Пайданылған әдебиеттер тізімі

1. Қ.К.Тоқаев. «Сындарлы қоғамдық диалог – Қазақстанның тұрақтылығы мен өркендеуінің негізі» Қазақстан халқына Жолдауы. //Егемен Қазақстан, 02.09.2019ж.
2. В.А. Сластенин, Л.С.Подымова. Педагогика: инновационная деятельность. М.: ИЧП "Издательство Магистр", 1997. -224 с.
3. Л.З. Габбасова. Инновационные технологии в образовательном процессе // Инновационные педагогические технологии: материалы V Междунар. науч. конф. (г. Казань, октябрь 2016 г.). — Казань, Изд-во «Бук», 2016. — vi, 132 с.
4. https://kahoot.com/
5. https://socrative.com/
6. https://ru.padlet.com/
7. https://get.plickers.com/
8. https://quickkeyapp.com/
9. https://quizlet.com/ru
10. https://www.mentimeter.com/

ҒТАМР: 27.25.19

БАСТАПҚЫ ШАРТЫ $W^r_{2,\alpha}$ КЛАСЫНА ТИЕСІЛІ ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУІНІҢ ШЕШІМІН К(Е)Д - ЗЕРТТЕУІ АЯСЫНДА ДИСКРЕТИЗАЦИЯЛАУ ТУРАЛЫ

А.Б. УТЕСОВ, Г.И. УТЕСОВА

Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік мемлекеттік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

Аннотация. Мақалада бастапқы шарты функционалдық $W^r_{2,\alpha}$ класына тиесілі жылуөткізгіштік теңдеуінің шешімін дискретизациялау есебі «компьютерлік (есептеуіш) диаметр» деген атауға ие зерттеу схемасы (қысқаша: К(Е)Д – зерттеуі аясында) бойынша $L^{q,\infty}, q \geq 2$ кеңістігі метрикасында шешілген. Ашып айтсақ, біріншіден, дискретизациялаудағы ең кіші қателіктің дәл реті анықталған; екіншіден, сол дәл ретті қамтамасыз ететін есептеу агрегаты ұсынылған; үшіншіден, ұсынылған есептеу агрегатының шектік қателігі табылған.

Кілттік сөздер. Компьютерлік (есептеуіш) диаметр, есептеу агрегаты, шектік қателік.

Аннотация. В статье по схеме исследования под названием «компьютерный (вычислительный) поперечник» (коротко: в рамках К(В)П – исследования) решена задача дискретизации решения уравнения теплопроводности с начальным условием из функционального класса $W^r_{2,\alpha}$ в метрике пространства

$L^{q,\infty}$, $q \geq 2$. Именно, во – первых, установлен точный порядок наименьшой погрешности дискретизации; во – вторых, предложен вычислительный агрегат, обеспечивающий точный порядок; в – третьих, найдена предельная погрешность предложенного вычислительного агрегата.

Ключевые слова. Компьютерный (вычислительный) поперечник, вычислительный агрегат, предельная погрешность.

Annotation. In the article on the research scheme entitled "computational (numerical) diameter" (in short:C(N)D-studies) the problem of discretization of the solution of the heat equation with the initial condition from the functional class $W^{r}_{2,\alpha}$ in the metric of space $L^{q,\infty}$, $q \geq 2$. Is solved,firstly,the exact order of the smallest sampling error has been established, secondly,a computing unit has been proposed that provides an accurate order; thirdly,the limiting error of the proposed computing unit has been found.

Keywords. Computational (numerical) diameter, computing unit, limiting error.

Алдымен төменде пайдаланылатын белгілеулерді келтірейік. $u(x,t;f)$ арқылы жылуөткізгіштік

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2}, (s = 1,2,\ldots, 0 < t < \infty, x \in R^s)$$

теңдеуінің $u(x_1,\ldots,x_s,0;f) = f(x_1,\ldots,x_s)$ шартын қанағаттандыратын шешімін таңбалаймыз.

$\hat{f}(m)$ символымен $[0,1]^s$ бірлік кубында анықталған және әрбір айнымалысы бойынша бірпериодты $f(x) \equiv f(x_1,\ldots,x_s)$ функциясының Фурье коэффициентін белгілейміз, яғни, әрбір $m \in Z^s$ үшін $\hat{f}(m) = \int\limits_{[0,1]^s} f(x) e^{-2\pi i(m,x)} dx$.

