

ГЛОБАЛДЫ МОРРИ ТИПТЕС КЕҢІСТІКТЕРДЕГІ ЖИЫНДАРДЫҢ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ АЙЫРЫМЫ ТЕРМИНІНДЕ КОМПАКТЫЛЫҒЫ

МАТИН Д.Т.*, АХАЖАНОВ Т.Б.

*Матин Даурен Тюлютаевич — PhD, доцент, Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ., Қазақстан.

E-mail: d.matin@mail.kz, <https://orcid.org/0000-0002-9784-9304>;

Ахажанов Талгат Беркинович — PhD доктор, доцент, Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ., Қазақстан.

E-mail: talgat_a2008@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3346-4947>;

Аңдатпа. Бұл жұмыста глобалды Морри типтес кеңістіктердегі жиынтықтардың алдын ала жинақтылығы үшін жеткілікті шарттар ұсынылған. Бұл кеңістіктердің құрылымдық қасиеттерін зерттеуге және олардағы функциялардың әрекетін талдауға басты назар аударылады. Атап айтқанда, $w(r) = r^{-\lambda}$ салмақ функциясын тандағанда, мұнда $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, тұжырымдалған теорема Морри кеңістігі [1] үшін белгілі нәтижені білдіретіні

дәлелденді. $\lambda = 0$ жағдайда дәлелденген теорема функционалдық талдау теориясының ірге тасы болып табылатын классикалық Фреше-Колмогоров теоремасына дейін төмендейді.

Жұмыстың негізгі мақсатына жету үшін жалпыланған Морри кеңістігіндегі функциялардың орташа мәндерін бағалауға қатысты бірнеше көмекші леммалар алдын ала дәлелденген. Бұл леммалар негізгі теореманы дәлелдеудің маңызды құралы ғана емес, сонымен қатар тәуелсіз қызығушылық тудырады, өйткені оларды талдаудың басқа мәселелеріне де қолдануға болады.

Сонымен қатар, алынған шарттардың қажеттілігі мен жеткіліктілігі, сондай-ақ олардың функционалдық кеңістіктер теориясының белгілі нәтижелерімен байланысы талқыланады. Алынған нәтижелерді операторлардың жинақылығын және дифференциалдық теңдеулер теориясын зерттеуге қолдануды талқылауға ерекше назар аударылады.

Осылайша, жұмыс нәтижелері глобалды Морри типтес кеңістігінің қасиеттері туралы бұрыннан бар идеяларды кеңейтеді және оларды талдау мен оператор теориясының әртүрлі салаларында қолданудың жаңа мүмкіндіктерін ашады.

Түйін сөздер. Морри кеңістігі, пре-компактілік, Фреше-Колмогоров теоремасы, толық шектелгендік, глобалды Морри кеңістігі.

Кіріспе. Бұл мақалада $GM_{p\theta}^{w(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ глобалды Морри типтес кеңістіктердегі [2] жиындардың компакттылығы үшін функциялардың айырымы терминінде жеткілікті шарттар алынады.

Дәлелденген теоремадан, $\theta = \infty$ жағдайда $M_p^{w(\cdot)}$ жалпыланған кеңістік [3], [4] үшін нәтиже

шығады, және $w(r) = r^{-\lambda}$, $\theta = \infty$, $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, $M_p^{\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Морри кеңістігі [1] үшін белгілі нәтиже

шығады [5], [7] ал $\lambda = 0$ бұл жағдайда белгілі Фреше-Колмогорова теоремасы [6].

Айнымалы көрсеткішті Морри кеңістігіндегі жиындардың компакттылығы [11] және [16] зерттелген. Шарлы Банах функционалдық кеңістіктеріндегі коммутаторлар жиындарының және сипаттамаларының компакттылығы [12] алынған. Orlicz кеңістіктеріндегі жиынтықтардың компакттылығы [15], симметриялы кеңістіктерде [14], көрсетілген. Локалды Морри типтес кеңістіктеріндегі жиындардың және кейбір коммутаторлардың компакттылығы [8]-[10], [13] зерттелген.

Теорема 1. Айталық, $1 \leq p \leq \theta \leq \infty$. $w \in \Omega_{p\theta}$ болсын. $S \subset GM_{p\theta,w}(R^n)$ жиын келесі шарттарды қанағаттандырсын

$$\sup_{f \in S} \|f\|_{GM_{p\theta,w}} < \infty, \quad (1)$$

$$\limsup_{u \rightarrow 0} \sup_{f \in S} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{GM_{p\theta,w}} = 0, \quad (2)$$

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \sup_{f \in S} \|f\chi_{B(0,r)}\|_{GM_{p\theta,w}} = 0 \quad (3)$$

Онда S жиыны $GM_{p\theta,w}(R^n)$ кеңістігінде компакты болады.

