ҒТАХР 27.31.44
ӘОЖ 517.954 **DOI 10.70239/arsu.2024.t77.n3.02**

ЖҮКТЕЛГЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУІ ҮШІН БЕЙЛОКАЛЬДІ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІЛІМДІЛІГІ

АБДИКАЛИКОВА Г.А., ШАКИМОВ Е.Е.*

Абдикаликова Галия Амиргалиевна — Физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан
E-mail: agalliya@mail.ru; https://orcid.org/0000-0001-6280-4168
***Шакимов Ернар Есенұлы —** Магистрант, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан
E-mail: eron1997@mail.ru; https://orcid.org/0009-0001-0000-8729

Аңдатпа. Жүктелген дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бейлокальді шеттік есеп зерттеледі. Мұндай шеттік есептер физикалық, биологиялық, экологиялық және басқа процестердің математикалық, оның ішінде қолданбалы есептердің дифференциалдық моделі түрінде кездеседі. Жүктелген дифференциалдық теңдеулер тұйық популяцияның динамикасын, қатты ортада болатын процестерді және т. б. сипаттайды.

Жүктелген дифференциалдық теңдеулер интегро-дифференциалдық теңдеулердің интегралдық мүшесін ауыстыру кезінде, сондай-ақ интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесінің жуықталған шешімін құру кезінде пайда болады. Жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін бейлокальді шектелген шеттік есептер айтарлықтай қызығушылық тудырады. Жүктелген дифференциалдық теңдеулердің кейбір кластары үшін есептерді зерттеудің конструктивті әдістерін құруға арналған жұмыстардың едәуір саны бар. Белгілі болғандай, әр түрлі әдістермен осындай теңдеулер үшін шеттік есептердің шешімінің бар және жалғыз болуының шарттары алынды.

Екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін бейлокальді шеттік есебінің бір мәнді шешімділігі зерттелді. Жүктелген дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін бейлокальді шеттік есептің және бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу мен байланыстырушы интегралдық қатынас үшін бейлокальді шартты шеттік есептің шешімдерінің эквиваленттілігі тағайындалды.

Қарастырылған шеттік есептің шешімін табу алгоритмі ұсынылған.

Түйін сөздер: жүктелген теңдеу, шешілімділік, кең мағынада, бейлокальді, характеристика, алгоритм.

Кіріспе

Математикалық биология, математикалық физика мәселелері, локальді емес процестер мен құбылыстарды математикалық модельдеу теориясы, жады бар үздіксіз орталардың механикасы және фракталдардың физикасы, ығысумен шеттік есептер және серпімді қабықшалар теориясын зерттеу әдістерінде әр түрлі жүктелген теңдеулер қолданылады.

Жүктелген дифференциалдық теңдеуді көптеген авторлар өз еңбектерінде зерттеген. Ізделінді шешімінің $\mathbb{R}^n$ кеңістігінің $\overline{\Omega}$ облысында кем дегенде бір туындысы бар болса, мұндай дифференциалдық теңдеуді жүктелген дифференциалдық теңдеу деп атайды [1].

И.С. Ломов [2] жүктелген дифференциалдық теңдеу анықтамасына қосымша класс ретінде шекаралық шартты дифференциалдық оператор түрінде қосады. A.M.Krall [3] L дифференциалдық шекаралық операторды интервалдағы бекітілген нүктелердегі u белгісіз функциясын өрнектеген. А.Д. Искендеров [4-5] өзінің жұмыстарында жүктелген дифференциалдық теңдеуді ізделінді функция және берілген облыстың бекітілген нүктелердегі оның туындысының мәндерін қамтыған теңдеу деп қарастырған. М.Т. Дженалиев және М.И. Рамазанов [6] жүктелген дифференциалдық теңдеуді «бұзылу» дифференциалдық теңдеуі деп түсіндірген.

Жүктелген дербес туындылы дифференциалдық теңдеуі үшін локальді емес немесе бейлокальді шекаралық шартының шешімділігі тақырыбын зерттеу барысында бейлокальді шекаралық шартының қойлымы туралы В.А. Стеклов [7] біртекті емес қатты стерженнің салқындатуы есебін қарастыра отырып, сызықтық өлшемді денесінің салқындауын дифференциалдық теңдеуінің интегралдауына келтірілетіндігі қарастырған.

