ҒТАХР 27.31.55
ӘОЖ 517.955 **DOI 10.70239/arsu.2024.t78.n4.04**

САРТАБАНОВ Ж.А., ЖҰМАҒАЗИЕВ Ә.Х., ХАМИМОВА З.Қ.*

Сартабанов Жайшылық Алмағанбетович – Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан
E-mail: sartabanov42@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-2601-2678
Жұмағазиев Әміре Халиұлы – PhD, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан
E-mail: azhumagaziyev@zhubanov.edu.kz, https://orcid.org/0000-0002-6007-3311
***Хамимова Зарина Қубашқызы –** Магистрант, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан
E-mail: hamimova.zarina@mail.ru, https://orcid.org/0009-0007-3871-3275

Андатпа. Мақалада скалярлық аргумент бойынша дифференциалдау операторы бар біртекті емес теңдеулердің сызықтық жүйесі қарастырылады. Біртекті және біртекті емес теңдеулер жүйелері үшін Коши мәселелері зерттелген. Осыған сәйкес, бұрандалық сипаттамалар мен бастапқы сипаттамалық интегралдардың қасиеттері анықталған. Скалярлық аргументтен векторлық аргументке өту негізінде екі дифференциалдау операторы бар жүйелерді зерттеудің жаңа әдісі әзірленген. Вектор-матрица түріндегі берілген екі дифференциалдау операторы бар жүйенің бастапқы мәселесі үшін бірегей шешімнің аналитикалық түрі табылған. Цилиндрлік бетте берілген дифференциалдау операторы бар теңдеулер жүйесінің бірегей шешімінің интегралдық көріністері алынды, мұнда бастапқы жағдайдың тривиалды және периодтық жағдайлары қарастырылған. Мақалада дифференциалдық теңдеулер теориясындағы дифференцирлеу операторлары бар зерттеулердің мүмкін бағыттары да талқыланған. Зерттеу нәтижесінде екі дифференциалдау операторы бар сызықтық біртекті және біртекті емес жүйелер үшін бастапқы мәселелерді зерттеудің жаңа әдісі әзірленді, ол да бір операторы бар дифференциалдау жүйесіне өту негізінде жасалған және осындай жүйелерді зерттеу схемасы ұсынылған. Мақалада тағы «Диагональ бойынша дифференциалдау операторы бар жүйелердегі тербелістерді зерттеудегі периодтық сипаттамалар әдісі» ғылыми жобасында нәтижелері мен әдістері алынып пайдаланылған.
Түйін сөздер: дифференциалдау операторы, бастапқы шарт, шешімнің жалғыздығы, периодтар, винттік сипаттауыштар, сызықты жүйелер, матрица.

Кіріспе

Мақалада екі операторлы қос теңдеулі сызықты көппериодты коэффициентті теңдеулер жүйелеріне үшін бастапқы есептерді шешудің әдістемесін жасау мәселесі қойылды. Мұндай есептің жеке түрлері а) сызықты бөлігі өзара тәуелсіз [2] және б) тұрақты коэффициентті [1] бұрын басқа әдіспен жазықтық бойында зерттелген. Бұл зерттеуде жалпы жағдай қарастырылып, цилиндрлік бетте қойылған мәселені шешудің жаңа әдісі келтірілген. Осы әдіспен матрицант құрылып, ол бастапқы есептерінің шешімдері бар және жалғыз болатындығы негізделіп, шешімдерін интегралдық бейнелеуі берілген. Зерттеу [3] еңбекте келтірілген периодты сипаттауыштар әдісіне негізделген. Жаңа әдіс [4] жұмыс әдісінің одан әрі жалпылануы болып табылады. Матрицалардың канондық түрге келтіруі [5] және дербес теңдеулердің әдістері [6] зерттеу жүргізуге өз септігін тигізгеніне көңіл аударамыз.

1. Мәселенің қойылуы

Зерттеуде (τ, t) скаляр аргументті A_0 тұрақты матрицант

$$D = \frac{\partial}{\partial \tau} + A_0 \frac{\partial}{\partial t}$$

дифференциалдау операторлы $A = [a_{j_k}]_1^n$ матрицалы $f = (f_1, ..., f_n)$ - вектор-функциясы (θ, ω) -периодты

$$\begin{aligned} &Dx = A(\tau, t)x + f(\tau, t), \quad D = \frac{\partial}{\partial \tau} + A_0 \frac{\partial}{\partial t}, \\ &A(\tau + \theta, t + \omega) = A(\tau, t) \in C_{\tau, t}^{(0,1)}(R \times R), \\ &f(\tau + \theta, t + \omega) = f(\tau, t) \in C_{\tau, t}^{(0,1)}(R \times R), \end{aligned} \tag{1}$$

жүйесінің берілген $u(t) = (u_1(t), ..., u_n(t))$ вектор-функциясы

$$x\big|_{\tau=\xi} = u(t+\omega) = u(t) \in C_t^{(1)}(R)$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын есебін қарастырамыз. D – матрицалық дифференциалдау операторы деп аталынды.

Осы есепті шешудің *n=2* болған жағдайдағы әдісін құруға тоқталамыз. Ол үшін *K* тұрақты матрицасын алып, (1) жүйесін

$$x = Ky \tag{2}$$

ауыстыруымен түрлендіреміз. Мұндағы *K* матрицасы A_0 матрицасын *J* жордандық түрге келтірсін. Демек, *K* матрицасы ерекше емес және

$$K^{-1}A_0K = J \tag{3}$$

түрде болады. Матрица екінші ретті болған жағдайда *J* матрицасының үшбұрыштық J_1 және диагоналдық J_2 түрі болады:

$$J_1 = \begin{pmatrix} \nu_0 & 0 \\ 1 & \nu_0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Жалпы, $\nu_1 = \nu_2$ болуы да мүмкін. Бұл жағдайда [1] жұмысы қарастырылған. Біз бұл зерттеуде $\nu_1 \neq \nu_2$ деп есептейміз және осы

$$J = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \quad \nu_1 \neq \nu_2 \tag{5}$$

болған жағдайын қарастырамыз.
Сөйтіп, *D* операторы екі түрлі

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\partial}{\partial\tau} + \nu_1\frac{\partial}{\partial t}, \\ D_2 &= \frac{\partial}{\partial\tau} + \nu_2\frac{\partial}{\partial t} \end{aligned} \tag{6}$$

дифференциалдау операторларына жіктеледі.

Біз бұл жерде (2) түрлендіруді (1) жүйеге енгізіп жатпай-ақ, A_0 (5) түрде берілді деп есептеп, (1) жүйе $x = (x_1, x_2)$ вектор арқылы

$$Dx = A(\tau,t)x, \quad D = (D_1, D_2) \tag{7}$$

$$A(\tau,t) = [a_{j_k}(\tau,t)]_1^2, \quad A(\tau+\theta, t+\omega) = A(\tau,t) \in C_{\tau,t}^{(0,1)}(R\times R), \tag{8}$$

$$f(\tau,t) = (f_1(\tau,t), f_2(\tau,t)), \quad f(\tau+\theta, t+\omega) = f(\tau,t) \in C_{\tau,t}^{(0,1)}(R\times R) \tag{9}$$

түрде берілген дейміз.

Бастапқы шарт $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ вектор-функциясы арқылы

$$x\big|_{\tau=\xi} = u(t+\omega) = u(t) \in C_t^{(1)}(R) \tag{7^0}$$

берілсін. Мұндағы θ, ω - периодтарының қатынасы иррационал сан болсын. Ондай сандарды өлшемдес емес сандар деп атайды.