Ақырлы E жиыны үшін $|E|$ арқылы оның элементтерінің санын белгілейтін боламыз. Ал $[a]$ символы – әдеттегідей a санының бүтін бөлігі.

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің шешімдері, әдетте, сәйкес дифференциалдық операторлардың меншікті функциялары бойынша жазылған Фурье қатарлары немесе ядролардың сверткалары арқылы бейнелетін интегралдар болады. Сондықтан дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің қатарлар немесе интегралдар түріндегі шешімдерін жуықтау мәселесі туындайды. Біз осы жұмыста еселі қатар шегі болатын $u(x,t;f)$ шешімін f функциясынан (бастапқы шарттан) алынған дәл емес мәліметтер бойынша құрылған есептеу агрегатымен «компьютерлік (есептеуіш) диаметр» деген атауға ие зерттеу схемасы (қысқаша: К(Е)Д – зерттеуі аясында) бойынша дискретизациялау мәселесімен айналысамыз. К(Е)Д зерттеуі мына шама арқылы жүргізіледі:

$$\delta_N(\varepsilon_N; D_N, T, F)_Y = \inf_{\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \in D_N} \delta_N(\varepsilon_N; (l^{(N)}, \varphi_N), T, F)_Y ,$$

мұндағы $\delta_N\left(\varepsilon_N; (l^{(N)}, \varphi_N), T, F\right)_Y =$

$$= \sup_{f \in F} \sup_{z_1,\dots, z_N} \left\{ \left\| (Tf)(\cdot) - \varphi_N(z_1,\dots, z_N;\cdot) \right\|_Y : \left| z_i - l_N^{(i)}(f) \right| \le \varepsilon_N, i = 1,\dots, N \right\},$$

ε_N – теріс емес мүшелі тізбек, F – $f : \Omega \to C$ функцияларының жиыны (класы), Y – $g : \Omega_1 \to C$ функцияларының нормаланған кеңістігі, $T-$ нормаланған $X\,(F \subset X)$ кеңістігін нормаланған Y кеңістігіне бейнелейтін оператор, $l^{(N)}-$ $l_N^{(1)} : F \to C,\dots, l_N^{(N)} : F \to C$ функционалдарына сәйкес комплексмәнді $\left(l_N^{(1)}(f),\dots, l_N^{(N)}(f)\right)$ векторы, φ_N- $C^N \times \Omega_1$ жиынында анықталған комплексмәнді функция, яғни, $\varphi_N \equiv \varphi_N(z_1,\dots, z_N; y) : C^N \times \Omega_1 \to C$, ал $D_N \subset \{(l^{(N)}, \varphi_N)\}$. Әрбір $(l^{(N)}, \varphi_N)$ жұбы $\varphi_N\left(l_N^{(1)}(f),\dots, l_N^{(N)}(f); y\right)$ есептеу агрегатын анықтайды. Сондай–ақ, $a_n \asymp b_n$ жазуын оң мүшелі $\{a_n\}_{n\ge1}$ және $\{b_n\}_{n\ge1}$ тізбектері үшін $n-$нен тәуелсіз қайсыбір A, B тұрақтылары әрбір n үшін $A\cdot b_n \le a_n \le B\cdot b_n$ қос теңсіздігі орындалатындай табылған жағдайда қолданамыз.

К(Е)Д зерттеуінде $T : F \to Y$ операторының, F класының, D_N жиынының, Y кеңістігінің әртүрлі жағдайларында К(Е)Д – 1, К(Е)Д – 2 және К(Е)Д – 3 есептері шығарылады (қараңыз, [1 – 3]). Осы жұмыста

$$Tf(\cdot) = u(\cdot; f),\ F = W_{2,\alpha}^{r_1,\dots, r_s}[0,1]^s,\ Y = L^{q,\infty}\left([0,1]^s \times [0,+\infty)\right),$$

$$D_N = \Phi_N \equiv \left\{ l_N^{(1)}(f) = \hat{f}\left(m^{(1)}\right),\dots, l_N^{(N)}(f) = \hat{f}\left(m^{(N)}\right) \right\} \times \{\varphi_N\}_{L^q[0,1]^s}$$

жағдайлары зерттелген ($Y = L^{q,\infty}\left([0,1]^s \times [0,+\infty)\right)$ кеңістігінің анықтамасы [4, 28- бет] жұмысында берілген!). Оң компонентті $r = (r_1,\dots, r_s)$, $s = 1,2,\dots$ векторы берілген болсын.