Сонымен қатар В.А. Стеклов салқындату мәселелерінің екі класын ажыратады:

- тұйық емес қатты денелер (түзу стержен; тұйық емес қисыққа иілген стержен);

- тұйық қатты денелер (тұтас сақина, тұйық қисыққа иілген стержен).

Дербес туындылы теңдеулердің кейбір кластары үшін бейлокальді шартты шеттік есептердің бірмәнді және қисынды шешілімділігін көптеген авторлар зерттеген, оның ішінде [8-10] атап өтеміз, мұнда бейлокальді шеттік есептердің теориясына шолу және есептер бойынша библиографияны таба аласыз.

Зерттеу әдісі және нәтижелер

Дербес туындылы екінші ретті жүктелген дифференциалдық теңдеуі үшін бейлокальді шеттік есепті $\overline{\Omega}=\{(t,x): 0\le t\le T, t\le x\le t+q\}, T>0, q>0$ облысында қарастырамыз

$$D\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]=A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}+\sum_{i=0}^{m}P_i(t,x)u(t_i,x)+f(t,x),\ (t,x)\epsilon\overline{\Omega},\quad u\epsilon\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$B(x)\frac{\partial u}{\partial x}(0,x)+C(x)\frac{\partial u}{\partial x}(T,T+x)=d(x),\qquad x\in[0,q], \tag{2}$$

$$u|_{x=t}=S(t),\qquad t\in[0,T]. \tag{3}$$

Мұндағы $u(t,x)=col\big(u_1(t,x),u_2(t,x),\dots,\dots,u_n(t,x)\big)$ ізделінді вектор-функция; $D=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}$ – дифференциалдық оператор; $A(t,x)$, $P_i(t,x)$ және $B(x)$, $C(x)$ – $n\times n$ - матрицалар, $i=\overline{0,m}$; $f(t,x)$, $S(t)$, $d(x)$ – вектор-функция.

Айталық (L) шарты орындаласын, егер :

1. $A(t,x)$, $P_i(t,x)$ – $n\times n$ - матрицалар, $i=\overline{0,m}$ және $f(t,x)$ – вектор-функция $\forall t,x$ айнымалылары бойынша $\overline{\Omega}$ облысында үзіліссіз;
2. $B(x)$, $C(x)$ – $n\times n$ - матрицалары және $d(x)$ – вектор-функциясы $[0,q]$ кесіндісінде үзіліссіз;
3. $[0,T]$ кесіндісінде $S(t)$ – вектор-функциясы дифференциалданатын болса.

Келесі кеңістіктерді енгіземіз:

$C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ – үзіліссіз функциялар $u(t,x):\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ кеңістігі, нормасымен $\|u\|=\max\limits_{(t,x)\epsilon\overline{\Omega}}\|u(t,x)\|$;

$C([0,q],\mathbb{R}^n)$ – үзіліссіз функциялар $d(x):[0,q]\to\mathbb{R}^n$ кеңістігі. Осы кеңістіктің нормасы $\|d\|=\max\limits_{x\epsilon[0,q]}\|d(x)\|$;

$C^1([0,T],\mathbb{R}^n)$ – үзіліссіз дифференциалданатын $S(t):[0,T]\to\mathbb{R}^n$ функциялар кеңістігі, нормасымен $\|S\|=\max\limits_{t\epsilon[0,T]}\|S(t)\|$.

Анықтама. t айнымалысы бойынша сәйкесінше $x=\tau+\xi$ характеристикасының бойымен үзіліссіз дифференциалданатын әрбір $u_i(t,x)\epsilon C(\overline{\Omega},R^n), i=\overline{1,n}$ функцияны кең мағынадағы (1)-(3) бейлокальді шеттік есебінің шешімі деп атайды.

Есеп. Дербес туындылы жүктелген дифференциалдық теңдеуі үшін бейлокальді шеттік есептің (1)-(3) кең мағынадағы шешімдерінің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарттарын тағайындау.