Алдымызда (6), (7)-(7^0), (8) және (9) шарттарымен берілген бастапқы есепті шешудің әдісін жасау мәселесін қоямыз. Бұл мәселе оңай шешіле қоятын проблема емес екендігіне [2] еңбекте екжей-текжейлі қарастырылған. Егер $A(\tau,t)$ тұрақты болса, онда оны шешудің мәселесі [3] мақалада келтірілген.

2. Дифференциалдау операторларының винттік сипаттары

Дифференциалдау операторы

$$D = \frac{\partial}{\partial\tau} + \nu\frac{\partial}{\partial t}, \quad \nu = const > 0, \quad (\tau,t) \in R\times R \tag{10}$$

өрнегімен берілген, $R = (-\infty, +\infty)$ - сан өсі.

Мақсатымыз осы оператордың

$$dt = \nu d\tau \tag{11}$$

өрнегімен берілген сипаттауышы θ- периодты болатын тік дөңгелек цилиндрлік бетті анықтау.

Ол үшін τ айнымалысы R өсінде өзгергенде (11) теңдеумен анықталған t айнымалысы τ-мен салыстырғанда, ν жылдамдықпен жүре отырып, τ ұзындығы (ұзақтығы) θ-ге тең түзулік (уақыттық) кесіндіні өткенде, t дөңгелек шеңбер бойымен соншама (яғни, θ-ға тең) доғалық жолды жүруді керек және құбылыс периодты болуы үшін t шеңберді бір айналып шығуы қажет.

Ендеше, шеңбердің ұзындығы $2\pi r$ жол $\nu\theta$ шамасына тең болуы керек, яғни

$$2\pi r = \nu\theta. \tag{12}$$

Демек, (12) өрнекке сәйкес шеңбердің радиусы $r = \frac{\nu\theta}{2\pi}$ теңдігімен анықталады, немесе, шеңбердің ұзындығы $C = \nu\theta$ болуы керек.

Егер S шеңбері $u = \tau$ өсіне перпендикуляр (vw) жазықтығына орналасса және ол (uvw) декарттық координаттар бас нүктесі арқылы өтсе, онда $Ц$ цилиндр u өсін бойлай

$$S_\theta : v^2 + (w - r)^2 = r^2 \tag{13}$$

теңдеуімен берілген шеңбермен анықталар еді. Осы цилиндр бойындағы (τ, t) нүктесі (11) теңдеуге сәйкес қозғалып, оның (ξ, η) нүктесі арқылы өтетін шешімі

$$t = \nu(\tau - \xi) + \eta \tag{14}$$

өрнегімен беріледі.

Жоғарыдағы τ және t айнымалылары арқылы цилиндрі сипаттасақ, онда τ параметрі u өсіне байланысты, яғни цилиндрдің жасаушысымен параллель u өсі бойынша өзгерісті анықтайды, ал t параметрі шеңберді, демек, цилиндрі айгалдырудағы өзгерісті көрсетеді және ол S шеңберінің параметрлік теңдеуінің негізі болады.

Сонымен $Ц$ цилиндрдің параметрлік теңдеулері

$$Ц : u = \tau,\ v = r\sin\frac{t}{r},\ w = r - r\cos\frac{t}{r} = r + r\sin\left(\frac{t}{r} - \frac{\pi}{2}\right) \tag{15}$$

түрде болады.

Егер (14) өрнекті ескерсек, онда (τ, t) нүктесі *(uvw)* декарттық координаталар жүйесінде, (15) теңдеулерге сәйкес,

$$(\beta), u = \tau - \xi,\ v = r\sin\frac{\nu(\tau - \xi) + \eta}{r},\ w = r + r\sin\left(\frac{\nu(\tau - \xi)}{r} - \frac{\pi}{2}\right) \tag{16}$$

винттік қозғалыс траекториясын аламыз.

Осы (16) өрнектегі $v = v(\tau)$ және $w = w(\tau)$ координаталары θ- периодты кенін байқаймыз. Шынында да, (12) өрнекке сәйкес $\theta = \frac{2\pi r}{\nu}$ екенін ескерсек, онда $v(\tau)$ координатасы мына

$$v(\tau + \theta) = r\sin\frac{\nu(\tau + \theta - \xi) + \eta}{r} = r\sin\frac{\nu(\tau + \frac{2\pi r}{\nu} - \xi) + \eta}{r} =$$

$$r\sin\frac{\nu(\tau - \xi) + 2\pi r}{r} = r\sin\left(\frac{\nu(\tau - \xi) + \eta}{r} + 2\pi\right) = r\sin\frac{\nu(\tau - \xi) + \eta}{r} = v(\tau)$$

өрнекті қанағаттандыратынын, яғни θ-периодты екенін көреміз.

Дәл осылайша, $w(\tau + \theta) = w(\tau)$ болатынын дәлелдеуге болады.

Ендеше, t айнымалысы (14) өрнекке байланысты τ-дың функциясы, яғни $t = t(\tau)$. Ал $t = t(\tau)$ параметрінің декарттық координаталары $v(\tau)$ мен $w(\tau)$ θ-периодты функциялар. Демек,

$$t(\tau+\theta) = t(\tau), \quad \tau \in R. \tag{17}$$

Бірақ, (17) өрнекті сандық шамалаулық (14) теңдіктен байқау мүмкін емес. Мұндай психологиялық кедергіден өту үшін τ - түзулік кесінділік, ал t доғалық ұзындықты білдіріп жазуымыз керек. Ол үшін τ әдеттегі уақыттық немесе түзулік кесіндіні сол күйінде қабылдасақ, онда t –ның доғалық екенін көрсетіп, (14) өрнекті

$$t - \eta = dog(\tau - \xi) \tag{18}$$

түрде жазуды қабылдаймыз. Мұндағы *dog* белгілеу «доға» сөзін білдіреді (қысқарта, латын әрпімен жазылған).

Ендеше, S шеңбер ұзындығы θ болғандықтан

$$dog(\tau+\theta) = dog\tau \tag{19}$$

Түзулік кесіндіні шеңбердің бағасына айналдырушы $dog\tau$ функциясы периодты функция болып, периодты шеңбердің ұзындығына тең екенін көреміз.

Сонымен, (18) операторлық функция тілінде жазылған (14) теңдік, ал (14) ұзындық терминінде жазылған (18) теңдік. Функция θ-периодты екені (19) теңдікпен берілген.

Сондай-ақ, $dog\tau = t$ функциясына кері түзулік, яғни доғаны түзу кесіндісіне айналдыратын функция да бар. Ол

$$\tau = kest + j\theta = Kest, \quad j \in Z \tag{20}$$

көпмәнді функциясы бар, Z – бүтін сандар жиыны.

Kes – кесінділік немесе сегменттік ұзындықты білдіретін көпмәнді функция, ал *kest* оның бас мәні және ол $0 \le kest < \theta$ шартын қанағаттандырады.

Сонымен, (18) өрнекті

$$t = dog(\tau - \xi) + \eta = \beta(\tau, \xi, \eta), \quad \tau \in R \tag{21}$$

түрінде жазып, осы D операторының винттік сипаттауышы
йымыз. Ол (19) өрнекке сәйкес θ- периодты функция.

Сипаттауыштар (21) теңдеуінен η арқылы шешіп,

$$\eta = \beta(\xi, \tau, t), \quad (\tau, t) \in R \times S_\theta = Ц \tag{22}$$

алғашқы сипаттауыш интегралын анықтаймыз.

