ҒТАХР 27.33.19
ӘОЖ 517.95 **DOI 10.70239/arsu.2024.t78.n4.01**

ТІК ДӨҢГЕЛЕК ЦИЛИНДР БЕТІНДЕ ВИНТ БОЙЫНДА ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ОПЕРАТОРЛЫ ВОЛЬТЕРРА СЫЗЫҚТЫҚ ИНТЕГРАЛДЫ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН БАСТАПҚЫ ЕСЕП

САРТАБАНОВ Ж.А.[1], АЙТЕНОВА Г.М.[2], ҚҰРМАНҒАЛИЕВ О.А.[1*]

Сартабанов Жайшылық Алмағанбетұлы[1] — Физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан
E-mail: sartabanov42@mail.ru; https://orcid.org/0000-0003-2601-2678
Айтенова Гүлсезім Муратовна[2] — Философия докторы PhD, М.Өтемісов атындағы Батыс Қазақстан университеті, Орал қ., Қазақстан
E-mail: gulsezim-88@mail.ru; https://orcid.org/0000-0002-4572-8252
[*]Құрманғалиев Орынбек Ақылбекұлы[1] — Магистрант, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан
E-mail: orynbek.kurmangaliev@mail.ru; https://orcid.org/0009-0004-0589-4055

Аңдатпа. Бұл жұмыста тік дөңгелек цилиндр бетінде дербес туындылы операторлы сызықты интегралды-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бастапқы есептер зерттеледі. Негізгі назар Вольтерра типіндегі осындай интегралды-дифференциалдық жүйелердің шешімдерінің бар болуын, жалғыздығын және олардың қасиеттерін дәлелдеуге бағытталған. Мұндай есептер физикалық, биологиялық және басқа эредитарлық құбылыстарын математикалық модельдерінде кеңінен кездеседі.

Зерттеуде сызықты (θ,ω)-периодты теңдеулер жүйесі қарастырылады. Бұл жүйелердің бастапқы шарттарын қанағаттандыратын жалғыз шешімінің бар екендігі жүйенің шешуші оператор көмегімен зерттелген. Шешімдер t бойынша ω-периодты функциялар класында зерттелген.

Жұмыстың негізгі нәтижесі ретінде бастапқы шарттарды қанағаттандыратын шешімнің интегралдық өрнектері ұсынылады. Сонымен қатар, шешуші операторлардың қасиеттерін пайдалана отырып, жүйенің шешімдерінің бар және жалғыз болу шарттары анықталған. Алынған нәтижелер теориялық тұрғыда маңызды. Зерттеу әдістері бұдан басқа да интегралды-дифференциалдық теңдеулер жүйелері қолданылатын есептерді тиімді шешуге мүмкіндік береді. Сонымен қатар, әдістердің жалпыға ортақ қасиеттері мен оларды түрлі физикалық және инженерлік есептерге бейімдеу мүмкіндіктері көрсетілген. Жұмыстың нәтижелері интегралды-дифференциалдық теңдеулер теориясын дамытуда маңызды рөл атқарады және олардың сандық шешімдерін табуға арналған тиімді алгоритмдер жасауға негіз болады.

Түйін сөздер: интегралды-дифференциалдық теңдеулер, Вольтерра жүйесі, шешуші оператор, периодтар, бастапқы шарт, шешімнің бар болуы, шешімнің жалғыздығы.

Кіріспе

Қарастырылып отырған жүйе тұқым қуалаушылық немесе мұрагерлік қасиеттермен байланысты биологиялық құбылыстардың математикалық модельдері болып келетін теңдеулер болып табылады. Мұндай құбылыстардың қазіргі күйі олардың ұзақтығы ε-ге тең өткен күйлерінен тәуелді болып келеді. Осыған байланысты жүйеде интегралдық операторлы мүше еніп отыр. Жүйеге дифференциалдау операторы жетекшілік етуде. Ондай операторлы жүйені әртүрлі көпбейнелік бойында қарастыруға болады. Көпбейнелік қойылған есепті зерттеуге ыңғайлы, әрі оператордың анықталу облысының тарылмауын қамтамасыз етуі керек.

Қолданыста құбылыстардың қайталанбалы болуы маңызды. Демек, құбылыстар периодты немесе толқынды болуы жиі кездеседі. Сондықтан да, қарастырып отыруға жүйеміз 1) әрі эредитарлы, периодты $\varepsilon > 0$ саны, 2) әрі көп тәуелсіз айнымалы, демек, тұтас ортадағы құбылыстар (дыбыстық, оптикалық, электр-магниттік) сипатталған және 3) толқынды құбылыстарды сипаттайды.

Баспаға ұсынылып отырған жұмыста осындай жүйені жазықтықта емес,одан кең цилиндрлік бетте зерттеудің әдісін қалыптастыру мәселесі біртектес және біртектес болмаған жағдайдағы жүйелер үшін қойылып, шешімдердің бары, жалғыздығы және құру жолдары беріліп отыр. Бұл зерттеу [1] әдісімен жазықтық жағдайында [2] еңбегінде жүргізілген. Мұнда зерттеу тік дөңгелек цилиндрлік бетке [3,4] жалпыланып отыр. Сондай-ақ [5] жұмыстарда периодты шешімдер зерттелген. Ал [6] мақалада электротехникада интегралды-дифференциалдық теңдеулер әдісі кеңінен қолданылады.

Зерттеу әдісі және нәтижелер

1. Мәселенің қойылуы

Сызықты (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты (uvw) кеңістігіндегі $Ц$ цилиндрі бетінде анықталған

$$D_e x(\tau,t) = A(\tau,t)x(\tau,t) + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} K(\tau,t,\xi,\beta(\xi,\tau,t))x(\xi,\beta(\xi,\tau,t))d\xi + f(\tau,t),$$

$$D_e = \frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial t}, \quad (\tau,t)\in R\times S_\theta = Ц, \tag{1}$$

$$Ou = R = (-\infty,+\infty), \; S_\theta: \; \vartheta^2 + (w-r)^2 = r^2, \; 2\pi r = \theta$$

интегралды-дифференциалдық теңдеуі берілсін. Мұндағы $Ц$ цилиндрі декарттық uvw кеңістіктің $O(0,0,0)$ бас нүктесімен жанасқан ϑw жазықтығындағы ұзындығы θ болатын S_θ шеңбері бойымен u осін бойлай орналасқанына назар аударамыз. Белгісіз $x = x(\tau,t)$ скалярлық немесе векторлық функция. Периодтар өзара өлшемдес емес деп есептелінеді, яки $\theta/\omega \notin Q$ -рационал сандар жиыны.

