ҒТАХР 27.31.31
ӘОЖ 517.952 **DOI 10.70239/arsu.2024.t78.n4.03**

ЦИЛИНДРЛІК БЕТТЕ ВИНТТІК СЫЗЫҚ БОЙЫМЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ОПЕРАТОРЛЫ СЫЗЫҚТЫ ЖҮЙЕНІҢ ФОКУСЫ МЕН ЦЕНТРІ

САРТАБАНОВ Ж.А.*, ОМАРОВА Б.Ж., ТУЛЕУОВА М.Қ.

***Сартабанов Жайшылык Алмағанбетұлы** – Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан.
E-mail: sartabanov42@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-2601-2678
Омарова Бибигул Жарболовна - Философия докторы (PhD), Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан.
E-mail: bomarova@zhubanov.edu.kz, https://orcid.org/0000-0002-3267-2501
Тулеуова Медина Қайратқызы – Магистрант, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан.
E-mail: tuleuova_medina99@mail.ru, https://orcid.org/0009-0005-4434-239X

Аңдатпа. Бұл жұмыста біз цилиндрлік бетте винттік сызық бойымен анықталған тұрақты коэффициентті D дифференциалдау операторлы екінші ретті сызықтық жүйе зерттеледі. Сондай-ақ, жұмыс В.Х. Харасахал және Д.У. Умбетжанов еңбектерінде баяндалған жай және дербес дифференциалдық теңдеулердің периодты дерлік шешімдерінің іргелі зерттеулеріне негізделген. Мұнда Ж.А.Сартабанов ұсынған көппериодты функцияларды диагональ бойынша дифференциалдау операторының периодты характеристикалары бойында интегралдау әдісі кеңінен қолданылады. Бұл тәсіл центрдің классикалық түсінігін спиральдық симметриялы кеңістіктегі жүйелерге жалпылауға және оның динамикалық қасиеттерін зерттеуге мүмкіндік береді. Доғалық және кесінділік функциялардың қасиеттерімен сипатталған D операторының винттік сипаттауышы туралы ақпарат қарастырылады және центр ұғымын енгізіледі. Сонымен қатар, (τ,t) -уақыттық нүкте тік дөңгелек цилиндр бетінде винттік сызық бойымен қозғалады да, (x_1, x_2) жазықтығы фазалық кеңістікті анықтайды. Қарастырылған жүйенің шешімдері (τ,t) бойынша периодты, радиус векторлы, бұрыштық фазалық болғанда (0, 0) нүктесінің фокустық нүктесі болатындығын анықтайтын өрнек анықталады. Жүйенің матрицасында аз ғана сызықты ауытқу болса центрдің фокусқа айналып кеттіні дәлелденеді. Зерттеу барысында центрдің сақталуының шарттары, сондай-ақ оның фокусқа айналуын тудыратын параметрлер анықталды.
Түйін сөздер: цилиндрлік бет, винттік сызық, дифференциалдау операторы, көппериодтылық, фокус, центр.

Кіріспе

Дифференциалдық теңдеулердің сызықтық жүйелеріндегі центр мен фокусты зерттеу динамикалық жүйелердің математикалық теориясының іргелі мәселелерінің бірі болып табылады. Классикалық тұжырымда центр түсінігі стационарлық нүктеге жақын жерде тұйық траекториялардың болу шарттарын сипаттайды, ал фокус ыдырайтын немесе өсетін спиральдары бар ерітінділердің әрекетін сипаттайды. Дегенмен, цилиндрлік беттер сияқты күрделі геометриялық кеңістіктерде анықталған жүйелер үшін және винттік сызықтар бойымен дифференциалдау операторларын пайдалану үшін классикалық тәсілдер жалпылауды қажет етеді.

Бұл жұмыста дифференциалдау операторы цилиндрлік беттегі винттік сызық бойымен анықталған тұрақты коэффициенттері бар екінші ретті сызықтық жүйелерді қарастырамыз. Зерттеудің негізгі мақсаты – центр ұғымын осындай жүйелерге жалпылау, сонымен қатар центрдің фокусқа айналуы мүмкін жағдайларды анықтау. Бұл ауысу шешімдердің динамикасын түсіну үшін маңызды, әсіресе олардың тұрақтылығы мен мерзімділігі контекстінде.

Біздің зерттеуіміздің негізі периодты дерлік және көп периодты шешімдерге арналған жұмыс болды. Атап айтқанда, В.К. Харасахал [1] мен Д.У. Умбетжанов [2] еңбектерінде периодтық сипаттамалары бар жай және дербес дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің қасиеттері зерттеледі. Ж.А. Сартабанов [3, 4] ерекше типті жүйелер үшін мұндай шешімдерді талдау әдістерін егжей-тегжейлі айтып, оның соңғы еңбектері [5, 6] диагональды дифференциалдау операторларының сипаттамаларының кезеңділігімен байланысты. Бұл нәтижелер кеңістіктің винттік симметриясын ескеретін тәсілді әзірлеу үшін бастапқы нүкте болды.

Бұл жұмыста центрдің фокусқа ауысуы жүйенің коэффициенттерінің және спиралдың геометриялық параметрлерінің өзгеруіне байланысты екенін көрсетеміз. Центр ұғымын винттік симметриялы кеңістіктерге жалпылау бұрыннан бар теорияларды кеңейтеді және күрделі геометриялық құрылымдардағы сызықтық және сызықтық емес жүйелерді зерттеудің жаңа перспективаларын ашады.