s өлшемді бірлік $[0,1]^s$ кубында анықталған, әрбір айнымалысы бойынша бірпериодты және $[0,1]^s$ кубында интегралданатын, тригонометриялық $\hat{f}(m)$ Фурье коэффициенттері

$$\sum_{m\in Z^s} |\hat{f}(m)|^2 (\overline{m}_1^{2r_1} \ln^{2\alpha_1}(\overline{m}_1+1)+\ldots+\overline{m}_s^{2r_s} \ln^{2\alpha_s}(\overline{m}_s+1)) \le 1,$$

$$\overline{m}_1 = \max\{1,|m_1|\},\ldots,\ \overline{m}_s = \max\{1,|m_s|\}$$

теңсіздігін қанағаттандыратын s айнымалы $f(x)=f(x_1,\ldots,x_s)$ функцияларының класын $W_{2,\alpha_1,\ldots,\alpha_s}^{r_1,\ldots,r_s}[0,1]^s$ (қысқаша: $W_{2,\alpha}^{r}$) арқылы белгілейміз. $\alpha_1=\ldots=\alpha_s=0$ жағдайында $W_{2,\alpha_1,\ldots,\alpha_s}^{r_1,\ldots,r_s}[0,1]^s$ класы анизотропты Соболев класы деген атауға ие $W_2^{r_1,\ldots,r_s}[0,1]^s$ класымен беттеседі.

Теорема. $\lambda \equiv \lambda(r_1,\ldots,r_s)=(1/r_1+\ldots+1/r_s)^{-1} > \frac{1}{2}$ теңсіздігі орындалып, $\alpha_1=\ldots=\alpha_s=\alpha\ge 0$ болсын.

Сонда $q\ge 2$ жағдайында $N \equiv N(K)=\prod_{i=1}^{s}\left(2\left[K^{\lambda/r_i}\right]+1\right)$, $K=1,2,\ldots$ үшін келесі тұжырымдар ақиқат болады:

К(Е)Д – 1. $\delta_N\left(0;\Phi_N,(Tf)(\cdot)=u(\cdot;f),W_{2,\alpha}^{r}\right)_{L^{q,\infty}} \succ\prec \frac{N^{1/2-1/q}}{N^{\lambda}\ln^{\alpha} N}$

К(Е)Д – 2. $\tilde{\varphi}_N(z_1,\ldots,z_N;t,x)=\sum_{\tau=1}^{N} z_\tau e^{-4\pi^2(\tilde{m}^{(\tau)},\tilde{m}^{(\tau)})t} e^{2\pi i(\tilde{m}^{(\tau)},x)}$ функциясы

мен $\left(\tilde{l}_N^{(1)}(f),\ldots,\tilde{l}_N^{(N)}(f)\right):\tilde{l}_N^{(1)}(f)=\hat{f}\left(\tilde{m}^{(1)}\right),\ldots,\tilde{l}_N^{(N)}(f)=\hat{f}\left(\tilde{m}^{(N)}\right)$

$$\left(\forall\tau=1,\ldots,N:\tilde{m}^{(\tau)}=\left(\tilde{m}_1^{(\tau)},\ldots,\tilde{m}_s^{(\tau)}\right)\in A_K \equiv \left\{m\in Z^s:|m_1|\le\left[K^{\lambda/r_1}\right],\ldots,|m_s|\le\left[K^{\lambda/r_s}\right]\right\}\right)$$

сандық мәліметі бойынша құрылған $(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N)\in\Phi_N$ жұбы үшін

$$\delta_N\left(0;\Phi_N,(Tf)(\cdot)=u(\cdot;f),W^r_{2,\alpha}\right)_{L^{q,\infty}} \succ\prec$$
$$\succ\prec \delta_N\left(0;\left(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N\right),(Tf)(\cdot)=u(\cdot;f),W^r_{2,\alpha}\right)_{L^{q,\infty}}$$

қостеңсіздігі орындалады және біріншіден,

$$\delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N=\frac{1}{N^{\lambda}\sqrt{N}\ln^{\alpha}N};\left(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N\right),(Tf)(\cdot)=u(\cdot;f),W^r_{2,\alpha}\right)_{L^{q,\infty}} \succ\prec$$
$$\succ\prec \delta_N\left(0;\Phi_N,(Tf)(\cdot)=u(\cdot;f),W^r_{2,\alpha}\right)_{L^{q,\infty}}$$