Енді (1) жүйенің өзімен жақын таныссақ, D_e дифференциалдау операторы

$$dt = d\tau, \quad (\tau,t)\in Ц \tag{2}$$

жәй дифференциалдық теңдеуімен сипатталады, ал

$$t = \beta(\tau,\xi,\eta), \quad (\tau,t)\in Ц \tag{3}$$

$Ц$ цилиндрі бетінде (2) теңдеуімен анықталған, $(\xi,\eta)\in Ц$ нүктесі арқылы өткен D операторының сипаттауыштары. Демек,

$$\eta = \beta(\xi,\tau,t), \quad (\tau,t)\in Ц \tag{4}$$

(2) теңдеудің немесе D операторының алғашқы (бірінші) сипаттауыш интегралы деп аталады және ол

$$D\beta(\xi,\tau,t) = 0, \quad (\tau,t)\in Ц \tag{5}$$

қасиетке бағынады. Характеристикалардың басқа қасиеттеріне кейін тоқталамыз.

Берілген (1) интегралды-дифференциалдық теңдеудің $K(\tau,t,\xi,\eta)$ ядросы осы (4) алғашқы интегралдан тәуелді екендігіне назар аударамыз.

Жүйенің $A = A(\tau,t)$ матицасы, $K = K(\tau,t,\xi,\eta)$ ядросы және $f(\tau,t)$ векторлық функциясының

$$A(\tau+\theta,t+\omega) = A(\tau,t)\in C^{(0,1)}_{\tau,t}(R\times S_\theta), \tag{1_1}$$

$$K(\tau+\theta,t+\omega,\xi,\eta) = K(\tau,t,\xi+\theta,\eta+\omega) = K(\tau,t,\xi,\eta)\in C^{(0,1,0,1)}_{\tau,t,\xi,\eta}(R\times S_\theta\times R\times S_\theta), \tag{1_2}$$

$$f(\tau+\theta,t+\omega) = f(\tau,t)\in C^{(0,1)}_{\tau,t}(R\times S_\theta) \tag{1_3}$$

көппериодтылық және тегістік қасиеттері бар дейік.

Осы (1_1)-(1_3) шарттарын қанағаттандыратын (1) жүйе үшін

$$x\big|_{\tau=\xi} = u(t) = u(t+\omega)\in C^{(1)}_t(S_\theta) \tag{1_0}$$

бастапқы шартын қанағаттандыратын $x = x(\tau,t)$ шешімінің бары және оның жалғыздығы мәселесін зерттеуді мақсат етіп қоямыз.

Бұл мәселені шешуді алдымен біртектес матрицалдық теңдеуі

$$DW(\tau,t) = A(\tau,t)W(\tau,t) + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} K(\tau,t,\xi,\beta(\xi,\tau,t))W(\xi,\beta(\xi,\tau,t))d\xi \tag{1^*}$$

үшін E бірлік матрицалы

$$W\big|_{\tau=\xi} = E \qquad (1^0)$$

шартын қанағаттандыратын шешуші оператор $W = W(\tau,t)$ шешімін табуды алға қоямыз.

Қойылған екі мәселе де (2)–(5) өрнектермен сипатталған D операторының (2)–(3) сипаттауыштарымен байланысты болғандықтан, оның құрлысы мен қасиеттеріне толық тоқталу керек екенін көреміз.

2. Винттік сипаттауыштар

Алдымен $Ц$ цилиндрі бетінде өзгеретін (τ,t) нүктесінің координаттары τ мен t-ның геометриялық мағыналарына тоқталайық.

$Ц$ цилиндрі $Ц = R\times S_\theta$ сан осі мен шеңбердің декарттық көбейтіндісінен тұратындықтан, оның бетіндегі (τ,t) нүктесінің координаттары $\tau\in R$ және $t\in S_\theta$ шартын қанағаттандырады.

Ендеше, τ -түзулік кесіндіні анықтайды, ал t -шеңберлік доға ұзындығын береді. Бұл екі шама (2) теңдеумен байланысты, өзгеру жылдамдықтары бірдей. Физикалық тұрғыдан τ -уақыттылық айнымалы деуге лайық. Ендеше, t оның дөңгелек доғалық бейнесі. Олай болса, қазақша «доға» сөзін латын әрпімен қысқарта жазып,

$$t = dog\tau,\ \tau\in R,\ t\in S_\theta \qquad (6_0)$$

түрде бейнелеуді қабылдаймыз. Осылайша анықталған (τ,t) нүктесінің бастауы $(\xi,\eta)\in R\times S_\theta = Ц$ болғандықтан (6_0) өрнектен

$$t = \eta + dog(\tau-\xi),\ (\tau,t)\in R\times S_\theta = Ц \qquad (6)$$

теңдігін аламыз. Демек, $\beta(\tau,\xi,\eta)$ сипаттауышын (6) теңдікке сәйкес

$$\beta(\tau,\xi,\eta) = \eta + dog(\tau-\xi) \qquad (7)$$

өрнегімен анықтаймыз, әрі ол (2) теңдеудің шешімі болғандықтан

$$\frac{d\beta(\tau,\xi,\eta)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}dog(\tau-\xi) = 1,\quad \tau\in R \qquad (7_1)$$

тегістік қасиетіне бағынады,

$$dog(\tau-\xi) = dog\tau - dog\xi,\quad \tau\in R,\quad \xi\in R \qquad (7_2)$$

сызықтық сипатта болады және

$$dog(\tau+\theta) = dog\tau,\quad \tau\in R, \qquad (7_3)$$

$$dog(\tau+\omega) = dog\tau + dog\omega \qquad (7_4)$$

θ периодты қайталанбалық, әрі ω ығыспалық кейіпте болады.

Шеңбердің доғалығына кері функция түзулік кесінді екені (6_0) өрнегінен белгілі. Ендеше, Z -бүтін сандар жиыны арқылы

$$\tau = kest + j\theta = Kest,\quad j\in Z \qquad (8)$$

кері функция ұғымын енгізуге болады. $Kest$ функциясы шеңбердің доғасы ұзындығына түзудің кесіндісін сәйкес қоюды анықтайды. Осыдан $kest$ функциясы $0\le kest,<\theta$ шартын қанағаттандыратын $Kest$ функциясына бос мәні екенін көрсетеді.

Доғалардың айырымының ұзындығы доғалық ұзындықтардың айырымына тең болатынынан (7_2) қасиеті шығады. Шеңбердің ұзындығы θ екендігінен периодтылық (7_3) қасиетін аламыз. Ал, θ/ω иррационал сандар болғандықтан (7_4) өрнегін жазуға мәжбүрміз.