Айталық, $u(t,x)$ функциясы (1) теңдеудің шешімі болсын, онда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=v(t,x), \tag{4}$$

алмастыруын енгіземіз. Сонда (1) теңдеу және (2)-(3) бейлокальді шекаралық шарттары бірінші ретті дербес туындылы жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін қойылған бейлокальді шеттік шартты есепке келтіріледі

$$D\vartheta=A(t,x)\vartheta+\sum_{i=0}^{m}P_i(t,x)u(t_i,x)+f(t,x),\ \ v\epsilon\mathbb{R}^n, \tag{5}$$

$$B(x)\vartheta(0,x)+C(x)\vartheta(T,T+x)=d(x),\ x\in[0,q], \tag{6}$$

$$u(t,x)=S(t)+\int_t^x\vartheta(t,\eta)d\eta\,, x\in[0,q], t\in[0,T]. \tag{7}$$

Сонымен, соңғы енгізілген (7) интегралдық қатынас (3) бейлокальді шартты қамтиды.

Анықтама. Кез-келген $f(t,x)\in\mathrm{C}(\bar{\Omega},R^n)$, $d(x)\in\mathrm{C}([0,\omega],R^n)$ үшін $\vartheta(t,x)\in\mathrm{C}(\bar{\Omega},R^n)$

функциясы характеристиканың бойында t айнымалысы бойынша үзліссіз дифференциалданатын жалғыз шешімі болса, мұндай бейлокальді шеттік есебін (5)-(7) кең мағынада бірмәнді шешілімді деп атайды.

Дербес туындылы екінші ретті жүктелген дифференциалдық теңдеуі үшін бейлокальді шеттік есебінің бірінші ретті дербес туындылы жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін қойылған бейлокальді шеттік шартты есебіне эквиваленттілігі мына мағынада:

Егер $u^*(t,x)$ функциясы (1)-(3) есебінің кең мағынадағы шешімі болса, онда $\vartheta^*(t,x) = \frac{\partial u^*(t,x)}{\partial x}$ функциясы (5)-(7) есебінің кең мағынадағы шешімі болады. Керісінше де, егер $\tilde{\vartheta}(t,x)$ функциясы (5)-(7) есебінің кең мағынадағы шешімі болса, онда $\tilde{u}(t,x)$ функциясы (1)-(3) есебінің кең мағынадағы шешімі болады.

Бірінші ретті дербес туындылы жүктелген дифференциалдық теңдеуі үшін қойылған бейлокальді шартты шеттік есебіне (5)-(7) характеристикалық әдісті қолданамыз.

$\overline{\Omega}$ облысы $\overline{\Pi} = \{(\tau,\xi): 0 \le \tau \le T, 0 \le \xi \le q\ \}$, $T > 0, q > 0$ облысына бейнеленеді.

Келесі кеңістіктерді еңгіземіз:

$C(\overline{\Pi}, \mathbb{R}^n)$ – үзіліссіз функциялар $W((\tau,\xi)): \overline{\Pi} \to \mathbb{R}^n$ кеңістігі, нормасымен $\|W\| = \max\limits_{(\tau,\xi)\epsilon\overline{\Pi}} \|W(\tau,\xi)\|$;

$C([0,q], \mathbb{R}^n)$ – үзіліссіз функциялар $\hat{d}(\xi): [0,q] \to \mathbb{R}^n$ кеңістігі. Осы кеңістіктің нормасы $\|\hat{d}\| = \max\limits_{\xi\epsilon[0,q]} \|\hat{d}(\xi)\|$;

$C^1([0,T], \mathbb{R}^n)$ – үзіліссіз дифференциалданатын $\hat{S}(\tau): [0,T] \to \mathbb{R}^n$ функциялар кеңістігі, нормасымен $\|\hat{S}\| = \max\limits_{\tau\epsilon[0,T]} \|\hat{S}(\tau)\|$.

Бірінші ретті дербес туындылы жүктелген дифференциалдық теңдеуі үшін қойылған бейлокальді шартты шеттік есеп (5)-(7) эквивалентті қарапайым жүктелген дифференциалдық теңдеулер үйірі үшін қойылған шеттік есепке келтіріледі:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \hat{A}(\tau,\xi)W + \sum_{i=0}^{m} \hat{P}_i(\tau,\xi)\hat{u}(\tau_i,\xi) + \hat{f}(\tau,\xi),\ \ W\epsilon\mathbb{R}^n, \tag{8}$$

$$\hat{B}(\xi)W(0,\xi) + \hat{C}(\xi)W(T,T+\xi) = \hat{d}(\xi),\ \xi \in [0,q], \tag{9}$$

$$\hat{u}(\tau,\xi) = \hat{S}(\tau) + \int_{\tau}^{\tau+\xi} W(\tau,\psi)d\psi, \xi \in [0,q], \tau \in [0,T]. \tag{10}$$