Зерттеу әдісі және нәтижелер

1.Фокус және центр

Келесі $(\tau,t)\in R\times S_\theta = Ц$ цилиндрі бетінде винттік β-сызығы бойымен

$$D=\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial t} \tag{1}$$

дифференциалдау операторлы a_{jk} -тұрақты коэффициентті

$$Dx_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2,\ j=\overline{1,2} \tag{2}$$

теңдеуімен анықталатын жүйені қарастырамыз, мұндағы $R=(-\infty,+\infty)$, S_θ - ұзындығы $\theta = 2\pi r$ болатын шеңбер, β сызығы туралы кейінірек қарастырамыз.

Берілген (1) операторлы (2) жүйенің фокусы мен центрі

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

матрицасының өзіндік мәндері $\lambda_j = \mu \pm i\nu,\ \nu\neq 0$ комплекс мәнді болған жағдайымен анықталады, мұнда λ_1 мен λ_2 - өзара түйіндес комплекс сандар.

Егер $\mu\neq 0$ болса, онда (1)-(2) жүйесінің центрлік жағдайын аламыз, ал $\mu = 0$ болса, бұл жүйе центрді анықтап тұр деп атаймыз.

Зерттеуді векторлық-матрицалық тілде жүргізу үшін

$$x=(x_1,x_2),\ Dx=(Dx_1,Dx_2)$$

векторлары және A матрицасы арқылы (1)-(2) жүйені

$$Dx = Ax,\quad D=\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial t},\quad (\tau,t)\in Ц \tag{3}$$

түрінде жазуға болады.

Алгебралық, λ бойынша анықталған

$$h(\lambda)\equiv \det[\lambda E - A] = 0$$

теңдеуі жүйенің сипаттауыш теңдеуі деп аталынады, демек, жүйенің өзіндік λ_j мәндері

$$h(\lambda_j)=0,\ j=\overline{1,2}$$

теңдігін қанағаттандырады.

2.Винттік сипаттауыштар. Доғалық және кесінділік функциялар.

D операторына сәйкес құрылған, $Ц$ бетінде анықталған

$$d\tau = dt,\quad (\tau,t)\in R\times S_\theta = Ц \tag{4}$$

жәй дифференциалдық теңдеуі (3) жүйенің сипаттауыш теңдеуі деп аталынады, мұндағы S_θ шеңберін, анықталғандық үшін, (ϑ, w) жазықтығында

$$\vartheta^2 + (w-r)^2 = r^2,\quad 2\pi r = \theta \tag{5}$$

теңдеуімен берілген делік, ал θ - берілген оң сан.

Егер (5) теңдеуді $(u\vartheta w)$ евклидтік кеңістігінде қарастырсақ, онда ол $Ou = R$ осін бойлай орналасқан тік дөңгелек $Ц$ цилиндрін анықтайды.

Ал, τ айнымалысы (5) цилиндрдің $u = R$ жасаушысы бойында өзгереді, ал t айнымалысы S_θ шеңбері бойымен, (4) сипаттауыш теңдеуге сәйкес өзара байланыста, τ -мен бірдей жылдамдықпен бірқалыпты қозғалады. Демек, (τ,t) нүктесі ілгерілемелі-айналмалы винттік сызық бойымен жылжиды. Кесінділік τ бірқалыпты, ендеше, (4) бойынша t да бірқалыпты өзгереді.

Сонымен, $R\times S_\theta = Ц$ цилиндрлік бетінің параметрлік теңдеулерін

$$u=\tau,\quad \vartheta = r\sin\frac{t}{r},\quad w=r-r\cos\frac{t}{r}=r+r\sin\left(\frac{t}{r}-\frac{\pi}{2}\right) \tag{6}$$

түрінде жазамыз.

Егер (6) өрнектегі τ мен t параметрлерін шамалар түрінде қарастырсақ, онда олар, (4) сындық теңдеуге сәйкес, өзара тең

$$t=\tau \tag{7}$$

ұзындықтарды сипаттайды. Ал, егер оларға геометриялық мазмұн берсек, онда τ - түзулік кесінді де, t - дөңгелек доға ұзындықтары болып табылады. Әдетте, (7) өрнекке түзулік кесінді шамасы ретінде қараймыз. Бірақ, t доғаның ұзындығын білдіретіндігін көрсету үшін, «доға» сөзін, қысқарта, латын әріпімен жазып, (7) теңдіктің орнына

$$t=dog(\tau),\ \tau\in R \tag{8}$$

белгілеуін қабылдау әбден орынды. Мысалы, (7) τ-дан тәуелді t функциясы $Ц$ цилиндрі бойында θ-периодты функция екенін мойындау психологиялық жағынан ауырлау тиеді. Әрине, τ мен $\tau+j\theta, j\in Z$ нүктелері t үшін $Ц$-да конгруэнтті нүктелер екендігі арқылы түсіндіруге болады. Дегенмен, (8) белгілеуі арқылы, t-ның τ-дан θ-периодты тәуелді екендігін

$$dog(\tau+\theta)=dog(\tau) \tag{9}$$

теңдігімен өрнектейміз, мұнда Z - бүтін сандар жиыны.

Керісінше, τ кесіндісі түзулік екендігін t дөңгелек доғасы арқылы түсіндіру үшін, (7) теңдікті Z бүтін мәндер жиыны арқылы

$$\tau = kes(t)+j\theta = Kes(t),\ j\in Z \tag{10}$$

белгілеуімен сипаттауға болады, мұндағы $kes(t)$ шамасы $0\le kes(t)<\theta$ шартын қанағаттандыратын $Kes(t)$ функциясының бас мәні.