Осы (7), (7_1)–(7_4) қасиеттерінен (3) сипаттаушының, яғни (4) сипаттауыш алғашқы интегралдың

$$\beta(\xi+\theta,\tau,t) = \beta(\xi,\tau+\theta,t) = \beta(\xi,\tau,t), \qquad (9)$$

$$\beta(\xi,\tau,t+\omega) = \beta(\xi,\tau,t) + \omega \qquad (10)$$

периодтылық және ығыспалық қасиеттерін аламыз. Сондай-ақ,

$$\beta(\xi,\sigma,\beta(\sigma,\tau,t)) = \beta(\xi,\tau,t) \qquad (11)$$

группалық қасиеті де бары белгілі.

Теорема 1. *Дифференциалдау D операторының (4) сипаттауыш алғашқы интегралы $Ц$ цилиндрлік бетте (5) винт бойында тұрақтылық және (9) мен (10) θ-периодтылық пен ω-ығыспалық қасиеттерге бағынады. Сондай-ақ, (11) группалық қасиеті де бар.*

Бұл теорема [2] еңбекте де бұрын дәлелденгенін атап өтеміз.

3. Шешуші оператор

Жоғарыда келтірілген [2] жұмыста 1 теорема негізінде

$$Dx(\tau,t)\Big|_{t=\beta(\tau,\xi,\eta)} = \frac{d}{d\tau}x(\tau,\beta(\tau,\xi,\eta)) \tag{12}$$

түріндегі D операторынан $\dfrac{d}{d\tau}$ операторына көшу белгілі екені негізделген.

Ендеше σ шамасы ξ мен τ арасында өзгереді деп, демек $\xi \xrightarrow{\sigma} \tau$ белгілеуін қабылдап, (1^*) жүйесінде (τ,t) векторын $(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))$ вектор-функциясына ауыстырып, $x(\tau,t)$ үзіліссіз дифференциалданады деп, оның орнына, (12) теңдікті ескеріп,

$$\frac{d}{d\sigma}W(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t)) = A(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))W(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t)) +$$
$$+\int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma} K(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t),s,\beta(s,\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))W(s,\beta(s,\sigma,\beta(\sigma,\tau,t)))ds \quad \xi \xrightarrow{\sigma} \tau \tag{13}$$

түрінде жай дифференциалдық теңдеуін аламыз. Егер (11) топтық қасиетті еске алсақ, онда (13) теңдеу

$$\frac{d}{d\sigma}W(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t)) = A(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))W(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t)) +$$
$$+\int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma} K(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t),s,\beta(s,\tau,t))W(s,\beta(s,\tau,t))ds, \qquad \xi \xrightarrow{\sigma} \tau \tag{14}$$

интегралдық теңдеу түріне түседі. Осы (14) теңдеуден оған эквивалентті

$$\int_{\xi}^{\tau} \frac{d}{d\sigma}W(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))d\sigma = \int_{\xi}^{\tau}[A(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))W(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t)) +$$
$$+\int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma} K(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t),s,\beta(s,\tau,t))W(s,\beta(s,\tau,t))ds]d\sigma, \tag{15}$$
$$W(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))\Big|_{\sigma=\xi} = E$$

интегралдық теңдеу аламыз. Бұл (15) теңдеудің сол жағын интегралдау арқылы, $\beta(\tau,\tau,t)=t$ екенін ескеріп,

$$W(\tau,t) = E + \int_{\xi}^{\tau}[A(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))W(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t)) +$$
$$+\int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma} K(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t),s,\beta(s,\tau,t))W(s,\beta(s,\tau,t))ds]d\sigma, \tag{16}$$

интегралдық теңдеуін аламыз. Осы (16) теңдеуді біртіндеп жуықтау тәсілін қолданып шешуге тырысамыз. Ол үшін (15) матрицалық теңдеудің (τ,t) бойынша 1 теорема негізінде, (9), (10), (1_1) және (1_2) қасиеттерге сүйеніп, $W(\tau,t)$ матрицалық шешімнің жуықтаулары t бойынша ω -периодты болатындығын ескереміз. Демек, $W(\tau,t)$ жуықтауларын анықтауда

$$\| W^{(k)} \|_{|\tau-\xi|} = \sup_{t\in S_\theta} |W(\tau,t)|$$

нормасын пайдаланып бағамдаймыз және мұнда $W^{(k)}(\tau,t) = [w_{ij}^{(k)} : (\tau,t)]$ матриц метрикасын

$$|W^{(k)}(\tau,t)| = \sum_j |w_{ij}^{(k)}(\tau,t)|$$

формуласымен анықтаймыз.

Ендеше, (τ,t) бойынша (θ,ω)-периодты жағдайда $W(\tau,t)$ матрицасының нормасын

$$\|W(\tau,t)\| = \sup_{(\tau,t)\in R\times S_\theta} |W(\tau,t)| \qquad (17)$$

өрнегімен енгіземіз.

Сонымен (16) матрицалық теңдеуді E -бірлік матрицасы арқылы

$$W^{(0)} = E, \quad W^{(k)}(\tau,t) = E + \int_\xi^\tau [A(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))W^{(k-1)}(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t)) +$$

$$+ \int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma} K(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t),s,\beta(s,\tau,t))W^{(k-1)}(s,\beta(s,\tau,t))ds]d\sigma, \quad (k=1,2,...) \qquad (18)$$

жуықтауларын анықтаймыз.

Мұнда $A(\tau,t)$, $K(\tau,t,\xi,\eta)$ және E матрицаларын жеке жеке бағамдап, $\|A\|$, $\|K\|$, $\|E\|$ шамаларын (17) формулаға сәйкес анықтап, $c = \|A\|\,\|K\|$ белгілеуін енгіземіз.

Демеке, $\|W^{(0)}\| = \|E\| = 1$,

$$\|W^{(1)}\|_{|\tau-\xi|} \le 1 + \left|\int_\xi^\tau (\|A\| + \varepsilon\|K\|)\|W^{(0)}\|d\sigma\right| \le 1 + c|\tau-\xi|,$$

$$\|W^{(2)}\|_{|\tau-\xi|} \le 1 + \left|\int_\xi^\tau (\|A\| + \varepsilon\|K\|)\|W^{(1)}\|_{|\sigma-\xi|}d\sigma\right| \le 1 + \left|\int_\xi^\tau c(1+c)|\sigma-\xi|d\sigma\right| \le$$

$$\le 1 + \frac{c|\tau-\xi|}{1!} + \frac{c^2|\tau-\xi|^2}{2!},$$

....

$$\|W^{(k)}\|_{|\tau-\xi|} \le 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{c^j|\tau-\xi|^j}{j!} \quad (k=1,2...)$$

....

бағамдауларын алдым. Олай болса

$$\|W^{(k)}\|_{|\tau-\xi|} \le e^{c|\tau-\xi|} \qquad (19)$$

бағамдауына бағынады. Егер $|\tau-\xi| \le \Delta$ болса, онда жуықтаулар $\|W^{(k)}\|_\Delta \le e^{c\Delta}$, $(k=0,1,2,...)$ теңсіздігін қанағаттандырады.