Ол ξ мен τ бойынша θ- периодты

$$D\beta(\xi, \tau, t) = 0, \quad \beta(\xi, \xi, t) = t, \tag{23}$$

$$\beta(\xi+\theta, \tau, t) = \beta(\xi, \tau+\theta, t) = \beta(\xi, \tau, t), \tag{24}$$

$$\beta(\xi, \tau, t+\omega) = \beta(\xi, \tau, t) + \omega, \tag{25}$$

$$\beta(\xi, \zeta, \beta(\zeta, \tau, t)) = \beta(\xi, \tau, t) \tag{26}$$

қасиеттерге бағынатын тегіс функция болып табылады.

Бұл алынған нәтижені теорема түрінде тұжырымдайық.

Теорема 1. *Өрнегі* (1) *түрде болатын D дифференциалдау операторының* (21) *винттік сипаттауыштары мен* (22) *алғашқы сипаттауыш интегралдары* (23)-(26) *қасиеттерге бағынады.*

Бұл теорема [2] еңбегінде $\nu = 1$ болғанда, басқаша әдіспен баяндалып, толық дәлелденген. Дәлелдеген 1 теорема оның жалпыланған түрі болып, табылады және ол $dog\tau$ функциясы тілінде жатық түсіндіріліп отыр.

3. Әртүрлі операторлы сызықты теңдеулер жүйесін зерттеудің әдістемесі және матриcанты

Алдымен біртектес екі теңдеулері мына жүйені

$$\begin{cases} D_1x_1 = a_{11}(\tau,t)x_1 + a_{12}(\tau,t)x_2, D_1 = \dfrac{\partial}{\partial\tau} + \lambda_1\dfrac{\partial}{\partial t} \\ D_2x_2 = a_{21}(\tau,t)x_1 + a_{22}(\tau,t)x_2, D_2 = \dfrac{\partial}{\partial\tau} + \lambda_2\dfrac{\partial}{\partial t} \end{cases} \tag{27}$$

зерттеу әдістеріне тоқталайық және мұндағы коэффициенттер

$$a_{j_k}(\tau+\theta, t+\omega) = a_{j_k}(\tau,t) \in C^{(0,1)}_{\tau,t}(R\times S_\theta), \quad (j,k=1,2) \tag{28}$$

шарттарын қанағаттандырсын, ал λ_1 мен λ_2 өзіндік мәндері $\lambda_1 \neq \lambda_2$ әртүрлілік шартымен анықталсын.

Дәлелдеген (1) теорема бойынша, D_j операторының сипаттауыштары $\nu = \lambda_j, j = 1,2$ мәндеріне байланысты,

$$\frac{dt_j}{d\tau} = \lambda_j, \quad j=1,2; \;\; t_j = \beta_j(\tau,\xi,\eta), \quad j=1,2 \tag{29}$$

теңдеулерімен анықталсын және мұндағы t_1, t_2 шамалары t-ның әр жолдағы аттары. Демек, $t_1 = t_2 = t$ есте ұстау керек. Сөйтіп, t векторлық $t = (t_1, t_2)$ шамаға айналды. Сипаттауыштар теориясына сәйкес,

$$D_j x_j(\tau, t_j)\Big|_{t_j=\beta_j(\tau,\xi,\eta_j)} = \frac{d}{d\tau}x_j(\tau, \beta_j(\tau,\xi,\eta_j), \quad j=1,2 \tag{30}$$

екенін ескеріп, әр жолдың өз сипаттауышы барын ойға алып, τ-дың орнына σ-ны алып,

$$\frac{d}{d\sigma}x_j(\sigma, \beta(\sigma,\xi,\eta_j)) = \sum_{k=1}^{2} a_{j_k}(\sigma, \beta_j(\sigma,\xi,\eta_j)x_j(\sigma, \beta_j(\sigma,\xi,\eta_j))),$$
$$\xi \xrightarrow{\sigma} \tau \tag{31}$$

жүйесін жазамыз және мұндағы σ айнымалысы ξ-ден τ-ға қарай өзгеретінін ескереміз, (ξ, η_j) - сипаттауыштардың бастапқы берілгендері, яғни (τ, t_j) векторының алғы қалпы.

Ендеше, (31) дифференциалдық жүйеден

$$x_j(\sigma, \beta_j(\sigma,\xi,\eta_j)) = u_j(\eta_j) + \int_\xi^\tau \sum_{k=1}^{2} a_{j_k}(\sigma, \beta_j(\sigma,\xi,\eta_j))x_k(\sigma, \beta_j(\sigma,\xi,\eta_j))d\sigma, \quad j=1,2 \tag{32}$$

интегралдық жүйені алдық.

Енді осы скалярлық жазудан вектор-матрицалық жазу формасына көшейік.

Ол үшін барлық координаталық шамалардан векторлық шамаларға, элементтік шамалардан матрицаларға көшіп, операторлардың орындалу реттерін анықтауымыз керек.

Осыған сәйкес бұрыннан қалыптасқан таныс белгілеулерді бұзбай $(\tau,t),(\xi,\eta_1),(\xi,\eta_2), \;\; x=(x_1,x_2), \;\; u=(u_1,u_2), \;\; \eta=(\eta_1,\eta_2), \;\; t=(t_1,t_2), \;\; \beta=(\beta_1,\beta_2)$ екі координатты векторлар мен $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ матрицамен және ξ, σ, τ скалярларымен берілген, $D = (D_1, D_2)$ - векторлық операторы алынды. Арифметикалық дифференциалдық, интегралдық және композициялық амалдарымен берілген (27)-(32) өрнектерді, кейінгі жиі қолданылатын, біртіндеп жуықтау тәсілін оңай сипаттайтындай, басқа математик-жұрт ұғынып, түсінетіндей түрде жазу мәселесін шешейік.

Бұл жағдайдағы басты ерекшелік, бұрын қалыптаспаған ереже, әр жолдың өз характеристикасы-сипаттауышы өз орнында болуын үйлестіруші мәселесі болып табылды. Ол мәселе матрицаны матрицаға немесе матрицаны векторға көбейту кезінде, әр жолда матрицаны барлық жолдары араласа қатысатындығына байланысты кездеседі. Интегралдар қайталанса, алдымен жаңа композиция енгізіледі.

Көтерілген мәселені бұрын проекциялау операторыларымен шешкен болатынбыз. Бірақ, ол әлі толық әкетілмеген. Жеке жағдайда болмаса (мысалы, тұрақты коэффициентті), жалпы жағдайда қолдану ауыр екенін байқаймыз.

Бұл мәселені шешудің жолы, қазір, табылған сыңайлы. Ол – композициялық амалдың барлық арифметикалық амалдың соңынан шешілуі, сосын барып, дифференциалдау немесе интегралдау амалдарын жүргізу болып табылады. Амалдар алгоритмі: 1) арифметикалық амалдар, 2) композициялық амалдар, сосын 3) интегралдық немесе дифференциалдау амалдарын қолдану ережесін қабылдауымыз керек және 4) интегралдау да, дифференциалдау да сипаттауыштар терминінде жүргізіліп, нәтижелер алғашқы сипаттауыш интегралдар тілінде баяндалуы керек. Мұны амалдардың иерархиясы деп атауға болады.

Композициялық амал функцияның аргументін басқа аргументке ауыстыру амалы болып табылады, яғни ол күрделі функцияларды енгізу амалы.

Мысалы, x функциясының (τ,t) аргументін $(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))$ вектор-функциясына ауыстыруды, яғни, $x(\tau,t)$-дан $x(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))$ функциясына көшіруді

$$x((\tau,t)\,\mathrm{o}(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t)))=x(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t)) \qquad (33_1)$$

түрінде жазады. Мұндағы o - кішкене дөңгелегі қай шаманы қандай шамаға ауыстырғандықтың белгісі.