Ендеше, $(u\vartheta w)$ евклид кеңістігінде, (7) теңдік арқылы (6) теңдеулерден

$$u=\tau,\quad \vartheta = r\sin\frac{\tau}{r},\quad w=r-r\cos\frac{\tau}{r}=r+r\sin\left(\frac{\tau}{r}-\frac{\pi}{2}\right) \tag{11}$$

$(0,0)$ бас нүкте арқылы өтетін винттік сызықтың параметрлік теңдеулерін аламыз. Жалпы жағдайда, $Ц$ бетінде (ξ,η) нүктесі арқылы өтетін винттік сызықтың параметрлік теңдеулері

$$u=\tau-\xi,\quad \vartheta = r\sin\frac{\tau-\xi+\eta}{r},\quad w=r+r\sin\left(\frac{\tau-\xi+\eta}{r}-\frac{\pi}{2}\right) \tag{12}$$

түрінде болады.

Цилиндрлік бетте түзулік кесінді және дөңгелек доға терминінде декарттық координаталарда берілген (12) винттік сызықты

$$t=\eta+dog(\tau-\xi)\equiv\beta(\tau,\xi,\eta),(\tau,t)\in Ц \tag{13}$$

түрінде сипаттаймыз. Сөйтіп, винттік β-сызығын енгіздік, D операторының β-сипаттауышы ұғымын алдық.

Енді $dog(\tau)$ және $Kes(t)$ функцияларынынң қасиеттерін келтірейік:

1°. $\left(dog(\tau)\right)'=1, \tau\in R$

2°. $dog(\tau-\xi)=dog(\tau)-dog(\xi),\ \tau\in R, \xi\in R,$

3°. $dog(\tau+j\theta)=dog(\tau),\ \tau\in R, j\in Z$,

4°. $dog(\tau+\omega)=dog(\tau)+\omega,\ \dfrac{\theta}{\omega}\notin Q,$

мұндағы Q - рационал сандар жиыны.

Функция $kes(t)=\tau$, керісінше $t=dog(\tau)$. Олай болса,

$a)\ dog(kes(t))=t,\ 0\le t<\theta,$

$b)\ kes(dog(\tau))=\tau,\ 0\le\tau<\theta.$

Бірақ θ-периодты $t=dog(\tau)$ - функциясына кері функция $Kes(t)=kes(\tau)+j\theta, j\in Z$ түрінде Z бүтін сандар жиыны арқылы анықталады. Ал, (4) сипаттауыш теңдеуімен байланысқан τ,t айнымалылары үшін $Kes(t)$ мәндері

$$Kes(t)=\tau+j^{\circ}\theta,\ 0\le\tau<\theta,$$

мұндағы $j^{\circ}=\left[\theta^{-1}\tau\right]$ саны $(\theta^{-1}\tau)$ шамасының бүтін бөлігі екенін ескеру керек.

Бұл $\tau=kes(t)$ функциясы туындалады және (4) теңдеуге сәйкес,

1) $\dfrac{dkes(t)}{dt}=(kes(t))'=\dfrac{1}{(dog(\tau))'}=\dfrac{1}{1}=1,\ \tau\in S_{\theta},$

2) $kes(t-\eta)=kes(t)-kes(\eta),\ \eta\in S_{\theta},t\in S_{\theta}.$

Егер t айнымалысын θ және ω шамаларынан ығыстырсақ, онда

3) $kes(t+\theta)=kes(t),\ t\in S_{\theta},$

4) $kes(t+\omega)=kes(t)+\omega,\ \dfrac{\theta}{\omega}\notin Q,\ t\in S_{\theta}$

қасиеттерін аламыз. Демек, $kes(t)$ функциясы үшін θ-ығысу инварианттық түрлендіру, түрі өзгермейді, сақталады.

Осы дөңгелек доғалық және түзулік кесінді функцияларының элементар $1^{\circ}-4^{\circ},a)-b)$ және $1)-4)$ қасиеттерінен $t=\beta(\tau,\xi,\eta)$ сипатауышының мына қасиеттерін, (13) өрнекке сәйкес, аламыз:

$$\frac{\partial\beta(\tau,\xi,\eta)}{\partial\tau}=1,\quad \frac{\partial\beta(\tau,\xi,\eta)}{\partial\xi}=-1,\quad \frac{\partial\beta(\tau,\xi,\eta)}{\partial\eta}=1, \tag{13_1}$$

$$\beta(\tau+\theta,\xi,\eta)=\beta(\tau,\xi,\eta)=\beta(\tau,\xi+\theta,\eta), \tag{13_2}$$

$$\beta(\tau,\xi,\eta+\omega)=\beta(\tau,\xi,\eta)+\omega, \tag{13_3}$$

$$\eta=\beta(\xi,\tau,t),\beta(\xi,\xi,t)=t, \tag{13_4}$$

$$D\beta(\xi,\tau,t)=0, \tag{13_5}$$

$$\beta(\xi,\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))=\beta(\xi,\tau,t), \tag{13_6}$$

мұндағы $(\tau,t)\in R\times S_{\theta}=Ц,(\xi,\eta)\in Ц$ - (τ,t) нүктесінің бастапқы нүктесі.

Сонымен, (4)-(12) өрнектерімен негізделген доғалық және кесінділік функцияларының қасиеттерімен сипатталған (13)-(13_1)-(13_6) өрнектерімен берілген D операторының винттік сипаттауышы туралы ақпарат қарастырылды.