Одан әрі тетелес екі жуықтаудың айырмасын бағалаймыз.

Осы мақсатпен (18) жуықтаулардан мына бағалауларды аламыз:

$$|W^{(1)} - W^{(0)}|_{|\tau-\xi|} \le \left|\int_\xi^\tau [\|A\| + \varepsilon\|K\|]\|W^{(0)}\|d\sigma\right| \le c|\tau-\xi|,$$

$$\left\|W^{(1)} - W^{(0)}\right\|_\Delta = c\Delta;$$

$$\left|W^{(2)} - W^{(1)}\right|_{|\tau-\xi|} \le \left|\int_\xi^\tau \left[\|A\|\cdot\left|W^{(1)} - W^{(0)}\right|_{|\sigma-\xi|} + \int_{\sigma-\xi}^{\sigma}\|K\|\cdot\left|W^{(1)} - W^{(0)}\right|_{|s-\xi|}ds\right]d\sigma\right| \le$$

$$\le \left|\int_\xi^\tau \left[\|A\|\cdot c|\sigma-\xi| + c\|K\|\cdot\int_{\sigma-\xi}^{\sigma}|s-\xi|ds\right]ds\right|.$$

Енді ішкі интегралды есептеп, $\sigma \ge \xi$ және $\sigma \ge s$ екенін ескеріп, бағаласақ, σ

$$\int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma}|s-\xi|ds = \int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma}[(\sigma-\xi)-(\sigma-s)]ds = (\sigma-\xi)s\Big|_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma} + \frac{(\sigma-s)^2}{2!}\Big|_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma} = \varepsilon(\sigma-\xi) - \frac{\varepsilon^2}{2!} \le \varepsilon(\sigma-\xi).$$

теңсіздігін орындалатынын көреміз.

Ендеше,

$$\left|W^{(2)}-W^{(1)}\right|_{|\tau-\xi|}\le\left|\int_{\xi}^{\tau}\left[\|A\|c|\sigma-\xi|+c\|K\|\varepsilon|\sigma-\xi|\right]d\sigma\right|=c\left[\|A\|+\varepsilon\|K\|\right]\left|\int_{\xi}^{\tau}|\sigma-\xi|d\sigma\right|=c^2\frac{|\sigma-\xi|^2}{2!}\Big|_{\xi}^{\tau}=$$

$$=c^2\frac{|\tau-\xi|^2}{2!}\le\frac{c^2\Delta^2}{2!}$$

теңсіздігін аламыз. Демек,

$$\left\|W^{(2)}-W^{(1)}\right\|_{\Delta}\le\frac{c^2\Delta^2}{2!}.$$

Егер $\sigma-s\ge 0$ екенін ескерсек, онда

$$\int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma}|s-\xi|^2ds=\int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma}[(\sigma-\xi)-(\sigma-s)]^2ds\le\int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma}(\sigma-\xi)^2ds=(\sigma-\xi)^2s\Big|_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma}=\varepsilon(\sigma-\xi)^2$$

екенін көреміз.

Олай болса,

$$\left|W^{(3)}-W^{(2)}\right|_{|\tau-\xi|}\le\left|\int_{\xi}^{\tau}\left[\|A\|\cdot\frac{c^2|\sigma-\xi|^2}{2!}+\frac{\|K\|}{2!}\int_{\sigma-\xi}^{\sigma}c|s-\xi|^2ds\right]\right|\le\frac{c^2}{2!}\left[\|A\|+c\|K\|\right]\left|\int_{\xi}^{\tau}|\sigma-\xi|^2d\sigma\right|\le\frac{c^3|\tau-\xi|^3}{3!}\le\frac{c^3\Delta^3}{3!}$$

теңсіздігі шығады. Сонымен, $\left\|W^{(3)}-W^{(2)}\right\|_{\Delta}\le\frac{c^3\Delta^3}{3!}$.

Жалпы жағдайда,матматикалық индукция тәсіліне сәйкес, $\left|W^{(k)}-W^{(k-1)}\right|_{|\tau-\xi|}\le\frac{c^k|\tau-\xi|^k}{k!}$ модульдік теңсіздігі орындалса, онда $\sigma\ge s$ екенін ескеріп,

$$\int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma}|s-\xi|^kds=\int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma}[(\sigma-\xi)-(\sigma-s)]^kds=\int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma}|\sigma-\xi|^kds=\varepsilon|\sigma-\xi|^k$$

теңсіздігі негізінде,

$$\left|W^{(k+1)}-W^{(k)}\right|_{|\tau-\xi|}\le\left|\int_{\xi}^{\tau}\left[\|A\|\cdot\frac{c^k|\sigma-\xi|^k}{k!}+\frac{c^k\|K\|}{k!}\int_{\sigma-\varepsilon}^{\sigma}|s-\xi|^kds\right]d\sigma\right|=$$

$$=\frac{c^k}{k!}\left|\int_{\xi}^{\tau}\left[\|A\|+\varepsilon\|K\|\right]|\sigma-\xi|^kd\sigma\right|=\frac{c^{k+1}}{k!}\frac{|\sigma-\xi|^{k+1}}{k+1}\Big|_{\xi}^{\tau}=\frac{c^{k+1}|\tau-\xi|^{k+1}}{(k+1)!}\le\frac{c^{k+1}\Delta^{k+1}}{(k+1)!}$$

метрикалық теңсіздігін, демек,

$$\left\|W^{(k+1)}-W^{(k)}\right\|_{\Delta}\le\frac{c^{k+1}\Delta^{k+1}}{(k+1)!}\tag{20}$$

нормалық бағамдауды аламыз. Бағамдық ереже сақталуда.

Ендеше, индукция тәсілі бойынша, (19), (20) теңсіздігі кез келген $k=1,2,...$ үшін орындалатынын көреміз.

Енді (18) жуықтаулар тізбегі жинақты екенін көрсетелік. Осы мақсатпен $W^{(k)}(\tau,t)$ тізбегін

$$W^{(k)}(\tau,t)=W^{(0)}+\left[W^{(1)}(\tau,t)-W^{(0)}\right]+\left[W^{(2)}(\tau,t)-W^{(1)}(\tau,t)\right]+,,,+\left[W^{(k)}(\tau,t)-W^{(k-1)}(\tau,t)\right]\tag{21}$$

айырымдар қосындысы түрінде жазып, $k\to\infty$ кездегі шекке көшсек, онда бұл (21) тізбектің шегі мына

$$\lim_{k\to\infty}W^{(k)}(\tau,t)=E+\sum_{k=1}^{\infty}\left[W^{(k)}(\tau,t)-W^{(k-1)}(\tau,t)\right]\tag{22}$$

қатардың жинақталығымен байланысты екенін көреміз.