Енді біздің жағдайымызға лайықты төмендегідей белгілеуді қабылдайық:

$$Dx=\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_1x_1 \\ D_2x_2 \end{pmatrix}, \qquad (33_2)$$

$$x(\tau,t)=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\tau,t_1) \\ (\tau,t_2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1(\tau,t_1) \\ x_2(\tau,t_2) \end{pmatrix}, \qquad (33_3)$$

$$A(\tau,t)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}(\tau,t)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\tau,t_1) \\ (\tau,t_2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}(\tau,t_1) & a_{12}(\tau,t_1) \\ a_{21}(\tau,t_2) & a_{22}(\tau,t_2) \end{pmatrix}, \qquad (33_4)$$

$$A(\tau,t)x(\tau,t)=(Ax)(\tau,t)=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\tau,t_1) \\ (\tau,t_2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}(\tau,t_1)x_1(\tau,t_1)+a_{12}(\tau,t_1)x_2(\tau,t_1) \\ a_{21}(\tau,t_2)x_1(\tau,t_2)+a_{22}(\tau,t_2)x_2(\tau,t_2) \end{pmatrix}=$$

$$(Ax)(\tau,t). \qquad (33)$$

Осылайша векторлық және матрицалық функциялар мен олардың аргументтерінің тіркелістерін түзітуіміз керек.

Сонымен, (27) жүйе (33_1)-(33_5) қабылдаулармен векторлық-матрицалық формаға

$$Dx=(Ax)(\tau,t) \qquad (34)$$

түрінде жазылады. Ал, (28) өрнек бұрынғы

$$A(\tau+\theta,t+\omega)=A(\tau,t) \qquad (35)$$

көрнісін сақтайды.

Сол сияқты, (29) өрнектер де өзінің бұрынғы

$$\frac{dt}{d\tau}=\lambda,\quad t=\beta(\tau,\xi,\eta) \qquad (36)$$

бейнелерін сақтайды.

Дифференциалдық операторлардың (30) байланысы

$$Dx(\tau,t)\big|_{t=\beta(\tau,\xi,\eta)}=\frac{d}{d\tau}x(\tau,\beta(\tau,\xi,\eta)) \qquad (37)$$

ол да өзгеріссіз сипатталады.

Жәй дифференциалдық (31) жүйе

$$\frac{d}{d\sigma}x(\sigma,\beta(\sigma,\xi,\eta))=(Ax)(\sigma,\beta(\sigma,\xi,\eta)) \qquad (38)$$

түрінде беріледі.

Сондай-ақ,

$$u(\eta)=\begin{pmatrix} u_1(\eta_1) \\ u_2(\eta_2) \end{pmatrix}$$

функциясын алсақ, (32) интегралдық жүйе

$$x(\sigma,\beta(\sigma,\xi,\eta))=u(\eta)+\int_{\xi}^{\tau}(Ax)(\sigma,\beta(\sigma,\xi,\eta))d\sigma \tag{39}$$

есебінде келтіріледі.

Интегралдық нәтижесінде (39) өрнек қандай функцияны сипаттап тұрғанын көрсету үшін,

$$\eta=\beta(\xi,\tau,t)$$

алғашқы интегралы арқылы (39) күрделі функциядан

$$\beta(\sigma,\xi,\beta(\xi,\tau,t))=\beta(\sigma,\tau,t)$$

болатынын ескеріп,

$$x(\tau,t)=u(\beta(\xi,\tau,t))+\int_{\xi}^{\tau}(Ax)(\sigma,\beta,(\sigma,\tau,t))d\sigma \tag{40}$$

өрнегіне ауысамыз.

Егер (40) өрнектегі $x(\tau,t)$ орнына $X(\tau,t)$ матрицасын алсақ, онда

$$X\big|_{\tau=\xi}=V(\eta)$$

ескеріп, оны

$$X(\tau,t)=V(\beta(\xi,\tau,t))+\int_{0}^{\tau}(AX)(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))d\sigma \tag{41}$$

түрде жазуға болады.

Дербес жағдайда, *V*=*E* – берлік матрицасы болса, онда (41) теңдіктен

$$X(\tau,t)=E+\int_{0}^{\tau}(AX)(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))d\sigma \tag{42}$$

өрнегін аламыз. Жуықтаулар (τ,t) арқылы берілуі керек.

Енді біртіндеп жауықтау әдісімен матрицант құру әдістемесін берейік.

Ол үшін $X^{(0)}$ нөлінші жуықтау ретінде *E* бірлік матрицасын алсақ, яғни

$$X^{(0)}=E,\ X^{(k)}_{(\tau,t)}=E+\int_{\xi}^{\tau}(AX^{(k-1)})(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))d\sigma,\quad (k=1,2,...) \tag{43}$$

жуықтауларынан ашып жазып,

$$X^{(1)}_{(\tau,t)}=E+\int_{\xi}^{\tau}A(\sigma_0,\beta(\sigma_0,\tau,t))d\sigma_0$$

бірінші жуықтауды аламыз.

$$X^{(2)}_{(\tau,t)}=E+\int_{\xi}^{\tau}A(\sigma_1,\beta(\sigma_1,\tau,t))\cdot X^{(1)}_{(\tau,t)}(\sigma_0,\beta(\sigma_0,\sigma_1,\beta(\sigma_1,\tau,t)))=$$

$$=E+\int_{\xi}^{\tau}A(\sigma_2,\beta(\sigma_2,\tau,t))\int_{\xi}^{\sigma_2}[E+A(\sigma_0,\beta(\sigma_0,\sigma_1,\beta(\sigma_1,\tau,t)))]d\sigma_1=$$

$$=\beta(\sigma_0,\sigma_1,\beta(\sigma_1,\tau,t))=\beta(\sigma_0,\tau,t)=$$

$$=E+\int_{\xi}^{\tau}A(\sigma_1,\beta(\sigma_1,\tau,t))d\sigma_1+\int_{\xi}^{\tau}A(\sigma_1,\beta(\sigma_1,\tau,t))\int_{\xi}^{\sigma_1}A(\sigma_0,\beta(\sigma_0,\tau,t))d\sigma_0=$$

$$=E+\int_{\xi}^{\tau}A(\sigma_0,\beta(\sigma_0,\tau,t))d\sigma_0+\int_{\xi}^{\tau}d\sigma_1\int_{\xi}^{\sigma_1}A(\sigma_1,\beta(\sigma_1,\tau,t))A(\sigma_0,\beta(\sigma_0,\tau,t))d\sigma_0$$

$$\dots$$

$$\begin{aligned}X^{(k)}_{(\tau,t)}&=E+\int_{\xi}^{\tau}A(\sigma_0,\beta(\sigma_0,\tau,t))d\sigma_0+\int_{\xi}^{\tau}d\sigma_1\int_{\xi}^{\sigma_1}A(\sigma_1,\beta(\sigma_1,\tau,t))A(\sigma_0,\beta(\sigma_0,\tau,t))d\sigma_0+\\&+...+\int_{\xi}^{\tau}d\sigma_{k-1}\int_{\xi}^{\sigma_{k-1}}d\sigma_{k-2}...\int_{\xi}^{\sigma_k}A(\sigma_{k-1},\beta(\sigma_{k-1},\tau,t))...A(\sigma_0,\beta(\sigma_0,\tau,t))d\sigma_0\end{aligned} \tag{44}$$

$$\dots$$

өрнектерін аламыз.