3.Шешімдер кеңістігі

Құбылыс (3) жүйемен сипатталған жағдайда уақыт екі өлшемді (τ,t) векторымен беріліп отыр және уақытымыз винттік заңдылықпен цилиндрлік бетте қозғалатын болып отыр. Осы жағдайда тыныштық күй қалай сипатталатынына тоқталайық. Ол D операторы нөлге айналатын функциялармен сипатталады, демек,

$$Dx(\tau,t)=0,(\tau,t)\in Ц \tag{14}$$

теңдігімен анықталған $u=u(\tau,t)$ функциясымен анқталады.

Ендеше, (13_4) және (13_5) өрнектері бойынша D операторының сипаттауышы арқылы анықталған және оның алғашқы сипаттауыш интегралы деп аталатын

$$x=\beta(\xi,\tau,t) \tag{15}$$

функциялар үйірі екенін көреміз, мұндағы ξ - үйірдің параметрі және ξ-дің жекелеген мәндерінде үйірдің мүшелерін аламыз.

Егер (14) теңдеудің

$$x\big|_{\tau=\xi} = u(t) \in C_t^{(1)}(S_\theta) \qquad (14^*)$$

шартын қанағаттандыратын шешімін анықтау керек болса, онда ол

$$x = u(\beta(\xi,\tau,t)) \qquad (16)$$

өрнегімен бір мәнді түрде анықталатынын көреміз.

Шынында да, (15) өрнек негізінде

$$Du\big(\beta(\xi,\tau,t)\big) = \frac{du(\beta)}{d\beta} D\beta(\xi,\tau,t) \equiv 0$$

(16) функция (14) теңдеуді қанағаттандыратынын көреміз.

Шешімнің бірмәнді түрде табылатыны карсы жору тәсілімен анықталады.

Сонымен, тегістік қасиеті әрбір $u(t), t \in S_\theta$ функциясы арқылы, (16) өрнекпен құбылыстың тыныштық күйін анықтаймыз. Тыныштық қалып, дербес жағдайда, $u = c$ тұрақты санымен де анықталады.

Ал, егер (3) жүйемен сипатталатын құбылысты алсақ, онда оның тыныштық күйі компоненттері $u_1(t), u_2(t)$ дифференциалданатын функциялар болып келетін

$$x = \big(u_1(\beta(\xi,\tau,t)), u_2(\beta(\xi,\tau,t))\big) \equiv u(\beta(\xi,\tau,t)), (\tau,t) \in Ц$$

түрінде анықталады, $\xi \in R$.

Фокус пен центр A матрицасының өзіндік мәндерімен анықталса, (3) жүйенің шешімі A матрицасының өзіндік векторларының қатысуымен анықталады. Олар

$$\big(A - \lambda_j E\big)u(\eta) = 0, \eta = \beta(\xi,\tau,t), j = \overline{1,2} \qquad (17)$$

алгебралық жүйелерінен анықталады. Мұндағы $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ мен $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ өзіндік мәндеріне сәйкес екі түйіндес

$$u_j(\eta) = a(\eta) \pm ib(\eta), \eta = \beta(\xi,\tau,t), j = \overline{1,2}$$

дифференциалданатын, $a(\eta)$ және $b(\eta)$ функцияларымен анықталған шешімді

$$x_j(\tau,\eta) = C_1(\eta)u_1(\eta)e^{\lambda_1(\tau-\xi)} + C_2(\eta)u_2(\eta)e^{\lambda_2(\tau-\xi)}, \eta = \beta(\xi,\tau,t), j = \overline{1,2} \qquad (18)$$

өрнегімен анықтаймыз, мұндағы $C_j = A_j + iB_j$ комплекстік өрнек.

Осы өрнектің нақты және жорамал бөліктерін ажыратып жазсақ, оның екі бөлігі сызықты тәуесіз (3) жүйенің шешімін беретінін көреміз. Ол нақты шешімдер (3) жүйенің нақты шешімдерін береді.

Сөйтіп, (18) комплекс шешімінен

$$x = \vartheta(\eta)\cos\nu(\tau-\xi)e^{\mu(\tau-\xi)}e_1 + w(\eta)\sin\nu(\tau-\xi)e^{\mu(\tau-\xi)}e_2, \eta = \beta(\xi,\tau,t) \qquad (19)$$

түріндегі нақты шешімдерін аламыз, e-бірлік векторлар, ϑ мен w кезкелген дифференциалданатын функциялар.

Егер (19) өрнектен (x_1, x_2) жазықтығында (ρ,φ) полярлық координаталар жүйесіне көшсек, онда $\mu \neq 0$ болса

$$\rho = \rho_0(\eta)e^{\mu\tau}, \quad \varphi = \nu\tau + \varphi_0(\eta), \quad \eta = \beta(\xi,\tau,t) \qquad (20)$$

(ρ,φ) жазықтығында, η тұрақты болған жағдайда, логарифмдік спираль түрінде, τ -ға байланысты өзгереді. Ал, $\mu = 0$ болса, онда (20) өрнек центрі бас нүкте, радиусы $\rho_0 = \rho_0(\eta)$, бұрышы τ -мен бірге ν жылдамдықпен $\varphi_0(\eta)$ фазасынан бастап өзгеретін шеңберді анықтайды.