Егер $\left|\tau-\xi\right|\le\Delta$ десек, онда (22) қатардың абсолют жинақтылығы бағытында зерттеу жүргізсек, онда Вейрштрасстың тәсіліне сәйкес, (20) бағамдау негізінде.

$$\|E\|+\sum_{k=1}^{\infty}\left\|W^{(k)}-W^{(k-1)}\right\|_{\Delta}\le 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^k\Delta^k}{k!} \tag{23}$$

сандық қатарының жинақтылығына келтіреміз.

Сандық (23) қатар жинақты, демек, (22) қатар абсолют бірқалыпты жинақты.

Ендеше,

$$\lim_{k\to\infty}W^{(k)}(\tau,t)=W(\tau,t) \tag{24}$$

шегі бар екенін көреміз.

Одан әрі, (18) жуықтау теңдеуінде шекке көшсек, онда (24) шектік матрица (16) интегралдық теңдеуді қанағаттандырып тұрғанын аламыз.

Ал, (16) интегралдық теңдеу (13) жәй интегралды-дифференциалдық теңдеуімен эквивалентті.

Мұндай интегралды-дифференциалдық теңдеудің жалпы теориясы [2]-[3] жұмыстарында қалыптастырылыған. Оның ішінде параметрлер бойынша дифференциалдау, интегралдың шектері бойынша дифференциалдау теоремалары да қамтылған. Шешімнің жалғыздығы да дәлелденген.

Ендеше, (13) және (16) теңдеулердің (τ,t) бойынша дифференциалданатынын ескеріп, (24) матрицаның да (τ,t) бойынша дифференциалданатынын көреміз, әрі оның t бойынша ω -периодты екенін аламыз.

Сонымен, $W(\tau,t)$ матрицасы мынадай қасиетті

$$\begin{gathered}
DW(\tau,t)=A(\tau,t)W(\tau,t)+\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau}K(\tau,t,s,\beta(s,\tau,t))W(s,\beta(s,\tau,t))ds,\\
W(\tau,t)\big|_{\tau=\xi}=W(\xi,t)=E,\\
W(\tau,t+\omega)=W(\tau,t)\in C_{\tau,t}^{(1,1)}(R\times S_\theta),
\end{gathered} \tag{25}$$

операторлық шешім екенін көреміз. Бұл шешімді (1) жүйенің шешуші операторы деп атайды. Оны матрица арқылы өрнектеу оңай шаруа емес. Мұндағы ξ және Δ параметрлік мағынада қатысқан. Сондықтан, ξ сан осінің кезкелген мәні, ал Δ кезкелген (үлкен) мән қабылдай алады. Демек, шешуші оператор да кезкелген $\tau\in R$ үшін анықталған.

Теорема 2. *Цилиндрлік Ц бетте* (1_1)*–*(1_2) *шарттары орындалған (1) жүйенің (25) қасиетті жалғыз ғана* $W(\tau,t)$ *шешуші операторы бар.*

4. Біртектес сызықты интегралды-дифференциалдық теңдеу үшін бастапқы есептің шешімі.

Енді (1_1)–(1_2) шарттары орындалған, бірақ, бос мүшесі $f=0$ болған жағдайдағы (1) теңдеудің, демек,

$$Dx=A(\tau,t)x(\tau,t)+\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau}K(\tau,t,s,\beta(s,\tau,t))ds, \tag{26}$$

теңдеуінің (1_0) шартын қанағаттандыратын шешімін табу мәселесін қояйық.

Теорема 3. *Егер* (1_1)*–*(1_2) *шарттары орындалса, онда (26) теңдеудің* (1_0) *бастапқы шартын қанағаттандыратын жалғыз шешімі болады және ол шешуші* $W(\tau,t)$ *операторы арқылы*

$$x(\tau,t)=W(\tau,t)u(\beta(\xi,\tau,t)),\quad (\tau,t)\in Ц \tag{27}$$

түрінде анықталып, t *бойынша* ω*-периодты болады:*

$$x(\tau,t+\omega)=x(\tau,t). \tag{28}$$

Дәлелдеуі. Алдымен, (1_1)–(1_2) шарттарынан (25) қасиетті $W(\tau,t)$ шешуші оператордың барына назар аударамыз. Сосын $u(\eta)$ бастапқы функция үзіліссіз дифференциалданатындығы және ω-периодты екендігі (1_0) шартында келтірілгендігін ескереміз. Олай болса, D операторын қолданып, (27) өрнектен, (5), (11), (25) қасиеттерді ескеріп,

$$Dx(\tau,t) = DW(\tau,t)\cdot u(\beta(\xi,\tau,t)) + W(\tau,t)\cdot Du(\beta(\xi,\tau,t) =$$

$$= \left[A(\tau,t)W(\tau,t) + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} K(\tau,t,s,\beta(s,\tau,t))W(s,\beta(s,\tau,t))ds\right]u(\beta(\xi,\tau,t)) +$$

$$+W(\tau,t)\cdot\frac{\partial u(\beta(\xi,\tau,t))}{\partial\beta}\cdot D\beta(\xi,\tau,t) =$$

$$= A(\tau,t)W(\tau,t)u(\beta(\xi,\tau,t)) + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} K(\tau,t,s,\beta(s,\tau,t))W(s,\beta(s,\tau,t))u(\beta(\xi,s,\beta(s,\tau,t))ds =$$

$$= A(\tau,t)x(\tau,t)\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} K(\tau,t,s,\beta(s,\tau,t))x(s,\beta(s,\tau,t))ds \qquad (29)$$

тепе-теңдігін аламыз.

Осы (29) тепе-теңдіктен (27) өрнектің (26) теңдеудің шешімін анықтайтынын көреміз.

Шешімнің жалғыздығы $W(\tau,t)$ операторы (26) үшін жалғыз екендігінен шығады және әрбір $x(\tau,t)$ шешімі

$$x(\tau,t) = W(\tau,t)x(\xi,\beta(\xi,\tau,t))$$

түрінде өрнектеледі. Егер $x_1(\tau,t) = x_2(\tau,t)$ екі шешім болса, бірақ $x_1(\xi,t) = x_2(\xi,t) = u(t)$ десек, онда

$$x_2(\xi,t) - x_1(\xi,t) = W(\tau,t)\left[x_2(\xi,\beta(\xi,\tau,t)) - x_1(\xi,\beta(\xi,\tau,t))\right]$$

өрнегінен $0 \neq 0$ қайшылығына кездесеміз. Қайшылық шешімнің жалғыздығын дәлелдейді.