Бұл теореманың дәлелдеу үшін бізге келесі қосымша мәлімдемелер керек.

$f \in L_1^{loc}(R^n)$ үшін және $r > 0$ белгілейік

$$(A_r f)(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy,$$

мұндағы $|A|$ $A \subset R^n$ жиынның Лебег өлшемін белгілейді.

Лемма1. Айталық, $1 \leq p \leq \theta \leq \infty$ $w \in \Omega_\theta$ болсын. Егер $w \in \Omega_{p,\theta}$ болса, онда барлық $f \in GM_{p\theta}^{w(\cdot)}$ және $r > 0$ үшін келесі бағалау орындалады:

$$\|A_r f - f\|_{GM_{p\theta,w}} \leq \sup_{u \in B(0,r)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{GM_{p\theta,w}} \quad (8)$$

Дәлелдеу. Айталық, $z \in R^n$ және $\rho > 0$. Онда Гельдер теңсіздігі бойынша

$$\|A_r f - f\|_{L_p(B(z,\rho))} =$$

$$= \left(\int_{B(z,\rho)} \left| \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy - f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{B(z,\rho)} \left| \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} (f(y) - f(x)) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_{B(z,\rho)} \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p dy \right) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

(айнымалыларды ауыстыру $y = x + u$)

$$= \left(\int_{B(z,\rho)} \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} |f(x+u) - f(x)|^p du \right) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \left(\int_{B(z,\rho)} |f(x+u) - f(x)|^p dx \right) du \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \|f(\cdot+u) - f(\cdot)\|_{L_p(B(z,\rho))}^p du \right)^{\frac{1}{p}}$$

Одан әрі

$$\|A_r f - f\|_{LM_{p\theta,w}} = \left\| w(\rho) \|A_r f - f\|_{L_p(B(0,\rho))} \right\|_{L_\theta(0,\infty)}$$

$$\leq \left\| w(\rho) \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \|f(\cdot+u) - f(\cdot)\|_{L_p(B(0,\rho))}^p du \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{L_\theta(0,\infty)}$$

$$= \left\| \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} w(\rho)^p \|f(\cdot+u) - f(\cdot)\|_{L_p(B(0,\rho))}^p du \right\|_{L_\theta(0,\infty)}^{\frac{1}{\frac{p}{\theta}}}$$

$\frac{\theta}{p} \geq 1$ болғандықтан, интегралдар үшін Минковский теңсіздігін қолданамыз

$$\|A_r f - f\|_{LM_{p\theta,w}} \leq \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \left(\int_0^\infty w(\rho)^\theta \|f(\cdot+u) - f(\cdot)\|_{L_p(B(0,\rho))}^\theta d\rho \right)^{\frac{p}{\theta}} du \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \|f(\cdot+u) - f(\cdot)\|_{LM_{p\theta,w}}^p du \right)^{\frac{1}{p}} \quad (9)$$

$$\leq \sup_{u \in B(0,r)} \|f(\cdot+u) - f(\cdot)\|_{LM_{p\theta,w}}$$

Келесі теңдікті пайдаланып

$$(A_r f(\cdot+z))(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y+z) dy = \frac{1}{|B(x+z,r)|} \int_{B(x+z,r)} f(u) du = (A_r f)(x+z),$$

Глобалды $GM_{p\theta,w}$ кеңістіктер үшін, (9) пайдаланып алатынымыз:

$$\|A_r f - f\|_{GM_{p\theta,w}} = \sup_{z \in R^n} \|(A_r f)(\cdot+z) - f(\cdot+z)\|_{LM_{p\theta,w}} = \sup_{z \in R^n} \|A_r(f(\cdot+z)) - f(\cdot+z)\|_{LM_{p\theta,w}}$$

$$\leq \sup_{z \in R^n} \sup_{u \in B(0,r)} \|f(\cdot+u+z) - f(\cdot+z)\|_{LM_{p\theta,w}}$$

$$= \sup_{z \in R^n} \sup_{u \in B(0,r)} \left\| w(\rho) \|f(\cdot+u+z) - f(\cdot+z)\|_{L_p(B(0,\rho))} \right\|_{L_\theta(0,\infty)}$$

$$= \sup_{z \in R^n} \sup_{u \in B(0,r)} \left\| w(\rho) \|f(\cdot+u) - f(\cdot)\|_{L_p(B(z,\rho))} \right\|_{L_\theta(0,\infty)}$$

$$= \sup_{u \in B(0,r)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{GM_{p\theta,w}}.$$

Лемма1 дәлелденді.