Координаталар жүйесінің (0,0) бас нүктесі (3) жүйесінің шешімі болатыны айқын. Біз осы нүкте маңайындағы шешімдердің табиғатын зерттеу үстіндеміз. Енді шешімнің орнықтылығына байланысты қасиеттерін анықталық. Ол үшін олардың көппериодтылығын білу маңызды және центрге жоғары мән беру керек. Демек, $\mu = 0$ болса, онда (20) өрнектен

$$\rho = \rho_0(\eta), \quad \varphi = \nu\tau + \varphi_0(\eta), \quad \eta = \beta(\xi,\tau,t) \qquad (21)$$

теңдеулерін аламыз. Егер η тұрақты болса (21) теңдеуі $\rho = \rho_0$ радиусы болатын бастапқы фаза $\varphi = \varphi_0$ болатын шеңберді береді. Жалпы жағдайда, $\eta = \beta(\xi, \tau, t)$ сипаттауышының (τ, t) нүктесі цилиндр бойымен қозғалыста болады да, $\varphi_0(\eta) = \varphi_0(\beta(\xi, \tau, t))$ және $\rho_0(\eta) = \rho_0(\beta(\xi, \tau, t))$ функциялары да өзгерісте болады. Демек, центр өзінің шеңберлік, яғни периодты қозғалыстылығын жояды. Бізге бұл функциялар өзгергенімен, центрдің радиусы ρ_0 мен бастапқы фазасы φ_0 периодтылық қасиетін сақтайтын жағдайы жүйенің көппериодтылығы аясында болады.

Ендеше, көппериодтылық бұзылмас үшін, $\beta = \beta(\xi, \tau, t)$ функциясы t-дан сызықты тәуелділікте болғандықтан, $\rho_0(\eta)$ және φ_0 функцияларын ω-периодты етіп алуға тура келеді:

$$\rho_0(\eta + \omega) = \rho_0(\eta) \in C_\tau^{(1)}(S_\theta), \quad \varphi_0(\eta + \omega) = \varphi_0(\eta) \in C_\eta^{(1)}(S_\theta) \tag{22}$$

Олай болса, (21) центрлік жағдай әрбір $\xi \in R$ үшін

$$\rho = \rho_0(\beta(\xi, \tau, t)), \quad \varphi = \nu\tau - \xi + \varphi_0(\beta(\xi, \tau, t)), \quad (\tau, t) \in Ц \tag{23}$$

(22) және (23) өрнектерімен сипатталуы қажет.

Тік дөңгелек $Ц$ цилиндрі бойында $\beta = \beta(\xi, \tau, t)$ сипаттауышы ξ мен τ бойынша θ-периодты болғандықтан, (23) өрнек (τ, t) бойынша (θ, ω)-периодты, ξ бойынша θ-периодты:

$$\begin{aligned} &\rho_0(\beta(\xi, \tau + \theta, t + \omega)) = \rho_0(\beta(\xi, \tau, t)), \quad \varphi_0(\beta(\xi, \tau + \theta, t + \omega)) = \varphi_0(\beta(\xi, \tau, t)), \\ &\rho_0(\beta(\xi + \theta, \tau, t)) = \rho_0(\beta(\xi, \tau, t)), \quad \varphi_0(\beta(\xi + \theta, \tau, t)) = \varphi_0(\beta(\xi, \tau, t)). \end{aligned} \tag{23*}$$

Сонымен центрді (21)-(23) өрнектермен анықтап, төмендегі анықтаманы қабылдаймыз.

1-анықтама. Тік дөңгелек $Ц$ цилиндрі бойында анықталған (3) тұрақты коэффициентті жүйесінің A матрицасының өзіндік мәндері жорамал сандар болғандағы $u(\eta)$ бастапқы берілгендері ω-периодты тегіс функциялармен, демек,

$$x\big|_{\tau=\xi} = u(\eta + \omega) = u(\eta) \in C_\eta^{(1)}(S_\theta) \tag{24}$$

өрнегімен сипатталатын шешімдер кеңістігінде *центр* деп аталынады.

Олай болса, (21) өрнек полярлық координаталар жүйесінде (22) шартты қанағаттандырса, келтірілген анықтама бойынша (3) жүйесі центрді анықтайды. Демек, (3) жүйесінің бастапқы шарты (24) қасиетті қанағаттандыратын шешімдер кеңістігін қарастырумен шектелуіміз керек.

Ендеше, (3) жүйенің $x = (\tau, t)$ шешімдер кеңістігін X деп, шешімдердің $(\tau, t) = (\xi, \eta)$ бастапқы нүктедегі $u(\eta + \omega) = u(\eta)$ мәндерін U_ω деп белгілеп, ξ тұрақты деп есептеп,

$$x\big|_{\tau=\xi} = x(\xi, \eta) = u(\eta) = u(\eta + \omega) \in C_\eta^{(1)}(S_\theta)$$

өрнегімен байланысты X ,U_ω функциялар кеңістіктерін аламыз, мұндағы U_ω кеңістігі X кеңістігінің бөлігі – кеңістікшесі, яғни іштестірілген.

Бұл кеңістіктер сызықты және нормалары

$$\|u\| = \sup_{\eta \in S_\theta} |u(\eta)|,$$

$$\|x\|_\Delta = \sup_{R_\Delta \times S_\theta} |x(\tau, t)|$$

формулаларымен анықталады және мұндағы $R_\Delta = \{\tau \in R : |\tau - \xi| \le \Delta\}, \Delta = const > 0$.

Сонымен осылайша, центр ұғымын еңгіздік. X шешімдер кеңістігі (x_1, x_2) жазықтығында анықталған, (τ, t) -уақыттық нүкте, тік дөңгелек цилиндр бетінде винттік сызық бойымен қозғалады да, (x_1, x_2) жазықтығы фазалық кеңістікті береді.