Периодтылық (28) тепе-теңдігі (10), (25) және (1_0) қасиеттердің салдары:

$$x(\tau,t+\omega) = W(\tau,t+\omega)u(\beta(\xi,\tau,t+\omega) = W(\tau,t)u(\beta(\xi,\tau,t)+\omega) = W(\tau,t)u(\beta(\xi,\tau,t) = x(\tau,t)$$

Сонымен 3-теорема толық дәлелденді.

Ескерту. Егер $\xi = 0$ болса, онда $W(\tau,t)$ шешуші операторын $W_0(\tau,t)$ деп белгілесек, яғни

$$W(\tau,t)\big|_{\xi=0} = W_0(\tau,t)$$

онда

$$W(\tau,t) = W_0(\tau,t)W_0^{-1}(\xi,\beta(\xi,\tau,t)) \qquad (30)$$

түрлендіруіне келеміз.

Демек, (27) өрнек

$$x(\tau,t) = W_0(\tau,t)W_0^{-1}(\xi,\beta(\xi,\tau,t))u(\beta(\xi,\tau,t)) \qquad (27_0)$$

түрінде жазылар еді.

Жалпы, $W(\tau,t) = W^*(\xi,\tau,t)$ түрінде, операторды ξ-деп тәуелді екенін көрсетіп жазған дұрыс. Біз ықшамдық үшін ξ параметрін жасырын ұстадық. Кей жағдайда (27_0) және (30) бейнелеулерді пайдалану ыңғайлы болып келеді.

5. Біртекті емес сызықты интегралды-дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы есептің шешімдері

Сонымен, (1_1)–(1_3) шарттарын қанағаттандыратын (1) теңдеулер жүйесінің (1_0) бастапқы шартын қанағаттандыратын шешімінің мәселесін талдайық.

Ол үшін ς кезкелген тұрақтысы арқылы дифференциалданатын $u(\eta)$ функциясымен берілген

$$Du(\beta(\varsigma,\tau,t)) = 0, \quad (\tau,t) \in Ц \qquad (*)$$

операторлық тепе-теңдігін алайық. Бұл тепе-теңдікті, басқаша,

$$\frac{du(\beta(\varsigma,\tau,t))}{d\beta}\cdot D\beta(\varsigma,\tau,t)=0,\quad (\tau,t)\in Ц$$

туындылық түрінде де жазуға болады.

Енді $d\beta = d\beta(\varsigma,\tau,t)$ дифференциалына көбейтіп,

$$\frac{du(\beta(\varsigma,\tau,t))}{d\beta}\cdot D\beta(\varsigma,\tau,t)d\beta=0,\quad (\tau,t)\in Ц$$

дифференциалдық формада жазамыз.

Егер (s,σ) нүктесі (ξ,η) мен (τ,t) аралығында, яғни $\xi \xrightarrow{s} \tau \Leftrightarrow \eta \xrightarrow{\sigma} t$ болса, демек s айнымалысы ξ ден τ ға дейін , ал σ айнымалысы η дан t ға дейін өзгерсе, онда

$$t-\tau=\eta-\xi$$

D операторының $Ц$ бойындағы сақталу заңы екенін ескерсек, онда (*) тепе-теңдігін

$$\frac{du(\beta(\varsigma,s,\sigma))}{d\beta}\cdot D\beta(\varsigma,s,\sigma)d\beta(\varsigma,s,\sigma)=0,\quad (s,\sigma)\in Ц$$

өрнегінің (ξ,η) дан (τ,t) ға дейінгі β бойынша интегралы

$$\int_{(\xi,\eta)}^{(\tau,t)}\frac{du(\beta(\varsigma,s,\sigma))}{d\beta}\cdot D\beta(\varsigma,s,\sigma)d\beta(\varsigma,s,\sigma)=u(\beta(\varsigma,s,\sigma))\Big|_{(\xi,\eta)}^{(\tau,t)}=u(\beta(\varsigma,\tau,t))-u(\beta(\varsigma,\xi,\eta))$$

түрінде жазуға болады.

Әдетте анықталған интеграл белгілеулерін қолданғандықтан, $(\xi,\eta)\xrightarrow{(s,\sigma)}(\tau,t)$ орнына сақталу заңы негізінде, $\xi \xrightarrow{s} \tau$ екенін ған көрсетіп, (*) дифференциалдық операторлық өрнегін интегралдық тепе-теңдік түрінде:

$$\int_{\xi}^{\tau} Du(\beta(\varsigma,s,\sigma))d\beta = u(\beta(\varsigma,\tau,t))-u(\beta(\varsigma,\xi,\eta)) \qquad (**)$$

өрнектеуін қабылдауға болады.

Бұдан былай $W_0(\tau,t)$ матрицасы мен $f(\tau,t)$ вектор-функциясы $F(\eta)$ функциясы арқылы, (**) өрнегіне сәйкес,

$$\int_{\xi}^{\tau} W^{-1}(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))f(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))d\sigma=\int_{\xi}^{\tau} DF(\beta(\varsigma,s,\sigma))d\beta \qquad (31)$$

түрінде өрнектелсін деген шарт қоямыз. Бұл жерде интегралдың шектері s-тің шегін көрсетіп тұр. Одан σ айнымалысымен η дан t дейін өзгеретіндігі белгілі. Егер $\xi \le \varsigma \le s' \le \tau$ ретімен өзгеретін қайталамалы

$$\int_{\xi}^{\tau} ds' \int_{\xi}^{s'} F(\beta(\zeta,s,\beta(s,s',\sigma)))ds$$

интеграл түрінде жазылады. Ал σ айнымалысы $\eta \le \sigma \le t$ аралығында қала береді.

Теорема 4. *Егер (1₁)-(1₃) шарттары орындалса, онда*

$$x^*(\xi,\tau,t)=W_0(\tau,t)\int_{\xi}^{\tau} W_0^{-1}(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))f(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))d\sigma \qquad (32)$$

өрнегі (1) теңдеудің

$$x\big|_{\tau=\xi}=0 \qquad (32^0)$$

шартын қанағаттандыратын жалғыз шешімі болып табылады және ол

$$x^*(\tau,t+\omega)=x^*(\tau,t) \qquad (33)$$

t *бойынша* ω*-периодты.*

Дәлелдеуі. Теореманың (1_1)-(1_2) шарттарынан $W_0(\tau,t)$ шешуші операторының барлығы жалғыздығы шығады Демек,

$$DW_0(\tau,t) = A(\tau,t)W_0(\tau,t) + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} K(\tau,t,s,\beta(s,\tau,t))W_0(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))d\sigma \tag{34}$$