Лемма2. Айталық, $1 \leq p \leq \theta \leq \infty$, $w \in \Omega_{p\theta}$ болсын. Онда барлық $f \in GM_{p\theta}^{w(\cdot)}$ үшін және $r > 0$ келесі теңсіздік орындалады:

$$\|A_r f\|_{GM_{p\theta,w}} \leq \|f\|_{GM_{p\theta,w}} \quad (10)$$

Дәлелдеу. Гельдер теңсіздігі бойынша

$$\begin{aligned} \|A_r f\|_{L_p(B(z,\rho))} &= \left(\int_{B(z,\rho)} \left| \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{B(z,\rho)} \left(\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{B(z,\rho)} \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} |f(x+u)|^p du \right) dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \left(\int_{B(z,\rho)} |f(x+u)|^p dx \right) du \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$(x+u=v)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \left(\int_{B(z+u,\rho)} |f(v)|^p dv \right) du \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \|f\|_{L_p(B(z+u,\rho))}^p du \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$\frac{\theta}{p} \geq 1$ болғандықтан, интегралдар үшін Минковский теңсіздікті қолданамыз, онда

$$\begin{aligned} \|A_r f\|_{GM_{p\theta,w}} &\leq \sup_{z \in R^n} \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \left(\int_0^\infty w(\rho)^\theta \|f\|_{L_p(B(z+u,\rho))}^\theta d\rho \right)^{\frac{p}{\theta}} du \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \sup_{z \in R^n} \left(\int_0^\infty w(\rho)^\theta \|f\|_{L_p(B(z+u,\rho))}^\theta d\rho \right)^{\frac{p}{\theta}} du \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{z \in R^n} \left\| \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \left(w(\rho) \|f\|_{L_p(B(z+u,\rho))} \right)^p du \right\|_{L_{\frac{\theta}{p}}(0,\infty)}^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\leq \sup_{z \in R^n} \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \|w(\rho)\| f\|_{L_p(B(z+u,\rho))}^p \Big\|_{L_\theta(0,\infty)} du \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \left(\sup_{v \in R^n} \|w(\rho)\| f\|_{L_p(B(v,\rho))} \right)_{L_\theta(0,\infty)}^p dv \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{GM_{p\theta,w}}$$

Лемма2 дәлелденді.

Берілген $\delta > 0$ үшін f функцияның $G \subset R^n$ жиынныңда үзіліссіздік модулін $w_\delta(f, G)$ деп белгілейік:

$$w_\delta(f, G) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in G \\ |x_1 - x_2| \leq \delta}} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

$$\|M_r f\|_{GM_{p\theta,w}} = \sup_{z \in R^n} \|w(\rho)\| M_r f\|_{L_p(B(z,\rho))} \Big\|_{L_\theta(0,\infty)}$$

$$\leq \sup_{z \in R^n} \left\| w(\rho) \left(\frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \|f\|_{L_p(B(z+u,\rho))}^p du \right)^{\frac{1}{p}} \right\|_{L_\theta(0,\infty)}$$

Лемма3. Айталық, $1 \leq p, \theta \leq \infty$ $w \in \Omega_{p\theta}$ болсын. Онда $r_0 > 0$ табылып кез келген $0 < r \leq r_0$ үшін тек r, n, p, θ, w тәуелді болатын $C_r > 0$ бар болып, келесе теңсіздіктер орындалады

1. кез келген $f \in GM_{p\theta}^{w(\cdot)}$ үшін

$$\|M_r f\|_{C(R^n)} \leq C_r \|f\|_{GM_{p\theta,w}}. \quad (11)$$

2. кез келген $\delta > 0$ үшін

$$w_\delta(M_r f; R^n) \leq C_r \sup_{\substack{|u| \leq \delta \\ u \in B(0,\delta)}} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{GM_{p\theta,w}}. \quad (12)$$

Дәлелдеу. 1. Функция $w \in \Omega_{p\theta}$ нөлге эквивалентті болмағандықтан, онда $\|w\|_{L_\theta(r_0,\infty)} > 0$ орындалатындай $r_0 > 0$ табылады. Айталық, $0 < r \leq r_0$ болсын. Онда Гельдер теңсіздігі бойынша кез келген $x \in R^n$ үшін

$$|M_r f(x)| \leq \frac{1}{|B(x,r)|^{\frac{1}{p}}} \|f\|_{L_p(B(x,r))}.$$

Сондықтан

$$\|w(\rho) M_r f(x)\|_{L_\theta(r,\infty)} \leq \frac{1}{(v_n r^n)^{\frac{1}{p}}} \left\| w(\rho) \|f\|_{L_p(B(x,r))} \right\|_{L_\theta(r,\infty)},$$

