. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering – 2020. – p 953.

6. Hwang, J.K. Thermal Behavior of a Rod during Hot Shape Rolling and Its Comparison with a Plate during Flat Rolling. Processes. – 2020, – Vol. 8. – No. 3. – 327p.

7. Liu, Q., He, X. Thermal analysis of terfenol-d rods with different structures. Micromachines – 2023. –Vol. 14. – No. 1, 216 p.

8. Arshidinova M., Tashev A., Kudaykulov A. Developing a method of accounting for the existence of local surface heat exchange in rods of variable cross-section. Applied mechanics. – 2023. – No. 7, – Vol. 3, – 123p.

9. Novackij V. Teoriya uprugosti. Moskva:Mir. – 1975, – 872s. Novackii V. Dinamicheskie dinamiki termouprugosti. Moscow: Mir. – 1970, 256 p.
10. Novackij V. Dinamicheskie zadachi termouprugosti. Moskva: Mir. – 1970, –256 s.
11. Vladimirov V.S. Uravneniya matematicheskoy fiziki. – 1981, –512 s.
12. Vladimirov V.S. Obobshchennye funktsii v matematicheskoy fizike. – 1979. – Moskva: Nauka.
13. Alekseeva L.A., Dadaeva A.N., Ajnakeeva N.ZH. Fundamental'nye i obobshchennye resheniya uravnenij nestacionarnoy dinamiki termouprugih sterzhnej. Vestnik ENU im. L.N.Gumileva. – 2018, №2 (123), str 56-64.
14. Alexeyeva L.A, Dadayeva A.N., Ainakeyeva N.Zh. Green tensor and regular solutions of equations of rods thermodynamics and their properties. Journal of theoretical and applied mechanics. – 2021. – Vol. 59. – No. 2. –p. 227-238.

ДИНАМИКА ТЕРМОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ МЕТОДОМ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

АЙНАКЕЕВА Н.Ж. 

Айнакеева Нурсауле Жұматқызы – Научный сотрудник, Институт механики и машиноведения имени академика У.А.Джолдасбекова, г. Алматы, Казахстан.

E-mail: nursauale_math@mail.ru; <http://orcid.org/0000-0003-4643-6072>

Аннотация. Стержневые конструкции находят широкое применение в различных областях техники. Временные изменения температурного поля приводят к возникновению переменных напряжений в стержневых элементах, что влияет на их прочностные характеристики и надежность в процессе эксплуатации. Задача определения термонапряженного состояния таких конструкций с учетом их механических свойств, включая упругость, является одной из ключевых научных проблем. Методы математического моделирования позволяют исследовать термодинамические процессы, происходящие в конструкциях, а также анализировать их динамические и прочностные свойства на стадии проектирования.

В данной работе рассматривается задача Коши для динамики термоупругих стержней при произвольных начальных условиях и воздействиях сил и тепла. С использованием тензора Грина уравнений термоупругости было получено аналитическое решение, которое позволяет вычислить деформации, напряжения и температуру в различных сечениях стержня в любой момент времени, при известных начальных данных и воздействующих силах и тепловых источниках.

Приведены численные результаты расчетов температуры и перемещений, вызванных импульсными сосредоточенными силовыми и тепловыми воздействиями. Также были проведены расчеты для задач Коши с учетом распределенных вдоль стержня силовых и тепловых источников регулярной формы. Разработанная программа дает возможность исследовать термодинамические процессы в стержневых конструкциях с различными физико-механическими характеристиками при воздействии как сосредоточенных, так и распределенных тепловых и силовых источников, включая импульсные воздействия, которые описываются сингулярными обобщенными функциями.

Ключевые слова: термоупругий стержень, температура, перемещение, напряжение, метод обобщенных функций, тензор Грина.

DYNAMICS OF A THERMOELASTIC ROD BY THE METHOD OF GENERALIZED FUNCTIONS

AINAKEYEVA N.ZH. 

Ainakeyeva Nursauale Zhumatkyzy – Researcher, Institute of mechanics and engineering named after academician U.A. Dzholdasbekov, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: nursauale_math@mail.ru; <http://orcid.org/0000-0003-4643-6072>

Abstract: Rod elements are widely used in numerous technological applications. Temporal variations in the temperature field lead to the development of a time-dependent stress field within rod structures, affecting their strength and reliability during use. Determining the thermally-induced stress state of rod structures, taking into account their mechanical

properties such as elasticity, is a critical scientific and engineering challenge. The use of mathematical modeling techniques allows the analysis of thermodynamic processes within the structure and its components, aiding in the determination of their dynamic and strength characteristics during the design stage.

This paper focuses on the Cauchy problem for the dynamics of a thermoelastic rod with arbitrary initial conditions and subjected to both thermal and mechanical influences. Using Green's tensor in the context of thermoelasticity equations, an analytical solution is derived, enabling the determination of deformations, stresses, and temperatures at any point along the rod and at any given time, based on known initial conditions and acting force and heat sources.

Numerical calculations of temperature and displacement are presented for scenarios involving pulsed concentrated thermal and force sources. Furthermore, solutions to the Cauchy problem are obtained for cases with distributed regular force and heat sources along the rod. The developed program provides a tool for studying thermodynamic processes in rods with various physical and mechanical properties under the influence of both distributed and concentrated pulsed thermal and force sources, described by singular generalized functions.

Key words: cauchy problem, rod, uncouple thermoelasticity, method of generalized functions, temperature, displacement and stress.