Енді (44) жуықтауларды бағамдап,

$$\left|X^{(0)}\right| = |E| = 1, \left|X^{(1)}_{(\tau,t)}\right| \le 1 + \|A\||\tau - \xi|,$$

$$\left|X^{(2)}_{(\tau,t)}\right| \le 1 + \|A\||\tau - \xi| + \left|\int_{\xi}^{\tau} \|A\|^2 |\sigma_1 - \xi| d\sigma_1\right| \le 1 + \|A\||\tau - \xi| + \frac{\|A\|^2 |\tau - \xi|^2}{2!}, ..., \left|X^{(k)}_{(\tau,t)}\right| \le$$

$$1 + \frac{\|A\||\tau - \xi|}{1!} + \frac{\|A\|^2 |\tau - \xi|^2}{2!} + ... + \frac{1}{k!}\|A\|^k |\tau - \xi|^k, k = 0,1,2,... \tag{45}$$

Теңсіздіктерін анықтаймыз. Демек, (45) өрнектен

$$\left|X^{(k)}_{(\tau,t)}\right| \le e^{\|A\||\tau - \xi|} \tag{46}$$

екенін көреміз.

Енді сыбайлас екі жуықтаулардың айырмаларын бағамдайық. Сонда

$$\left|X^{(1)}_{(\tau,t)} - X^{(0)}\right| \le \left|\int_{\xi}^{\tau} A(\sigma_0, \beta(\sigma_0, \tau, t)) d\sigma_0\right| \le \|A\||\tau - \xi|,$$

$$\left|X^{(2)}_{(\tau,t)} - X^{(1)}_{(\tau,t)}\right| \le \frac{\|A\|^2 |\tau - \xi|^2}{2!},$$

$$\dots$$

$$\left|X^{(k)}_{(\tau,t)} - X^{(k-1)}_{(\tau,t)}\right| \le \frac{\|A\|^2 |\tau - \xi|^k}{k!} \tag{47}$$

$$\dots$$

екенін толық математикалық индукция әдісімен көз жеткізуге болады.

Демек, кез келген $\Delta > 0$ саны үшін $|\tau - \xi| \le \Delta$ болғанда

$$X^{(k)}_{(\tau,t)} = X^{(0)} + \sum_{j=1}^{k} [X^{(j)}_{(\tau,t)} - X^{(j-1)}_{(\tau,t)}]$$

өрнегінен $k \to \infty$ кезде

$$\lim_{k \to \infty} X^{(k)}_{(\tau,t)} = E + \sum_{j=1}^{\infty} [X^{(j)}_{(\tau,t)} - X^{(j-1)}_{(\tau,t)}] \tag{48}$$

қатарымен өрнектелетінін білеміз.

Бұл (48) қатар (47) бағамдау негізінде

$$|E| + \sum_{j=1}^{\infty} \left|X^{(j)}_{(\tau,t)} - X^{(j-1)}_{(\tau,t)}\right| \le 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|A\|^j |\tau - \xi|^j}{j!} \le 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|A\|^j \Delta^j}{j!} = e^{\|A\|\Delta}$$

қанағаттандыратынын аламыз.

Ендеше, (48) қатар $|\tau - \xi| \le \Delta$ болса, бірқалыпта абсолют жинақты.

Қатардың қосындысын $X(\tau, t)$ деп белгілесек, онда (48) шектен

$$\lim_{k \to \infty} X^{(k)}_{(\tau,t)} = X(\tau, t) \tag{49}$$

теңдігін аламыз.

Осы (42)-(49) өрнектерден, яғни, матрицант құру тәсілін жүргізуде (33_1)-(33_5) қабылдаулар мүлтіксіз, бір операторлы жүйедегідей, қызмет ететініне көз жеткіздік. Ең соңында (27)-(28) жүйенің матрицантын алу үшін, (29) өрнектен бастап $t \in R$ скаляр шамасын жүйенің әр жолына сәйкес

$$t \overset{o}{=} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \subset R^2 \tag{50}$$

вектор түрінде жазғанымызды ескереміз. Мұндағы $\overset{o}{=}$ белгісі – композициялық теңдік. Демек, (49) өрнекте t (50) түрде екенін ескереміз, яғни оған сәйкес,

$$X(\tau,t)=[x_{j_k}(\tau,t)]_1^2=\begin{bmatrix} x_{11}(\tau,t_1) & x_{12}(\tau,t_1) \\ x_{21}(\tau,t_2) & x_{22}(\tau,t_2) \end{bmatrix} \tag{51}$$

түрде бейнеленеді. Ендеше, (27) жүйенің (τ,t) - скаляр аргументін вектор-матрицалық түрін

$$Dx^{\circ}=A^{\circ}(\tau,t)x^{\circ},\quad D=\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix},\quad A^{\circ}(\tau,t)=\begin{bmatrix} a_{11}(\tau,t) & a_{12}(\tau,t) \\ a_{21}(\tau,t) & a_{22}(\tau,t) \end{bmatrix},\ (\tau,t)\in R\times R \tag{52}$$

белгілеулермен берілсе, онда (51) өрнекте $t_1=t_2=t$ екенін ескеріп,

$$X(\tau,t)=X\begin{pmatrix} (\tau,t_1) \\ (\tau,t_2) \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} (\tau,t_1) \\ (\tau,t_2) \end{pmatrix}$$

өрнегінен скаляр аргументті, яғни, $(\tau,t)\in R\times R$ аргументті

$$X^{\circ}(\tau,t)=X\begin{pmatrix} (\tau,t) \\ (\tau,t) \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} (\tau,t) \\ (\tau,t) \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}(\tau,t),(\tau,t)\in R\times R \tag{53}$$

түріндегі матрицамен танысамыз.

Сонымен, зерттеудің бұл бөлімінде (τ,t) скаляр аргументті жүйеден $\begin{pmatrix} (\tau,t_1) \\ (\tau,t_2) \end{pmatrix}=((\tau,t_1),(\tau,t_2))$ вектор-аргументті жүйеге көшіп, (33_1)-(33_5) қабылдаулар негізіндегі зерттеу әдісімен таныстық және сызықты жүйенің матрицантын құрудағы жаңа әдістің қолданысымен табыстық.

Теорема-тұжырым 2. *Екі дифференциалдау операторлы жүйені скаляр аргументтен векторлық аргументке көшіп, арифметикалық, композициялық және анализдік амалдар иерархиясын* (33_1)-(33_5) *қабылдаулар негізінде жаңа зерттеу әдісі жасақталды және жасақталған әдіс* (27) *сызықты жүйенің* (52) *вектор-матрицалық теңдеуінің* (53) *матрицантын құрумен таныстырылды.*

Теорема 1) жаңа әдісті тақтап, тұжырымдап, сосын сол әдіспен 2) матрицанттың бейнесін анықтап тұр. Сондықтан ол тұжырымдық теорема аталып отыр. Шекке көшу, дифференциалдау және интегралдау операторларын қолдануды анализдік амалдар терминімен түсіндіріп отырмыз.

4. Екі операторлы сызықты жүйелерді цилиндрлік бетте шешу

Сызықты екі операторлы (τ,t) скаляр аргументті (27)-(28) жүйенің (52) вектор-матрицалық түрдегі

$$\begin{gathered} Dx=A(\tau,\mathbf{t})x,\ \ (\tau,\mathbf{t})\in R\times S_\theta,\ \ D=(D_1,D_2), \\ A(\tau,t)=[a_{j_k}(\tau,\mathbf{t})]_1^2,\quad A(\tau+\theta,\mathbf{t}+\omega)=A(\tau,\mathbf{t})\in C_{\tau,\mathbf{t}}^{(0,1)}(R\times S_\theta) \end{gathered} \tag{54}$$

теңдеуінің

$$x\big|_{\tau=\xi}=u(\mathbf{t})=u(\mathbf{t}+\omega)\in C_{\mathbf{t}}^{(1)}(S_\theta) \tag{54^0}$$

шартын қанағаттандыратын шешімін табу мәселесін қарастырайық. Мұнда $x=(x_1,x_2)$ белгісіз вектор-функция, $\mathbf{t}$ айнымалысы оның скаляр шама екенін көрсетеді.