мұндағы $v_n - R^n$ -дегі бірлік шардың көлемі, және

$$\|M_r f(x)\|_{L_\theta(r,\infty)} \|w(\rho)\|_{L_p(B(x,r))} \leq \frac{1}{(v_n r^n)^{\frac{1}{p}}} \|w(\rho)\|_{L_p(B(x,r))} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \|_{L_\theta(0,\infty)},$$

Сондықтан

$$\sup_{x \in R^n} |M_r f(x)| \leq C_r \sup_{x \in R^n} \|w(\rho)\|_{L_p(B(x,r))} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \|_{L_\theta(0,\infty)} = C_r \|f\|_{GM_{p\theta,w}}, \quad (13)$$

$$\text{Мұндағы } C_r = \left(\|w\|_{L_\theta(r,\infty)} (v_n r^n)^{\frac{1}{p}} \right)^{-1}.$$

2. Кез келгені $x_1, x_2 \in B(0,r)$ үшін

$$\begin{aligned} |(M_r f)(x_1) - (M_r f)(x_2)| &= \frac{1}{v_n r^n} \left| \int_{B(x_1,r)} f(y) dy - \int_{B(x_2,r)} f(y) dy \right| = \\ &= (v_n r^n)^{-1} \left| \int_{B(0,r)} f(z+x_1) dz - \int_{B(0,r)} f(z+x_2) dz \right| \leq \\ &\leq (v_n r^n)^{-1} \int_{B(0,r)} |f(z+x_1) - f(z+x_2)| dz = \\ &= (v_n r^n)^{-1} \int_{B(x_2,r)} |f(s+x_1-x_2) - f(s)| ds \leq \\ &\leq (v_n r^n)^{-\frac{1}{p}} \|f(\cdot+x_1-x_2) - f(\cdot)\|_{L_p(B(x_2,r))} \end{aligned}$$

Сондықтан дәлелдеудің алғашқы қадамы бойынша

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x_1, x_2 \in R^n \\ |x_1 - x_2| \leq \delta}} |(M_r f)(x_1) - (M_r f)(x_2)| &\leq C_r \sup_{\substack{x_1, x_2 \in R^n \\ |x_1 - x_2| \leq \delta}} \|f(\cdot+x_1-x_2) - f(\cdot)\|_{GM_{p\theta,w}} = \\ &= C_r \sup_{\substack{|u| \leq \delta \\ u \in B(0,\delta)}} \|f(\cdot+u) - f(\cdot)\|_{GM_{p\theta,w}} \end{aligned}$$

Лемма3 дәлелденді.

Лемма4. Айталық $1 \leq p, \theta \leq \infty$ $w \in \Omega_{p\theta}$ болсын. Онда тек қана n, p, θ, w тәуелді болатындай $C > 0$,

табылып кез келген $r, R > 0$ үшін және кез келген $f, g \in GM_{p\theta,w}$ үшін келесі баға орындалады

$$\begin{aligned} \|M_r f - M_r g\|_{GM_{p\theta,w}} &\leq C \left(1 + R^{\frac{n}{p}} \right) \|M_r f - M_r g\|_{C(\overline{B(0,R)})} + \sup_{u \in B(0,R)} \|f(\cdot+u) - f(\cdot)\|_{GM_{p\theta,w}} \\ &+ \sup_{u \in B(0,R)} \|g(\cdot+u) - g(\cdot)\|_{GM_{p\theta,w}} + \left\| f \chi_{B(0,R)} \right\|_{GM_{p\theta,w}} + \left\| g \chi_{B(0,R)} \right\|_{GM_{p\theta,w}} \end{aligned}$$

Дәлелдеу. Шынымен де

$$\|M_r f - M_r g\|_{GM_{p\theta,w}} \leq \left\| (M_r f - M_r g) \chi_{B(0,R)} \right\|_{GM_{p\theta,w}} + \left\| (M_r f - M_r g) \chi_{B^c(0,R)} \right\|_{GM_{p\theta,w}} = I_1 + I_2$$