екіншіден,

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}}\frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\left(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N\right),(Tf)(\cdot)=u(\cdot;f),W^r_{2,\alpha}\right)_{L^{q,\infty}}}{\delta_N\left(0;\Phi_N,(Tf)(\cdot)=u(\cdot;f),W^r_{2,\alpha}\right)_{L^{q,\infty}}}=+\infty;$$

К(Е)Д –3. $\Phi_N^*=\Phi_N$ **,** яғни $\forall(l^{(N)},\varphi_N)\in\Phi_N$ жұбы үшін

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}}\frac{\delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N;\left(l^{(N)},\varphi_N\right),(Tf)(\cdot)=u(\cdot;f),W^r_{2,\alpha}\right)_{L^{q,\infty}}}{\delta_N\left(0;\Phi_N,(Tf)(\cdot)=u(\cdot;f),W^r_{2,\alpha}\right)_{L^{q,\infty}}}=+\infty;$$

теңдігі орындалады.

Жоғарыдағы теоремадан мынадай қорытындылар жасауға болады:

1) $\tilde{\varphi}_N(\hat{f}(\tilde{m}^{(1)}),\dots,\hat{f}(\tilde{m}^{(N)});t,x)=\sum\limits_{\tau=1}^{N}\hat{f}(\tilde{m}^{(\tau)})e^{-4\pi^2(\tilde{m}^{(\tau)},\tilde{m}^{(\tau)})t}e^{2\pi i(\tilde{m}^{(\tau)},x)}$

есептеу агрегаты әрбір $f\in W^r_{2,\alpha}$ функциясына сәйкес $u(x,t;f)$ шешімін $L^{q,\infty}$

метрикасында $\dfrac{C(s,r_1,\dots,r_s,\alpha,q)N^{1/2-1/q}}{N^{\lambda}\ln^{\alpha}N}$ дәлдігімен оптималды жуықтайды;

2) $f \in W^r_{2,\alpha}$ жағдайында жоғарыдағы $\hat{f}(\tilde{m}^{(\tau)})$ Фурье коэффициенттерінің орнына $\left| z_\tau - \hat{f}\left(\tilde{m}^{(\tau)}\right)\right| \le \dfrac{1}{N^\lambda \ln^\alpha N}$ теңсіздігін қанағаттандыратын $z_\tau\,(\tau = 1,\ldots,N)$ сандарын алғаннан $u(x,t;f)$ шешімін $L^{q,\infty}$ метрикасында жуықтау дәлдігі өзгермейді;

3) Кез келген $\hat{f}(m^{(1)}),\ldots,\hat{f}(m^{(N)}$ Фурье коэффициенттері мен кез келген $\varphi_N \equiv \varphi_N(z_1,\ldots,z_N;x,t): C^N \times [0,1]^s \times [0,+\infty) \to C$ функциясы бойынша құрылған $\varphi_N\left(\hat{f}(m^{(1)}),\ldots,\hat{f}(m^{(N)}\right)$ есептеу агрегатының $L^{q,\infty}$ метрикасындағы жуықтау дәлдігі де, шектік қателігі де $\tilde{\varphi}_N(\hat{f}(\tilde{m}^{(1)}),\ldots,\hat{f}(\tilde{m}^{(N)});x,t)$ есептеу агрегатының жуықтау дәлдігі мен шектік қателігінен реті бойынша жақсы болмайды.

Пайдаланыған әдебиеттер тізімі

1. Темиргалиев Н., Абикенова Ш.К., Жубанышева А.Ж., Таугынбаева Г.Е. Задачи дискретизации решений волнового уравнения, численного дифференцирования и восстановления функций в контексте компьютерного (вычислительного) поперечника. Известия ВУЗов. Матем. 2013, №8, стр. 86 – 93.
2. Жубанышева А.Ж., Темиргалиев Н. Информативная мощность тригонометрических коэффициентов Фурье и их предельная погрешность при дискретизации оператора дифференцирования на многомерных классах Соболева // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2015, том 55, №9, стр. 1474 – 1985.
3. Утесов А.Б., Абдыкулов А.Т. Полное К(В)П – исследование задачи восстановления функций из анизотропных классов Соболева по неточным значениям их тригонометрических коэффициентов Фурье. Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, №1(122)/2018, стр. 90 – 98.
4. Темиргалиев Н. Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод квази-Монте Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л.Н.Гумилева. Вестник ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, 2010. С.1