Шынын да, (31) өрнек (1) теңдеудің шешімі екеніне көз жеткізейік. D операторын қолданып (31) өрнектен

$$Dx^*(\xi,\tau,t) = \left[A(\tau,t)W_0(\tau,t) + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} K(\tau,t,s,\beta(s,\tau,t))W_0(s,\beta(s,\tau,t))ds\right]\cdot$$

$$\cdot\int_{\xi}^{\tau} W^{-1}(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))f(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))ds + W_0(\tau,t)\int_{\xi}^{\tau} D\left\{W_0^{-1}(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))f(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))\right\}d\sigma +$$

$$+W_0(\tau,t)\cdot W_0^{-1}(\tau,\beta(\tau,\tau,t))f(\tau,\beta(\tau,\tau,t)) \tag{35}$$

тепе-теңдігін аламыз. Осылай $D\beta(s,\tau,t)=0$, $\beta(\tau,\tau,t)=t$ болғандықтан

$$D\left\{W_0^{-1}(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))f(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))\right\} = 0, \tag{36}$$

$$W_0(\tau,t)\cdot W_0^{-1}(\tau,\beta(\tau,\tau,t))f(\tau,\beta(\tau,\tau,t)) = W_0(\tau,t)\cdot W_0^{-1}(\tau,t)f(\tau,t) = f(\tau,t) \tag{37}$$

$$W_0(\tau,t)\int_{\xi}^{\tau} W_0^{-1}(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))f(\sigma,\tau,t)d\sigma = x^*(\tau,t) \tag{38}$$

және (31) шартқа сүйеніп,

$$W_0(s,\beta(s,\tau,t))\int_{\xi}^{\tau} W_0^{-1}(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))f(\sigma,\tau,t)d\sigma = W_0(s,\beta(s,\tau,t))\int_{\xi}^{\tau} DF(\beta(\varsigma,s,\sigma)d\beta =$$

$$= W_0(s,\beta(s,\tau,t))\big[F(\beta(\varsigma,\tau,t)) - F(\beta(\varsigma,\xi,\eta))\big] = W_0(s,\beta(s,\tau,t))\big[F(\beta(\varsigma,s,\beta(s,\tau,t))) - F(\varsigma,\xi,\eta)\big] =$$

$$= W_0(s,\beta(s,\tau,t))\int_{\xi}^{s} W_0^{-1}(\sigma,\beta(\sigma,s,\beta(s,\tau,t)))f(\sigma,\beta(\sigma,s,\beta(s,\tau,t)d\sigma = x^*(\xi,s,\beta(s,\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))) \tag{39}$$

екенін ескерсек, онда (35) теңдіктен (36)–(39) өрнектер арқылы

$$Dx^*(\xi,\tau,t) = A(\tau,t)x^*(\xi,\tau,t) + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} K(\tau,t,s,\beta(s,\tau,t)x^*(\xi,s,\beta(s,\beta(s,\sigma,\beta(\sigma,\tau,t)))ds + f(\tau,t)$$

тепе-теңдігін аламыз. Демек, (32) вектор-функциясы (1) жүйені қанағаттандырады. Бұл жерде (31) шарт шешуші орын алады.

Бұл шешім жалғыз екенін қарсы жору тәсілімен дәлелденеді. Егер мұндай шешімдер екеу десек, онда олардың айырымдары біртектес жүйені қанағаттандырады. Айырымдық шешім нөлдік бастапқы шартты болады. Ондай шешім тек нөлдік шешім болғандықтан, ол екі шешімнің айырымы нөлге тең болады. Демек, айрым бірінші жағынан нөлге тең, екінші жағынан нөлден өзгеше. Қайшылық шешімнің жалғыз екенін көрсетеді.

Егер (10), (1_3) және (25) өрнектердегі ω-периодтылық қасиетті ескерсек, онда

$$x^*(\xi,\tau,t+\omega) = w_0(\tau,t+\omega)\int_{\xi}^{\tau} W_0^{-1}(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t+\omega))f(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t+\omega))d\sigma =$$

$$= w_0(\tau,t)\int_{\xi}^{\tau} W_0^{-1}(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t)+\omega)f(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t)+\omega)d\sigma =$$

$$= w_0(\tau,t)\int_{\xi}^{\tau} W_0^{-1}(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))f(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))d\sigma = x^*(\xi,\tau,t)$$

тепе-теңдігін аламыз.

4-теорема толық дәлелденді.

Енді жалпы шешім туралы теоремаға келейік.

Сызықты жүйелерге тән белгілі теорема бар. Ол біздің жүйе үшін былай баяндалған.

Теорема 5. *Егер* (1_0)*–*(1_3) *және (31) шарттар орындалса, онда (1)–*(1_0) *жүйенің жалпы шешімі біртектес жүйенің (27) жалпы шешімі мен біртектес емес (1) жүйенің (32) дербес шешімінің қосындысынан тұратын*

$$x(\xi,\tau,t) = W_0(\tau,t)W^{-1}(s,\beta(\xi,\tau,t))u(\beta(\xi,\tau,t)) + W_0(\tau,t)\int_{\xi}^{\tau} W_0^{-1}(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))f(\sigma,\beta(\sigma,\tau,t))d\sigma \quad (40)$$

өрнектен анықталады және ол t *бойынша* ω*-периодты болады.*

Дәлелдеу. Шынында да, D операторын қолданып, 3 және 4 теоремалар бойынша (40), (1) жүйені қанағаттандыратынын көреміз.

Егер $\tau = \xi$ десек, онда сол теоремалардан шешім (1_0) шартын өанағаттандыратынын аламыз. Шешімнің t бойынша ω-периодтылығын да әр шешімнің ω-периодтылығынан шығады. Шешімнің жалғыздығы да осы 3-4 теоремалардың салдары.

Демек, теорема толық дәлелденді.

Қорытынды

Жұмыста тік дөңгелек цилиндр бетінде винттік сызық бойында дифференциалдау операторлы ε-эредитарлы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін бастапқы есептердің жалғыз шешімді екендігі дәлелденген.

Зерттеудің әдістері сызықты емес жүйелер үшін де жалпылауға болады.

Мақаланың нәтижелері қарастырылған жүйелер мен тектес дифференциалдық операторлы интегралдық-дифференциалдық жүйелерді цилиндрлік беттерде зерттеуде жалпыланары анық.

Әдебиеттер тізімі

1. Харасахал В. Х. Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1970. – 200 с.

2. Сартабанов Ж. А. Периодичность характеристик оператора дифференцирования по диагонали // Вестник КазНПУ им. Абая, серия «Физико-математические науки». – 2023, – Т. 82. – №2.

3. Sartabanov Zh., Omarova B., Aitenova G., Zhumagaziyev A. Integrating multiperiodic functions along the periodic characteristics of the diagonal differentiation operator. KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series. **4**(120), 52–68 (2023).