Одан әрі

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sup_{x \in R^n} \left\| w(\rho) \|M_r f - M_r g\|_{L_p(B(x, \rho) \cap B(0, R))} \right\|_{L_\theta(0, \infty)} \\
 &\leq \sup_{x \in R^n} \left\| w(\rho) \|M_r f - M_r g\|_{L_p(B(x, \rho) \cap B(0, R))} \right\|_{L_\theta(0, 1)} \\
 &\quad + \sup_{x \in R^n} \left\| w(\rho) \|M_r f - M_r g\|_{L_p(B(x, \rho) \cap B(0, R))} \right\|_{L_\theta(1, \infty)} \\
 &\leq \|M_r f - M_r g\|_{C(\overline{B(0, R)})} \cdot \\
 &\quad \cdot \left(\left\| w(\rho) (v_n \rho^n)^{\frac{1}{p}} \right\|_{L_\theta(0, 1)} + \left\| w(\rho) (v_n R^n)^{\frac{1}{p}} \right\|_{L_\theta(1, \infty)} \right) \\
 &\leq C \left(1 + R^{\frac{n}{p}} \right) \|M_r f - M_r g\|_{C(\overline{B(0, R)})}
 \end{aligned}$$

мұндағы

$$C = v_n^{\frac{1}{p}} \left(\left\| w(\rho) \rho^{\frac{n}{p}} \right\|_{L_\theta(0, 1)} + \|w(\rho)\|_{L_\theta(1, \infty)} \right) < \infty,$$

$w \in \Omega_{p\theta}$ болғандықтан.

Бұдан, лемма1 бойынша

$$\begin{aligned}
 I_2 &\leq \|M_r f - f\|_{GM_{p\theta, w}} + \left\| (f - g) \chi_{B(0, R)} \right\|_{GM_{p\theta, w}} + \|M_r g - g\|_{GM_{p\theta, w}} \\
 &\leq \sup_{u \in B(0, r)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{GM_{p\theta, w}} + \sup_{u \in B(0, r)} \|g(\cdot + u) - g(\cdot)\|_{GM_{p\theta, w}} \\
 &\quad + \left\| f \chi_{B(0, R)} \right\|_{GM_{p\theta, w}} + \left\| g \chi_{B(0, R)} \right\|_{GM_{p\theta, w}}
 \end{aligned}$$

Осыдан ізделінді теңсіздік шығады. Лемма4 дәлелденді.

Лемма5.. Айталық, $1 \leq p, \theta \leq \infty$ $w \in \Omega_{p\theta}$ болсын. Онда кез келген $r, R > 0$ және кез келген

$f, g \in GM_{p\theta, w}$ үшін

$$\begin{aligned}
 \|f - g\|_{GM_{p\theta, w}} &\leq C \left(1 + R^{\frac{n}{p}} \right) \|M_r f - M_r g\|_{C(\overline{B(0, R)})} \\
 &\quad + 2 \sup_{u \in B(0, r)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{GM_{p\theta, w}} + 2 \sup_{u \in B(0, r)} \|g(\cdot + u) - g(\cdot)\|_{GM_{p\theta, w}} \\
 &\quad + \left\| f \chi_{B(0, R)} \right\|_{GM_{p\theta, w}} + \left\| g \chi_{B(0, R)} \right\|_{GM_{p\theta, w}}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Мұндағы $C > 0$ саны 4. леммадағыдай.

Дәлелдеу. Келесі теңсіздікті

$$\|f - g\|_{GM_{p\theta, w}} \leq \|M_r f - f\|_{GM_{p\theta, w}} + \|M_r f - M_r g\|_{GM_{p\theta, w}} + \|M_r g - g\|_{GM_{p\theta, w}}$$

және 1 және 4 леммаларын пайдалану жеткілікті.

2.3.1. Теореманың дәлелденуі. Айталық $S \subset GM_{p\theta}^{w(\cdot)}$ және (1) - (3) шарттар орындалсын.

1-қадам. Айталық $0 < r < r_0$, мұнда r_0 3. леммасындағыдай анықталсын және $R > 0$ бекітілсін.

(7) теңсіздік және (1) шарт бойынша

$$\sup_{f \in S} \|M_r f\|_{C(\overline{B(0,R)})} < \infty.$$

Сонымен қатар, (8) және (2) шарты теңсіздігіне байланысты мынандай нәтиже шығады:

$$\limsup_{u \rightarrow 0} \sup_{f \in S} \|M_r f(\cdot + u) - M_r f(\cdot)\|_{C(\overline{B(0,R)})} = 0.$$

Демек, Арцела -Асколи теоремасы бойынша $S_r = \{M_r f : f \in S\}$ жиыны $C(\overline{B(0,R)})$ кеңістігінде толық шенелген болады, яғни кез келген $\varepsilon > 0$ үшін $m \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_m \in S$ табылып (және ε, r и R -ге байланысты) кез келген $f \in S$ үшін

$$\min_{j=1, \dots, m} \|M_r f - M_r f_j\|_{C(\overline{B(0,R)})} < \varepsilon.$$