Ол үшін 2 теорема-тұжырымға сәйкес әдісті қолданамыз. Осындай мақсатпен $(\tau,\mathbf{t})$ скаляр аргументтерінің орнына $t_1=t_2=\mathbf{t}$ теңдігімен анықталған $t=(t_1,t_2)$ векторын енгізіп,

$$((\tau,t_1),(\tau,t_2))=(\tau,t) \tag{55}$$

векторлық аргументті (яғни (τ,t_1) - бірінші жолдың, (τ,t_2) - екінші жолдың аргументтері) мына

$$Dx=(Ax)(\tau,t),\quad D=(D_1,D_2),\quad A\begin{pmatrix} (\tau+\theta,t_1+\omega) \\ (\tau+\theta,t_2+\omega) \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} (\tau,t_1) \\ (\tau,t_2) \end{pmatrix}=A(\tau,t)\in C_{\tau,t}^{(0,1)}(R\times S_\theta) \tag{56}$$

жүйе түрінде қарастырамыз. Бастапқы шарты

$$x\big|_{\tau=\xi} = u(t) = u(t+\omega) \in C_t^{(1)}(S_\theta), \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \qquad (56^0)$$

түрінде болады.

Енді (τ, t) аргументін (54)-(54^0) есебіне қайта айналып соққанша (55) мағынада түсінеміз және (33_1)-(33_5) қабылдауларға сәйкес, арифметикалық, композициялық және анализдік амалдарды, осы иерархиялық ретпен қолданып, зерттеу жүргіземіз. Бұл әдіс бұрын қолданып жүрген бір операторлы жүйелер тәсілі схемасына түсіреді, тек амалдарды (33_1)-(33_5) мағынасында қолдануды ұғына қабылдауымыз қажет.

Жалпы жағдайда D операторлы теңдеулердің жәй $\dfrac{d}{d\tau}$ операторлы күйге келтіріліп, сосын бірдей характеристикалы-сипаттауышты теңдеулер бір жүйе түрінде $(\sigma, \beta_j(\sigma,\xi,\eta)), (\xi,\eta) \in R \times S_\theta = Ц, \quad \xi \xrightarrow{\sigma} \tau$ топтастырылып, яғни берілген жүйе сипаттауыштарының бірдейлігіне сай топтастырылған түріндегі қалыпқа келтірілуі керек.

Біздің жағдайымызда екі теңдеудің сипаттауыштары 1) бірдей немесе 2) әртүрлі болуы мүмкін. Бірдей 1) жағдайда жүйе бір операторлы болады және оның интегралдау әдістері белгілі, [3] еңбегінде келтірілген, [4] еңбектерінде дамытылған.

Егер 2) жағдайда болса, онда жүйенің әр теңдеуі өз сипаттауышы бойында анықталады және ол осы зерттеудегі жаңа әдістеме бойынша интегралдануы керек.

Жіңішке гиперболалық жағдай, яғни әртүрлі сипаттауышты жүйе баяндалып отырған әдісінен интегралданады. Осы тәсіл бойынша, (56) жүйе

$$\begin{gathered} \frac{d}{d\sigma} x(\sigma, \beta(\sigma,\xi,\eta)) = (Ax)(\sigma, \beta(\sigma,\xi,\eta)), \\ A(\sigma+\theta, \beta+\omega) = A(\sigma,\beta) \in C_{\sigma,\beta}^{(0,1)}(R \times S_\theta) \end{gathered} \qquad (57)$$

$$x\big|_{\sigma=\xi} = u(\eta+\omega) = u(\eta) \in C_\eta^{(1)}(S_\theta), \xi \xrightarrow{\sigma} \tau, (\xi,\eta) \in Ц \qquad (57^0)$$

түрінде жазылады және белгілеулер (33_1)-(33_5) өрнектерге сәйкес,

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$(Ax) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad (\sigma,\beta) = \begin{pmatrix} (\sigma,\beta_1) \\ (\sigma,\beta_2) \end{pmatrix}, \quad (\xi,\eta) = \begin{pmatrix} (\xi,\eta_1) \\ (\xi,\eta_2) \end{pmatrix},$$

$$(Ax)(\sigma,\beta(\sigma,\xi,\eta)) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\sigma,\beta_1(\sigma,\xi,\eta_1) \\ (\sigma,\beta_2(\sigma,\xi,\eta_2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(\sigma,\beta_1(\sigma,\xi,\eta_1) \\ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)(\sigma,\beta_2(\sigma,\xi,\eta_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\sigma,\beta_1(\sigma,\xi,\eta_1) \\ f_2(\sigma,\beta_2(\sigma,\xi,\eta_2) \end{pmatrix}$$

тәуелділіктері түрінде түсінуіміз керек және $f_j = \sum_{k=1}^{2} a_{j_k} x_k,\ j = 1,2.$ Матрицаның вектор-аргументі тұстастырып жазылады, бірақ, көбейтілмейтініне назар аударамыз.

Теорема-тұжырым 2 бойынша, (57)-(57^0) бастапқы есебінің шешімі сипаттауыштар терминінде

$$x(\sigma,\beta(\sigma,\xi,\eta)) = X(\sigma,\beta(\sigma,\xi,\eta))u(\eta) \qquad (58)$$

өрнегімен беріледі. Осыдан $\eta = \beta(\xi,\tau,t)$ арқылы алғашқы сипаттауыштар интегралына көшсек,

$$x(\sigma,\beta(\sigma,\xi,\beta(\xi,\tau,t))) = X(\sigma,\beta(\sigma,\xi,\beta(\xi,\tau,t)))u(\beta(\xi,\tau,t))$$

өрнегін, одан топтық қасиет бойынша

$$x(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t)) = X(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))u(\beta(\xi,\tau,t))$$

бейнесін, демек, $\sigma = \tau$ болса, $\beta(\tau,\tau,t) = t$ екенін ескеріп,

$$x(\tau,t)=X(\tau,t)u(\beta(\xi,\tau,t)) \tag{59}$$

(56)-(56^0) есебінің шешімін аламыз. Шешім вектор-аргументті, яғни $t=\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$.

Енді $t=\begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{pmatrix}=\mathbf{t}$ жағдайға көшіп, яғни $t_1=t_2=\mathbf{t}$ деп есептеп, (59) өрнектен

$$x(\tau,\mathbf{t})=X(\tau,\mathbf{t})u(\beta(\xi,\tau,t)) \tag{60}$$

түрдегі (54)-(54^0) есебінің шешімін аламыз.

Теорема 3. (54)-(54^0) *бастапқы есебінің жалғыз шешімі* (59) *өрнекпен алынған* (60) *түрде анықталады.*

Теореманың толық дәлелдеуі (54)-(60) өрнектер арқылы жоғарыда негізделгенін жағы да еске саламыз. Шешімнің жалғыздығы кері жору тәсілімен оп-оңай анықталады.

Дәл осы әдіспен сызықты біртектес емес $x=(x_1,x_2)$, белгісізі бойынша

$$\begin{gathered} Dx=A(\tau,\mathbf{t})x+f(\tau,\mathbf{t}), \quad D=(D_1,D_2), \\ A(\tau+\theta,\mathbf{t}+\omega)=A(\tau,\mathbf{t})\in C^{(0,1)}_{\tau,\mathbf{t}}(R\times S_\theta), \\ f(\tau+\theta,\mathbf{t}+\omega)=f(\tau,\mathbf{t})\in C^{(0,1)}_{\tau,\mathbf{t}}(R\times S_\theta) \end{gathered} \tag{61}$$

жүйесінің

$$x\big|_{\tau=\xi}=u(\mathbf{t})=u(\mathbf{t}+\omega)\in C^{(1)}_{\mathbf{t}}(S_\theta) \tag{61^0}$$

бастапқы шартты есебінің шешімін анықтайық.