Центрді радиус векторы $\rho = \rho_0(\beta(\xi, \tau, t))$, (23) өрнекке сәйкес, өзгерісте болады, ал фазалық бұрышы φ уақыт τ бойынша ν жылдамдықпен сызықты түрде өзгереді де, бастапқы фазасы $\varphi_0(\beta(\xi, \tau, t))$ (θ, ω)-периодтық тербелісте болады. Бұл сипаттау (x_1, x_2) координатты

R^2 жазықтығындағы шешімдердің табиғатына тән қасиеттерді анықтайды. Демек, центрі $(0{,}0)$ бас нүктені айнала орналасқан тұйық сызықты сипаттайды. Ол дербес жағдайда, $\rho_0 = const$ болса шеңберді береді.

Енді (20) өрнекке қайта оралып, комплес өзіндік мәндердің нақты бөлігі нөлден өзгеше десек, яғни $\mu \neq 0$ болса, онда (ρ, φ) нүктенің радиус-векторы $\rho_0(\eta)$, (22) өрнекке сәйкес, ω-периодты болса, онда $\rho = \rho_0(\beta(\xi, \tau, t))$ (τ, t) бойынша (θ, ω)-периодты болып, орта сызығы спиральды тербете өзгертеді, спираль периодты түрде билей өрбиді. Оның теңдеулері

$$\begin{aligned} &\rho = \rho_0(\beta(\xi, \tau, t))e^{\mu(\tau - \xi)}, \\ &\varphi = \nu(\tau - \xi) + \varphi_0(\beta(\xi, \tau, t)), \ \mu \neq 0, \nu \neq 0 \end{aligned} \tag{25}$$

түрінде болады, демек «ирелеңдеген» спиралдық сызықты береді және мұндағы $\mu < 0$ болса, орнықты, ал $\mu > 0$ болса, орнықсыз иреңдеген спиралды береді. Ал $\rho_0(\eta)$ мен $\varphi_0(\eta)$ ω-периодты тегіс функциялар. Сонымен, (3) жүйенің (25) өрнекпен анықталған шешімдері (τ, t) бойынша (θ, ω)-периодты, ρ_0-радиус векторлы, φ_0-бұрыштық фазалық болса, онда (25) өрнек $(x_1, x_2) = (0{,}0)$ нүктесінің фокустық нүктесі болатындығын көреміз.

2-анықтама. Берілген (3) жүйенің шешімдері (25) өрнекпен және (22) қасиеттермен анықталса, ол жүйе *фокустық жүйе* деп, немесе $(x_1, x_2) = (0{,}0)$ нүктесі *фокус* деп аталады.

Осы 1 және 2 анықтамалар сияқты, түйін (ауыздық) және ер аталатын жүйелерді немесе фазалық координаталардың бас нүктесін енгізуге болады.

Енді ер мен ауыздыққа тоқтамай, фокус (ошақ) пен центр (ұштық) нүктелерінің туысқандығына тоқталайық.

4.Винт бойымен дифференциалдау операторлы жүйелердің центр мәселесі

Центр A матрицасының өзіндік мәндері түйіндес жорамал сан болса ғана пайда болады, демек, A матрицасы J матрицасына ұқсас:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}$$

түріне ұқсас болса, онда

$$\det(J - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & \nu \\ \nu & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \nu^2 = 0$$

теңдеуінен $\lambda_{1,2} = \pm i\nu$ жорамал өзіндік мәндерін аламыз.

Ендеше, A матрицасы J матрицасынан бір B матрицасы арқылы

$$A = B^{-1}JB \Leftrightarrow J = BAB^{-1}$$

өрнектелетіні белгілі.

Олай болса, A-ның элементтерін, демек J-ның элементтерін аз ғана санға өзгертсек, центр фокус болып шығады. Мысалы, J элементтері ν және 0 санымен анықталып отыр. Егер нөлдің орнына кезкелген ε аз шамасын қойсақ

$$J_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon & \nu \\ \nu & \varepsilon \end{pmatrix}$$

матрицасын алар едік те, оның характеристикалық теңдеуі

$$\det(J_\varepsilon - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} \varepsilon - \lambda & \nu \\ 0 & \varepsilon - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - \varepsilon)^2 + \nu^2 = 0$$

болып, өзіндік мәндері

$$\lambda_{1,2} = \varepsilon \pm i\nu$$

түрінде анықталар еді, яғни жүйе немесе $(0{,}0)$ бас нүктесі центрден фокусқа ауысар еді.

Керісінше, $\varepsilon \to 0$ арқылы фокустан центр шығатынын көреміз.

Осы туысқандық байланыс қолданысты есептерді зерттеуде мәселенің қисындылығы туралы қиындықтар туғызады, яғни есепті моделдеу барысында жүйенің коэффициенттерін аз ғана өзгерту, оның шешімдерінің орнықтылық немесе тербелістік қасиеттеріне нұсқан келтіруі мүмкін. Мысалы, $\varepsilon = 0$ болса, периодты тербелісті шешімді болады, ал $\varepsilon \neq 0$ болса, онда периодты тербелісті нөлден өзгеше шешім болмайды.

Бұл жүйенің диагоналдық элементтерінің аз ғана ауытқуына байланысты шешімдердегі өзгерістерді сипаттайды. Ал, екінші диагоналдық ν элементтеріне ε ауытқу берсек, онда J^{ε} матрицасының түрі

$$J^{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \nu + \varepsilon \\ \nu + \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

кейпіне келер еді де $0 < \varepsilon < |\nu|$ болса, оның характеристикалық теңдеуі

$$\det\left(J^{\varepsilon} - \lambda E\right) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & \nu + \varepsilon \\ \nu + \varepsilon & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + (\nu + \varepsilon)^2 = 0$$

болып, өзіндік мәндері

$$\lambda_{1,2} = \pm i(\nu + \varepsilon)$$

жорамалдық күйін сақтап қалады.