2-қадам. Айталық, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ S жиынының кез келген ақырлы жиыншасы болсын. (11)

теңсіздікке байланысты кез келген $f \in S$ және кез келген $j = 1, \dots, m$ үшін

$$\begin{aligned} \|f - \varphi_j\|_{GM_{p\theta}^w} &\leq C(1 + R^{\frac{n}{p}}) \|M_r f - M_r \varphi_j\|_{C(\overline{B(0,R)})} \\ &+ 2 \sup_{u \in B(0,r)} \|f(\cdot + u) - f(\cdot)\|_{GM_{p\theta}^{w(\cdot)}} + 2 \sup_{u \in B(0,r)} \|\varphi_j(\cdot + u) - \varphi_j(\cdot)\|_{GM_{p\theta}^{w(\cdot)}} \\ &+ \|f \chi_{cB(0,R)}\|_{GM_{p\theta}^{w(\cdot)}} + \|\varphi_j \chi_{cB(0,R)}\|_{GM_{p\theta}^{w(\cdot)}} \\ &\leq C(1 + R^{\frac{n}{p}}) \|M_r f - M_r \varphi_j\|_{C(\overline{B(0,R)})} + 4 \sup_{u \in B(0,r)} \sup_{g \in S} \|g(\cdot + u) - g(\cdot)\|_{GM_{p\theta}^w} + 2 \sup_{g \in S} \|g \chi_{cB(0,R)}\|_{GM_{p\theta}^w}. \end{aligned}$$

Демек,

$$\begin{aligned} \min_{j=1, \dots, m} \|f - \varphi_j\|_{GM_{p\theta}^w} &\leq C(1 + R^{\frac{n}{p}}) \min_{j=1, \dots, m} \|M_r f - M_r \varphi_j\|_{C(\overline{B(0,R)})} \\ &+ 4 \sup_{u \in B(0,r)} \sup_{g \in S} \|g(\cdot + u) - g(\cdot)\|_{GM_{p\theta}^w} + 2 \sup_{g \in S} \|g \chi_{cB(0,R)}\|_{GM_{p\theta}^w}. \end{aligned} \quad (15)$$

3-қадам. Айталық, $\varepsilon > 0$ болсын. Біріншіден, (3) шартын пайдаланып, біз $R(\varepsilon) > 0$ табамыз

$$\sup_{g \in S} \|g \chi_{cB(0,R(\varepsilon))}\|_{GM_{p\theta}^w} < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Әрі қарай (2) шартты пайдаланып, біз $r(\varepsilon)$ табамыз

$$\sup_{u \in B(0,r(\varepsilon))} \sup_{g \in S} \|g(\cdot + u) - g(\cdot)\|_{GM_{p\theta}^w} < \frac{\varepsilon}{12}.$$

Ақырында, $S_{r(\varepsilon)} = C(\overline{B(0,R(\varepsilon))})$ жиынының компактылығының негізінде $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ және

$f_{1,\varepsilon}, \dots, f_{m(\varepsilon),\varepsilon} \in S$ табылып, кез келген $f \in S$ үшін

$$\min_{j=1,\dots,m(\varepsilon)} \|M_{r(\varepsilon)} f - M_{r(\varepsilon)} f_{j,\varepsilon}\|_{C(B(0,R(\varepsilon)))} < \frac{\varepsilon}{3C(1+R(\varepsilon)^p)^{\frac{n}{p}}}.$$

Сондықтан (12) $\varphi_j = f_{j,\varepsilon}$, $j = 1, \dots, m(\varepsilon)$ -деп алсақ, кез келген $f \in S$ үшін

$$\min_{j=1,\dots,m(\varepsilon)} \|f - f_{j,\varepsilon}\|_{GM_{p\theta}^w} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Бұл S жиыны $GM_{p\theta}^w$ кеңістігінде толық шенелгендігін көрсетеді немесе компактылығын білдіреді. 1 теоремасы дәлелденді.