Жаңа әдіс бойынша $t_1=t_2=\mathbf{t}$ конгруэнтті айнымалылар алып, (61)-(61^0) есебін

$$\begin{gathered} Dx=(Ax)(\tau,t)+f(\tau,t), \quad (\tau,t)=\begin{pmatrix} (\tau,t_1) \\ (\tau,t_2) \end{pmatrix}, \\ A\begin{pmatrix} (\tau+\theta,t_1+\omega) \\ (\tau+\theta,t_2+\omega) \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} (\tau,t_1) \\ (\tau,t_2) \end{pmatrix}=A(\tau,t)\in C^{(0,1)}_{\tau,t}(R\times S_\theta), \\ f\begin{pmatrix} (\tau+\theta,t_1+\omega) \\ (\tau+\theta,t_2+\omega) \end{pmatrix}=f\begin{pmatrix} (\tau,t_1) \\ (\tau,t_2) \end{pmatrix}=f(\tau,t)\in C^{(0,1)}_{\tau,t}(R\times S_\theta), \end{gathered} \tag{62}$$

$$x\big|_{\tau=\xi}=u\begin{pmatrix} t_1+\omega \\ t_2+\omega \end{pmatrix}=u\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}=u(t)\in C^{(0,1)}_{t}(S_\theta) \tag{62^0}$$

түрінде жазамыз. Жалпы,

$$f(\tau,t)=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\tau,t_1) \\ (\tau,t_2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(\tau,t_1) \\ f_2(\tau,t_2) \end{pmatrix}$$

өрнегі f вектор-функциясы мен (τ,t) вектор-аргументінің декарттық көбейтіндісі деп аталатынына назар аударамыз. Демек, декарттық көбейтінді екі вектордың сәйкес координаттарын тіркестіріп, ғни тұстастырып жазумен пара-пар.

Одан әрі (62)-(62^0) есептен сипаттауыштар бойында

$$\begin{pmatrix} (\tau,t_1) \\ (\tau,t_2) \end{pmatrix}=(\tau,t)=(\sigma,\beta(\sigma,\xi,\eta))=\begin{pmatrix} \sigma,\beta_1(\sigma,\xi,\eta_1) \\ \sigma,\beta_2(\sigma,\xi,\eta_2) \end{pmatrix}$$

жәй дифференциалдық теңдеулерге көшіп,

$$\begin{gathered} \frac{dx(\sigma,\beta(\sigma,\xi,\eta))}{d\sigma}=(Ax)(\sigma,\beta(\sigma,\xi,\eta)) \\ A(\sigma+\theta,\beta+\omega)=A(\sigma,\beta)\in C^{(0,1)}_{(\tau,\beta)}(R\times S_\theta), \\ f(\sigma+\theta,\beta+\omega)=f(\sigma,\beta)\in C^{(0,1)}_{(\tau,\beta)}(R\times S_\theta), \end{gathered} \tag{63}$$

$$x\big|_{\sigma=\xi}=u(\eta+\omega)=u(\eta)\in C^{(1)}_{\eta}(S_\theta) \tag{63^0}$$

бастапқы есебінің шешімін анықтаймыз.

Ол үшін, алдымен жалпыға аян

$$u\big|_{\sigma=\xi}=0 \tag{63*}$$

қарапайым жағдайдағы бастапқы шартты қанағаттандыратын шешімді іздестірейік.

Мұндай шешім (64)-(64*) есебі үшін

$$x^{\mathrm{o}}(\sigma,\beta(\sigma,\xi,\eta))=X(\sigma,\beta(\sigma,\xi,\eta))\int_{\xi}^{\sigma}(Xf^{-1})(s,\beta(s,\xi,\eta))ds \tag{64}$$

өрнегімен берілетіні жәй дифференциалдық теңдеулер теориясынан белгілі[6].

Ендеше, (63)-(63^0) бастапқы есеп шешімі (57)-(57^0) біртектес жүйелер шешімі мен (63)-(63*) шешімінің қосындысынан тұратыны сызықтық жүйелерге тән қасиет. Демек, сипаттауыштар бойында

$$x(\sigma,\beta(\sigma,\xi,\eta))=X(\sigma,\beta(\sigma,\xi,\eta))u(\eta)+X(\sigma,\beta(\sigma,\xi,\eta))\int_{\xi}^{\sigma}(X^{-1}f)(s,\beta(s,\xi,\eta))ds \tag{65}$$

өрнегімен беріледі.

Егер $\eta=\beta(\xi,\tau,t)$ екенін ескерсек, онда (64) және (65) шешімдер, $\beta(\sigma,\xi,\beta(\xi,\tau,t))=\beta(\sigma,\tau,t)$ теңдігі негізінде, алғашқы сипаттауыш интегралдар бойында

$$x^*(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))=X(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))\int_{\xi}^{\sigma}(X^{-1}f)(s,\beta(s,\tau,t))ds, \tag{66}$$

$$x(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))=X(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))u(\beta(\xi,\tau,t))+X(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))\int_{\xi}^{\sigma}(X^{-1}f)(s,\beta(s,\tau,t))ds \tag{67}$$

түрге түседі.

Одан әрі $\sigma=\tau$ болса, онда $\beta(\tau,\tau,t)=t$ екенін ескеріп, (66) және (67) өрнектерден, оларға сәйкес

$$x^*(\tau,t)=X(\tau,t)\int_{\xi}^{\tau}(X^{-1}f)(s,\beta(s,\tau,t))ds \tag{68}$$

$$x(\tau,t)=X(\tau,t)u(\beta(\xi,\tau,t))+X(\tau,t)\int_{\xi}^{\tau}(X^{-1}f)(s,\beta(s,\tau,t))ds \tag{69}$$

таныстырмаларын аламыз.

Бұл (68) және (69) шешімдер (62)-(62^0)-(63*) және (62)-(62^0) бастапқы есептерінің шешімдері.

Осы шешімдерден $t_1=t_2=\mathbf{t}$ болған жағдайда $t=\begin{pmatrix}\mathbf{t}\\ \mathbf{t}\end{pmatrix}$, яғни $\mathbf{t}$ айнымалысынын $P\mathbf{t}=\begin{pmatrix}t_1\\ t_2\end{pmatrix}=t$ векторлық күйге проекцияласақ, онда $\mathbf{t}=P^{-1}t$ векторлық жағдайды скаляр күйге түсіретінін ескерсек, проекциялау амалын қолданып жатпай-ақ,

$$x^*(\tau,\mathbf{t})=X(\tau,\mathbf{t})\int_{\xi}^{\tau}(X^{-1}f)(s,\beta(s,\tau,\mathbf{t}))ds, \tag{70^0}$$

$$x(\tau,\mathbf{t})=X(\tau,\mathbf{t})u(\beta(\xi,\tau,\mathbf{t}))+X(\tau,\mathbf{t})\int_{\xi}^{\tau}(X^{-1}f)(s,\beta(s,\tau,\mathbf{t}))ds \tag{70}$$

өрнектері (61)-(61^0) бастапқы есебінің шешімін беретінін көреміз.

Сонымен, мынадай теоремалар дәлелденді.