Демек, бас нүкте $(0,0)$ өзінің центрлік табиғатын сақтап қалады.

$J = J_{\varepsilon}$ немесе $J = J^{\varepsilon}$ матрицасына сәйкес A_{ε} немес A^{ε} матрицасын A мен J матрицаларын байланыстыратын B матрицасы арқылы анықтауға болады. Демек, $A_{\varepsilon} - A$ немесе $A^{\varepsilon} - A$ ауытқуларын анықтап, A-ның әрбір элементінің A_{ε} немесе A^{ε}-ға сәйкес ауытқуын анықтауға болады. Мұнда $A_{\varepsilon} = B^{-1} J_{\varepsilon} B$ немесе $A^{\varepsilon} = B^{-1} J^{\varepsilon} B$ екенін ескерген жөн.

Сөйтіп, мынадай тұжырымға келеміз.

Теорема. *Егер (3) жүйенің бас нүктесі* $(x_1, x_2) = (0,0)$ X *шешімдер кеңістігінде центр болса, онда* A *матрицасының аз ғана ауытқуы бас нүктенің фокусына ауыстырылуы мүмкін.*

Шынында да, центрдің канондық түрі J мен $A = \lfloor a_{jk} \rfloor$ матрицасының байланысы $B = \lfloor b_{jk} \rfloor$ және $B^{-1} = \lfloor c_{jk} \rfloor$ арқылы

$$A = B^{-1} J B = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \nu \\ \nu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu c_{12} & \nu c_{11} \\ \nu c_{22} & \nu c_{21} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \nu\begin{pmatrix} c_{12} b_{11} + c_{11} b_{21} & c_{12} b_{12} + c_{11} b_{22} \\ c_{22} b_{11} + c_{21} b_{21} & c_{22} b_{12} + c_{21} b_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

түрінде анықталады. Ал, A_{ε} матрицасы $E_{\varepsilon} = \varepsilon E$ болса, онда E бірлік матрицасы арқылы

$$A_{\varepsilon} = B^{-1} J_{\varepsilon} B = B^{-1}(J + E_{\varepsilon})B = B^{-1} J B + B^{-1} E_{\varepsilon} B = A + \varepsilon E$$

түрінде болады. Ендеше,

$$A_{\varepsilon} - A = \varepsilon E$$

болса, демек, a_{11} элементі $a_{11} + \varepsilon$, ал a_{22} элементі $a_{22} + \varepsilon$ болса, онда центр фокусқа ауысатынын көрдік. Себебі A центрдің матрицасы, ал A_{ε} -фокус матрицасы.

Одан кейін, J^{ε} канондық түрге сәйкес A^{ε} матрицасы

$$A^{\varepsilon} = B^{-1} J^{\varepsilon} B = B^{-1}(J + \frac{\varepsilon}{\nu} J)B = B^{-1} J B + \frac{\varepsilon}{\nu} B^{-1} J B = A + \frac{\varepsilon}{\nu} A$$

түрінде болатынын, демек,

$$A^{\varepsilon} - A = \frac{\varepsilon}{\nu} A$$

ауытқуында болса, центр өзінің қалпын өзгертпей, центр күйінде қалатынын көрдік.

Сөйтіп, A матрицасы аз ғана сызықты ауытқу алса центрдің фокусқа айналып кете алатынын көрдік. Теорема осы қасиетті айғақтайды.

Қорытынды. Негізделген теорема D операторы $\frac{d}{d\tau}$ операторы болған жағдайда «центр мәселесі» деген атпен таныс. Бұл зерттеуде мәселе X кеңістігіндегі центр ұғымы жалпыланып, ол винт бойында дифференциалдау операторлы екінші ретті тұрақты коэффициентті жүйеге жалпыланатынын көрсетіп отырмыз.

Әдебиеттер тізімі

1. Харасахал В.Х. Почти-периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений / В.Х. Харасахал. - Алма-Ата: Наука, 1970. – 200 с.
2. Умбетжанов Д.У. Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных / Д.У. Умбетжанов. - Алма-Ата: Наука, 1979. – 210 с.
3. Сартабанов Ж.А. Об одном спососбе изучения периодических решений уравнений в частных производных специального вида / Ж.А. Сартабанов // Изв. АН КазССР. Серия физ.-мат. - 1989. - №1. - С. 42-48.
4. Сартабанов Ж.А. Периодты функциялар және кейбір қарапайым дифференциалдық теңдеулердің периодты шешімдері / Ж.А. Сартабанов. – Алматы: РБК, 2001. – 108 б.
5. Сартабанов Ж.А. Периодичность характеристик оператора дифференцирования по диагонали / Ж.А. Сартабанов // Вестник КазНПУ им.Абая, серия «Физико-математические науки». - 2023. – Т. 82., №2. – С. 40-53.
6. Sartabanov Zh. Integrating multiperiodic functions along the periodic characteristics of the diagonal differentiation operator / Zh. Sartabanov, B. Omarova, G. Aitenova, A. Zhumagaziyev // KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series. - 2023. - Vol. 120, №4. - P. 52-68.