Әдебиеттер тізімі

1. Morrey, C. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans. Am. Math. Soc. 1938, 1, 126–166.
2. Adams D.R. Morrey Spaces. – Lexington: Springer International Publishing Switzerland, 2015. – 121 p.
3. Mizuhara T. Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces // Harmonic Analysis. ICM 90 Satellite Proceedings, Springer. –Tokyo, 1991.–P. 183–189.
4. Nakai E. Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and Riesz potentials on generalized Morrey spaces // Math. Nachr. –1994. –№166. –P. 95-103.
5. Chen Y., Ding Y., Compactness of commutators for singular integrals on Morrey Spaces // Canad. J. Math. – 2012. – Vol. 64, №2. – P. 257-281.
6. Yosida, K. Functional Analysis; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 1978.
7. Chen Y., Ding Y., Wang X. Compactness of commutators of Riesz potential on Morrey space // Potential Anal. – 2009. – Vol. 30, №4. – P. 301-313.
8. Bokayev, N.A.; Burenkov, V.I.; Matin, D.T. On pre-compactness of a set in general local and global Morrey-type spaces. Eurasian Math. J. 2017, 3, 109–115.
9. Bokayev, N. Matin, D. Akhazhanov, T. Adilkhanov, A. Compactness of Commutators for Riesz Potential on Generalized Morrey Spaces, Mathematics, MDPI, 2024, 12(2), 304; P.1-16
10. Bokayev, N.A.; Burenkov, V.I.; Matin, Adilkhanov, A. Pre-Compactness of Sets and Compactness of Commutators for Riesz Potential in Global Morrey-Type Spaces. Mathematics 2024, 12, 3533.
11. Bandaliyev, R.A.; Górka, P.; Guliyev, V.S.; Sawano, Y. Relatively Compact Sets in Variable Exponent Morrey Spaces on Metric Spaces. Mediterr. J. Math. 2021, 6, 1–23.
12. Tao J, Yang D, Yuan W, Zhang Y. Compactness characterizations of commutators on ball Banach function spaces. Potential Analysis. 2023; 58(58): 645–679.
13. Matin, D.T.; Akhazhanov, T.B.; Adilkhanov, A. Compactness of Commutators for Riesz Potential on Local Morrey-type spaces. Bull. Karagand. Univ. Math. Ser. 2023, 110, 93–103.
14. Matin, D.T. Nessipbayev Y, Sukochev F, Zanin D., Weak Grothendieck compactness principle for symmetric spaces. Pacific journal of mathematics., Vol. 333, No. 1, 2024
15. Nessipbayev, Y.; Tulenov, K. Examples of weakly compact sets in Orlicz spaces. Bull. Karagand. Univ. Math. Ser. 2022, 106, 72–82.
16. Wang, W.; Xu, J. Precompact sets, boundedness, and compactness of commutators for singular integrals in variable Morrey spaces. J. Funct. Spaces, 2017, 1-16.

References

1. Morrey, C. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Trans. Am. Math. Soc. 1938, 1, 126–166.

2. Adams D.R. Morrey Spaces. – Lexington: Springer International Publishing Switzerland, 2015. – 121 p.
3. Mizuhara T. Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces // Harmonic Analysis. ICM 90 Satellite Proceedings, Springer. –Tokyo, 1991.–P. 183–189.
4. Nakai E. Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and Riesz potentials on generalized Morrey spaces // Math. Nachr. –1994. –№166. –P. 95-103.
5. Chen Y., Ding Y., Compactness of commutators for singular integrals on Morrey Spaces // Canad. J. Math. – 2012. – Vol. 64, №2. – P. 257-281.
6. Yosida, K. Functional Analysis; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 1978.
7. Chen Y., Ding Y., Wang X. Compactness of commutators of Riesz potential on Morrey space // Potential Anal. – 2009. – Vol. 30, №4. – P. 301-313.
8. Bokayev, N.A.; Burenkov, V.I.; Matin, D.T. On pre-compactness of a set in general local and global Morrey-type spaces. Eurasian Math. J. 2017, 3, 109–115.
9. Bokayev, N. Matin, D. Akhazhanov, T. Adilkhanov, A. Compactness of Commutators for Riesz Potential on Generalized Morrey Spaces, Mathematics, MDPI, 2024, 12(2), 304; P.1-16
10. Bokayev, N.A.; Burenkov, V.I.; Matin, Adilkhanov, A. Pre-Compactness of Sets and Compactness of Commutators for Riesz Potential in Global Morrey-Type Spaces. Mathematics 2024, 12, 3533.
11. Bandaliyev, R.A.; Górká, P.; Guliyev, V.S.; Sawano, Y. Relatively Compact Sets in Variable Exponent Morrey Spaces on Metric Spaces. Mediterr. J. Math. 2021, 6, 1–23.
12. Tao J, Yang D, Yuan W, Zhang Y. Compactness characterizations of commutators on ball Banach function spaces. Potential Analysis. 2023; 58(58): 645–679.
13. Matin, D.T.; Akhazhanov, T.B.; Adilkhanov, A. Compactness of Commutators for Riesz Potential on Local Morrey-type spaces. Bull. Karagand. Univ. Math. Ser. 2023, 110, 93–103.
14. Matin, D.T. Nessipbayev Y, Sukochev F, Zanin D., Weak Grothendieck compactness principle for symmetric spaces. Pacific journal of mathematics., Vol. 333, No. 1, 2024
15. Nessipbayev, Y.; Tulenov, K. Examples of weakly compact sets in Orlicz spaces. Bull. Karagand. Univ. Math. Ser. 2022, 106, 72–82.
16. Wang, W.; Xu, J. Precompact sets, boundedness, and compactness of commutators for singular integrals in variable Morrey spaces. J. Funct. Spaces, 2017, 1-16.