Теорема 4. *Цилиндр бетінде берілген* (61)-(61^0)-(63*) *бастапқы есебінің жалғыз шешімі* (70^0) *өрнекпен беріледі.*

Шешімнің жалғыздығы қарсы жору әдісімен дәлелденді.

3 және 4 теоремаларды біріктіретін келесі 5 теорема мына түрде беріледі.

Теорема 5. *Цилиндрлік бетте берліген* (61)-(61^0) *бастапқы есебінің жалғыз шешімі* (70) *түрде өрнектеледі.*

Бұл теорема бір жағынан жалпы теорема, екінші жағынан 3 және 4 теореманың салдары.

Зерттеудің зор жетістігі – қос операторлы сызықты жүйелердің бастапқы есептерінің шешімдерін бір операторлы жүйелер шешімдерін зерттеу схемасы түріне келтіретін жаңа әдісін жасақталуы екеніне көңіл бөлеміз.

Қорытынды

Бұл жұмыста шешімнің жалғыздығы қарсы жору әдісімен дәлелденді. Зерттеудің зор жетістігі – қос операторлы сызықты жүйелердің бастапқы есептерінің шешімдерін бір операторлы жүйелер шешімдерін зерттеу схемасы түріне келтірілді және жаңа әдісін жасақталуы екеніне көңіл бөлінді.

Алғыс. Зерттеу жұмысы Қазақстан Республикасының Ғылым және жоғары білім министрлігінің қаржылай қолдауымен орындалды, грант нөмірі АР 19676629**.**

Әдебиеттер тізімі

1. Zhumagaziyev A.Kh., Sartabanov Zh.A., Sultanaev Ya.T. On a new method for investigation of multiperiodic solutions of quasilinear strictly hyperbolic system // Azerbaijan Journal of Mathematics, (2022), Vol. 12, №1, P. 32-48. (WoS Q2) WOS:000824351800003.

2. Умбетжанов Д.У., Почти периодические решения эволюционных уравнений, Алма-Ата: Наука, (1990), 184 с.

3. Сартабанов Ж.А. Периодичность характеристик оператора дифференцирования по диагонали// Вестник КазНПУ им. Абая, серия «Физико-математические науки». -2023, - Т.82. - №2. - С. 40-53. 2 вместо 3

4. Харасахал В.Х., Почтипериодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений, Алма-Ата: Наука, (1970),-200

5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 560 с.

6. Матросов, В.Л. Дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными: Учебник для студентов вузов / В.Л. Матросов, Р.М. оглы Асланов, М.В. Топунов. - М.: ВЛАДОС, 2011. - 376 с.

References

1. Zhumagaziyev A.Kh., Sartabanov Zh.A., Sultanaev Ya.T. On a new method for investigation of multiperiodic solutions of quasilinear strictly hyperbolic system // Azerbaijan Journal of Mathematics, (2022), Vol. 12, №1, P. 32-48. (WoS Q2) WOS:000824351800003.

2. Umbetzhanov D.U., Pochti periodicheskie resheniya evolyucionnyh uravnenij, Alma-Ata: Nauka, (1990), 184 s.

3. Sartabanov ZH.A. Periodichnost' harakteristik operatora differencirovaniya po diagonali// Vestnik KazNPU im. Abaya, seriya «Fiziko-matematicheskie nauki». -2023, - T.82. - №2. - S. 40-53. 2 vmesto 3

4. Harasahal V.H., Pochtiperiodicheskie resheniya obyknovennyh differencial'nyh uravnenij, Alma-Ata: Nauka, (1970),-200

5. Gantmaher F.R. Teoriya matric. – M.: FIZMATLIT, 2010. – 560 s.

6. Matrosov, V.L. Differencial'nye uravneniya i uravneniya s chastnymi proizvodnymi: Uchebnik dlya studentov vuzov / V.L. Matrosov, R.M. ogly Aslanov, M.V. Topunov. - M.: VLADOS, 2011. - 376 c.

МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

САРТАБАНОВ Ж.А., ЖҰМАҒАЗИЕВ Ә.Х., ХАМИМОВА З.Қ.*

Сартабанов Жайшылық Алмағанбетович – Доктор физико-математических наук, профессор, Актюбинский региональный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан
E-mail: sartabanov42@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-2601-2678
Жұмағазиев Әміре Халиұлы – PhD, Актюбинский региональный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан

E-mail: azhumagaziyev@zhubanov.edu.kz, https://orcid.org/0000-0002-6007-3311
***Хамимова Зарина Құбашқызы –** Магистрант, Актюбинский региональный университет им. К.Жубанова, Актобе, Казахстан
E-mail: hamimova.zarina@mail.ru, https://orcid.org/0009-0007-3871-3275

Аннотация. В данной статье рассматривается линейная система неоднородных уравнений с оператором дифференцирования скалярного аргумента. Исследованы задачи Коши для однородных и неоднородных систем уравнений. В соответствии установлены свойства винтовых харктеристик и начальных характеристических интегралов. Разработан новый метод исследования систем с двумя операторами дифференцирования на основе перехода от скалярного аргумента к векторному аргументу. Найдена аналитическая форма единственного решения начальной задачи для системы с двумя операторами дифференцирования в векторно-матричной форме. Получены интегральные представления единственного решения системы уравнений с оператором дифференцирования в векторной форме заданной на цилиндрической поверхности, в случаях тривиального начального условия и периодического начального условия. В результате исследования разработан новый метод исследования начальных задач для линейных однородных и неоднородных систем с двумя операторами дифференцирования на основе перехода к системе с одним оператором дифференцирования, исходя из которого приведена схема исследования таких систем.

В статье были использованы результаты и методы научного проекта «Метод периодических характеристик в исследовании колебаний в системах с оператором дифференцирования по диагонали».

Ключевые слова: оператор дифференцирования, начальные условия, единственность решения, периодичность, винтовые характеристики, линейная система, матрица.

METHOD FOR SOLVING LINEAR MATRIX DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS WITH DIFFERENTIATION OPERATOR

SARTABANOV ZH.A., ZHUMAGAZIEV A.KH., KHAMIMOVA Z.K.*

Sartabanov Zhaishylykh Almaghanbetovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Aktobe Regional University named after K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan.
E-mail: sartabanov42@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-2601-2678
Zhumagaziev Amire Khaliuly – PhD, Aktobe Regional University named after K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan.
E-mail: azhumagaziyev@zhubanov.edu.kz, https://orcid.org/0000-0002-6007-3311
***Khammimova Zarina Kubashkyzy** – Master's student, Aktobe Regional University named after K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan.
E-mail: hamimova.zarina@mail.ru, https://orcid.org/0009-0007-3871-3275

Abstract. This article discusses a linear system of inhomogeneous equations with a differentiation operator for a scalar argument. Cauchy problems for both homogeneous and inhomogeneous systems of equations are studied. The properties of helical characteristics and initial characteristic integrals are established. A new method for studying systems with two differentiation operators is developed based on the transition from a scalar argument to a vector argument. The analytical form of the unique solution to the initial problem for a system with two differentiation operators in a vector-matrix form is found. Integral representations of the unique solution to a system of equations with a differentiation operator in vector form, defined on a cylindrical surface, are obtained for the cases of trivial and periodic initial conditions. As a result of the study, a new method for solving initial value problems for linear homogeneous and inhomogeneous systems with two differentiation operators is developed, based on the transition to a system with one differentiation operator, from which a scheme for studying such systems is provided. The article uses the results and methods of the scientific project "Method of periodic characteristics in the study of oscillations in systems with a diagonal differentiation operator."

Key words: differentiation operator, initial conditions, uniqueness of the solution, periodicity, helical characteristics, linear system, matrix.