References

1. Harasahal V.H. Pochti-periodicheskie resheniya obyknovennyh differencial'nyh uravnenij / V.H. Harasahal. - Alma-Ata: Nauka, 1970. – 200 s.
2. Umbetzhanov D.U. Pochti mnogoperiodicheskie resheniya differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh / D.U. Umbetzhanov. - Alma-Ata: Nauka, 1979. – 210 s.
3. Sartabanov ZH.A. Ob odnom sposobse izucheniya periodicheskih reshenij uravnenij v chastnyh proizvodnyh special'nogo vida / ZH.A. Sartabanov // Izv. AN KazSSR. Seriya fiz.-mat. - 1989. - №1. - C. 42-48.
4. Sartabanov ZH.A. Periodty funkciyalar zhəne kejbir қarapajym differencialdyқ teңdeulerdiң periodty sheshimderi / ZH.A. Sartabanov. – Almaty: RBK, 2001. – 108 b.
5. Sartabanov ZH.A. Periodichnost' harakteristik operatora differencirovaniya po diagonali / ZH.A. Sartabanov // Vestnik KazNPU im.Abaya, seriya «Fiziko-matematicheskie nauki». - 2023. – T. 82., №2. – C. 40-53.
6. Sartabanov Zh. Integrating multiperiodic functions along the periodic characteristics of the diagonal differentiation operator / Zh. Sartabanov, B. Omarova, G. Aitenova, A. Zhumagaziyev // KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series. - 2023. - Vol. 120, №4. - P. 52-68.

ФОКУС И ЦЕНТР ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИИРОВАНИЯ ВДОЛЬ ВИНТОВОЙ ЛИНИИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

САРТАБАНОВ Ж.А.*, ОМАРОВА Б.Ж., ТУЛЕУОВА М.К.

***Сартабанов Жайшылык Алмағанбетұлы** – Доктор физико-математических наук, профессор, Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, г.Актобе, Казахстан.

E-mail: sartabanov42@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-2601-2678
Омарова Бибигул Жарболовна - Доктор философии (PhD), Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, г.Актобе, Казахстан.
E-mail: bomarova@zhubanov.edu.kz, https://orcid.org/0000-0002-3267-2501
Тулеуова Медина Кайратовна – Магистрант, Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, г.Актобе, Казахстан.
E-mail: tuleuova_medina99@mail.ru, https://orcid.org/0009-0005-4434-239X

Аннотация. В данной работе изучается линейная система второго порядка с D дифференцирующим оператором и постоянными коэффициентами, заданная вдоль винтовой линии на цилиндрической поверхности. Работа основана на фундаментальных исследованиях почти периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных, описанных в работах В.Х. Харасахала и Д.У. Умбетжанова. Здесь широко используется метод интегрирования по периодическим характеристикам оператора диагонального дифференцирования многопериодических функций, предложенный Ж.А. Сартабановым. Такой метод позволяет обобщить классическое понятие центра на системы в спирально-симметричном пространстве и изучить его динамические свойства. Рассмотрены сведения о спиральной характеристике оператора D, описываемой свойствами дуговой и отрезной функций, и введено понятие центра. Кроме того, точка времени (τ, t) движется по винтовой линии на поверхности вертикального кругового цилиндра, а плоскость (x_1, x_2) определяет фазовое пространство. Если решения рассматриваемой системы $(\tau,\ t)$ периодические, радиус-векторные и углово-фазовые, то определяется выражение, определяющее, что точка (0, 0) будет фокусной точкой. Если в матрице системы имеется небольшое линейное отклонение, доказывается, что центр превращается в фокус. В ходе исследования были определены условия сохранения центра, а также параметры, благодаря которым он становится фокусом.
Ключевые слова: цилиндрическая поверхность, винтовая линия, оператор дифференцирования, многопериодичесность, фокус, центр.

FOCUS AND CENTER OF A LINEAR SYSTEM WITH DIFFERENTIATION OPERATOR ALONG A HELICAL LINE ON A CYLINDRICAL SURFACE

SARTABANOV ZH.A.*, OMAROVA B.Z., TULEUOVA M.K.

***Sartabanov Zhaishylyk Almaganbetuly** – Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan.
E-mail: sartabanov42@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-2601-2678
Omarova Bibigul Zharbolovna- PhD, K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan.
E-mail: bomarova@zhubanov.edu.kz, https://orcid.org/0000-0002-3267-2501
Tuleuova Medina Kairatovna– Master's student, K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan.
E-mail: tuleuova_medina99@mail.ru, https://orcid.org/0009-0005-4434-239X

Abstract. In this paper, we study a second-order linear system with a differentiating operator D and constant coefficients, defined along a helical line on a cylindrical surface. The work is also based on fundamental studies of the almost periodic solutions of ordinary differential equations and partial differential equations as described in the works of V.Kh. Kharasakhal and D.U.Umbetzhanov. The method of integration by periodic characteristics of the diagonal differentiation operator for multiperiodic functions, proposed by Zh.A. Sartabanov, is widely used here. This method allows us to generalize the classical concept of a center to systems in a spirally symmetric space and to study their dynamic properties. Information about the spiral characteristic of the operator D, described by the properties of the arc and cut-off functions, is presented, and the concept of a center is introduced. Additionally, the point of time (τ, t) moves along a helical line on the surface of a vertical circular cylinder, and the plane (x_1, x_2) defines the phase space. If the solutions of the system under consideration $(\tau,\ t)$ are periodic, with radius-vector and angular-phase components, an expression is defined that determines that point (0, 0) will be the focal point. If there is a small linear deviation in the system's matrix, it is proved that the center transforms into a focus. During the course of the study, the conditions for preserving the center were determined, as well as the parameters that cause it to become a focus.
Key words: cylindrical surface, helix line, differentiation operator, multiperiodicity, focus, center.