КОМПАКТНОСТЬ МНОЖЕСТВ В ГЛОБАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ТИПА МОРРИ В ТЕРМИНАХ РАЗНОСТИ ФУНКЦИЙ

МАТИН Д.Т. , АХАЖАНОВ Т.Б. 

*Матин Даурен Тюлютаевич — PhD, доцент, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан.

E-mail: d.matin@mail.kz, <https://orcid.org/0000-0002-9784-9304>;

Ахажанов Талгат Беркинович — PhD доктор, доцент, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан.

E-mail: talgat_a2008@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3346-4947>;

Аннотация. Компактность множеств в глобальных пространствах типа Морри можно охарактеризовать, анализируя разницу функций внутри множества. Этот подход обеспечивает основу для понимания компактности в терминах поведения функций и свойств, таких как затухание и гладкость, в пространствах типа Морри. Основное внимание уделено исследованию структурных свойств этих пространств и анализу поведения функций в них. В частности, доказано, что при выборе весовой функции $w(r) = r^{-\lambda}$, где $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, из сформулированной теоремы

вытекает известный результат для пространства Морри. В случае $\lambda = 0$ доказанная теорема сводится к классической теореме Фреше-Колмогорова, которая является краеугольным камнем теории функционального анализа.

Для достижения основной цели работы предварительно доказаны несколько вспомогательных лемм, касающихся оценки средних значений функций глобальных пространствах типа Морри. Эти леммы не только являются важными инструментами для доказательства основной теоремы, но и представляют самостоятельный интерес, так как могут быть применены в других задачах анализа.

Кроме того, обсуждается необходимость и достаточность полученных условий, а также их связь с известными результатами теории функциональных пространств. Особое внимание уделено обсуждению приложений полученных результатов к исследованию компактности операторов и теории дифференциальных уравнений.

Таким образом, результаты работы расширяют существующие представления о свойствах глобальных пространствах типа Морри и открывают новые возможности для их применения в различных областях анализа и теории операторов.

Ключевые слова: пространства Морри, пред-компактность, теорема Фреше-Колмогорова, вполне ограниченность, глобальные пространства Морри.

COMPACTNESS OF SETS IN GLOBAL MORREY-TYPE SPACES IN TERMS OF DIFFERENCE OF FUNCTIONS

MATIN D.T.*, AKHAZHANOV T.B.

***Matin Dauren Tyulyutayevich** — PhD Doctor, Associate Professor, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

E-mail: d.matin@mail.kz, <https://orcid.org/0000-0002-9784-9304>;

Akhazhanov Talgat Berkinovich — PhD Doctor, Associate Professor, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan.

E-mail: talgat_a2008@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3346-4947>;

Abstract. The compactness of sets in global Morrey-type spaces can be characterized by analyzing the difference of functions within the set. This approach provides a framework to understand compactness in terms of function behavior and properties, such as decay and smoothness, within the Morrey-type spaces. The main attention is paid to the study of the structural properties of these spaces and the analysis of the behavior of functions in them. In particular, it is proved that for the choice of the weight function $w(r) = r^{-\lambda}$, where $0 \leq \lambda \leq \frac{n}{p}$, the formulated theorem implies a well-known result for

the Morrey space. In case $\lambda = 0$, the proven theorem reduces to the classical Frechet-Kolmogorov theorem, which is the cornerstone of the theory of functional analysis.

To achieve the main goal of the paper, several auxiliary lemmas are preliminarily proved concerning the estimation of the mean values of functions in the global Morrey-type spaces. These lemmas are not only important tools for proving the main theorem, but are also of independent interest, since they can be applied to other problems of analysis.

In addition, the necessity and sufficiency of the obtained conditions are discussed, as well as their connection with the known results of the theory of functional spaces. Particular attention is paid to the discussion of applications of the obtained results to the study of compactness of operators and the theory of differential equations. Thus, the results of the work expand the existing ideas about the properties of global Morrey-type spaces and open up new possibilities for their application in various areas of analysis and operator theory.

Key words: Morrey spaces, pre-compactness, Frechet-Kolmogorov theorem, completely boundedness, global Morrey space.