4. Sartabanov Zh. A. The method of periodic characteristics of many periodic systems with a diagonal differentiation operator and its application to problems of quasi-periodic systems. Abstracts of the Traditional International April Mathematical Conference in honour of the Day of Science of the Republic of Kazakhstan. 20–21 (2024).

5. Боташев А. И. Периодические решения интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра. – М.: Изд-во МФТИ, 1998. – 87 с.

6. Вайнберг М. М. Интегро-дифференциальные уравнения / М. М. Вайнберг // Итоги науки. Сер. Математический анализ. Теория вероятностей. Регулирование. 1962. – М. : ВИНИТИ, 1964. – С. 5–37. Боташев А. И. Периодические решения интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра. – М.: Изд-во МФТИ, 1998. – 87 с.

References

1. Harasahal V. H. Pochti periodicheskie resheniya obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. – Alma-Ata: Nauka, 1970. – 200 c.

2. Sartabanov ZH. A. Periodichnost' harakteristik operatora differencirovaniya po diagonali // Vestnik KazNPU im. Abaya, seriya «Fiziko-matematicheskie nauki». – 2023, – T. 82. – №2.

3. Sartabanov Zh., Omarova B., Aitenova G., Zhumagaziyev A. Integrating multiperiodic functions along the periodic characteristics of the diagonal differentiation operator. KazNU Bulletin. Mathematics, Mechanics, Computer Science Series. 4 (120), 52–68 (2023).

4. Sartabanov Zh. A. The method of periodic characteristics of many periodic systems with a diagonal differentiation operator and its application to problems of quasi-periodic systems. Abstracts

of the Traditional International April Mathematical Conference in honour of the Day of Science of the Republic of Kazakhstan. 20–21 (2024).

5. Botashev A. I. Periodicheskie resheniya integro-differencial'nyh uravnenij Vol'terra. – M.: Izd-vo MFTI, 1998. – 87 s.

6. Vajnberg M. M. Integro-differencial'nye uravneniya / M. M. Vajnberg // Itogi nauki. Ser. Matematicheskij analiz. Teoriya veroyatnostej. Regulirovanie. 1962. – M. : VINITI, 1964. – S. 5–37. Botashev A. I. Periodicheskie resheniya integro-differencial'nyh uravnenij Vol'terra. – M.: Izd-vo MFTI, 1998. – 87 s.

НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ПО ВИНТУ НА ПОВЕРХНОСТИ ПРЯМОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА.

САРТАБАНОВ Ж. А.[1], АЙТЕНОВА Г. М.[2], ҚҰРМАНҒАЛИЕВ О.А.[1*]

Сартабанов Жайшылық Алмағанбетұлы[1] — Доктор физико-математических наук, профессор, Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан
E-mail: sartabanov42@mail.ru; https://orcid.org/0000-0003-2601-2678
Айтенова Гүлсезім Муратовна[2] — Доктор философии PhD, Западно-Казахстанский университет имени М.Утемисова, г. Уральск, Казахстан
E-mail: gulsezim-88@mail.ru; https://orcid.org/0000-0002-4572-8252
[*]**Құрманғалиев Орынбек Ақылбекұлы[1] —** Магистрант, Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан
E-mail: orynbek.kurmangaliev@mail.ru; https://orcid.org/0009-0004-0589-4055

Аннотация. В данной работе исследуются начальные задачи для системы линейных интегро-дифференциальных уравнений с частными производными оператора на поверхности прямого кругового цилиндра. Основное внимание уделено доказательству существования, единственности и свойств решений таких интегро-дифференциальных систем типа Вольтерра. Подобные задачи широко встречаются в математическом моделировании физических, биологических и других наследственных явлений.

В исследовании рассматривается система линейных (θ,ω)-периодических уравнений. Наличие единственного решения, удовлетворяющего начальным условиям, изучено с помощью разрешающего оператора системы. Решения исследованы в классе ω-периодических функций по переменной t.

Основным результатом работы является предложение интегральных выражений решений, удовлетворяющих начальным условиям. Кроме того, используя свойства разрешающих операторов, определены условия существования и единственности решений системы. Полученные результаты имеют теоретическую значимость. Применённые методы исследования позволяют эффективно решать и другие задачи, связанные с системами интегрально-дифференциальных уравнений. Кроме того, продемонстрированы универсальные свойства методов и их возможности адаптации к различным физическим и инженерным задачам. Результаты работы играют важную роль в развитии теории интегро-дифференциальных уравнений и служат основой для разработки эффективных алгоритмов их численного решения.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, система Вольтерра, разрешающий оператор, периодичность, начальные условия, существование решения, единственность решения.

INITIAL VALUE PROBLEM FOR LINEAR VOLTERRA INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH A DIFFERENTIAL OPERATOR ALONG THE HELIX ON THE SURFACE OF A RIGHT CIRCULAR CYLINDER.

SARTABANOV ZH.A.[1], AITENOVA G.M.[2], KURMANGALIEV O.A.[1*]

Sartabanov Zhaishylyk Almaganbetuly — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan
E-mail: sartabanov42@mail.ru; https://orcid.org/0000-0003-2601-2678
Aitenova Gulsezim Muratovna — Doctor of Philosophy (PhD), M.Utemisov West Kazakhstan University, Uralsk, Kazakhstan
E-mail: gulsezim-88@mail.ru; https://orcid.org/0000-0002-4572-8252

*Kurmangaliev Orynbek Akylbekuly — Master's student, K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan
E-mail: orynbek.kurmangaliev@mail.ru; https://orcid.org/0009-0004-0589-4055

Abstract. This paper research initial value problems for a system of linear integral-differential equations with partial derivative operators on the surface of a right circular cylinder. The main focus is on proving the existence, uniqueness, and properties of solutions for such Volterra-type integral-differential systems. These problems are widely encountered in the mathematical modeling of physical, biological, and other hereditary phenomena.

The research considers a system of linear (θ,ω)-periodic equations. The existence of a unique solution satisfying the initial conditions is analyzed using the system's resolvent operator. The solutions are examined within the class of ω-periodic functions with respect to the variable t.

The main result of the work is the presentation of integral expressions for solutions satisfying the initial conditions. Additionally, by utilizing the properties of resolvent operators, the conditions for the existence and uniqueness of solutions to the system are determined. The results obtained are of theoretical significance. The research methods also enable the effective resolution of other problems involving systems of integral-differential equations. Moreover, the universal properties of the methods and their adaptability to various physical and engineering problems have been demonstrated. The results of the work play a significant role in the development of the theory of integral-differential equations and serve as a basis for creating effective algorithms for their numerical solutions.

Key words: integro-differential equations, Volterra system, resolvent operator, periodicity, initial conditions, existence of solution, uniqueness of solution.