Мұндағы $W(\tau,\xi)$ ізделінді вектор-функция; $\hat{A}(\tau,\xi) = A(\tau,\tau+\xi)$, $\hat{P}_i(\tau,\xi) = P_i(\tau,\tau+\xi)$ және $\hat{B}(\xi) = B(\tau+\xi)$, $\hat{C}(\xi) = C(\tau+\xi)$ – $n \times n$ - матрицалар, $i = \overline{0,m}$; $\hat{f}(\tau,\xi) = f(\tau,\tau+\xi)$, $\hat{S}(\tau) = S(\tau)$, $\hat{d}(\xi) = d(\tau+\xi)$ – вектор-функция.

(8)-(10) қарапайым жүктелген дифференциалдық теңдеулер үйірі үшін қойылған бейлокальді шеттік есеп деп аталады.

Айталық $(\bar{L})$ шарты орындаласын, егер:

1. $\hat{A}(\tau,\xi)$, $\hat{P}_i(\tau,\xi)$ – $n \times n$ - матрицалар, $i = \overline{0,m}$ және $\hat{f}(\tau,\xi)$– вектор-функция $\forall \tau, \xi$ айнымалылары бойынша $\overline{\Pi}$ облысында үзіліссіз;

2. $\hat{B}(\xi)$, $\hat{C}(\xi)$ – $n \times n$ - матрицалары және $\hat{d}(\xi)$ – вектор-функциясы $[0,q]$ кесіндісінде үзіліссіз;

3. $[0,T]$ кесіндісінде $\hat{S}(\tau)$ – вектор-функциясы дифференциалданатын болса.

Анықтама. $\overline{\Pi}$ обылысында үзіліссіз $(\hat{u}(\tau_i,\xi), W(\tau,\xi))\epsilon C(\overline{\Pi}, \mathbb{R}^n)$ жұп функциясын (8)-(10) қарапайым жүктелген дифференциалдық теңдеулер үйірі үшін қойылған бейлокальді шеттік есебінің шешімі деп атайды.

Анықтама. Кез-келген $\hat{f}(\tau,\xi) \in \mathrm{C}(\bar{H}, R^n)$, $\hat{d}(\xi) \in \mathrm{C}([0,\omega], R^n)$ үшін $W(\tau,\xi) \in \mathrm{C}(\bar{H}, R^n)$ жалғыз шешімі болса, мұндай жүктелген қарапайым дифференциалдық теңдеулер үйірі (8)-(10) үшін шеттік есеп бірмәнді шешілімді деп аталады.

Бірінші ретті дербес туындылы жүктелген дифференциалдық теңдеу үшін қойылған бейлокальді шеттік шартты есебінің қарапайым жүктелген дифференциалдық теңдеулер үйірі үшін қойылған бейлокальді шеттік есебіне эквиваленттілігі мына мағынада:

Егер t айнымалысы бойынша сәйкесінше $x=\tau+\xi$ характеристикасының бойымен үзіліссіз дифференциалданатын $\vartheta^*(t,x)$ функциясы (5)-(7) есебінің кең мағынадағы шешімі болса, онда $\left(W^*(\tau,\xi)\equiv\vartheta^*(\tau,\xi+\tau)=\vartheta^*(t,x),\hat{u}^*(\tau_i,\xi)\right)$ жұп функциясы $t=\tau,\ x=\tau+\xi$ характеристикасы бойынша құрылған (8)-(10) есебінің классикалық шешімі болады. Керсінше де, $\left(\hat{u}^{\sim}(\tau_i,\xi),W^{\sim}(\tau,\xi)\right)$ жұп функциясы $t=\tau, x=\tau+\xi$ характеристикасы бойынша құрылған (8)-(10) есебінің классикалық шешімі болса, онда $\vartheta^{\sim}(t,x)$ функциясы t айнымалысы бойынша сәйкесінше $x=\tau+\xi$ характеристикасының бойымен үзіліссіз дифференциалданатын (5)-(7) есебінің кең мағынадағы шешімі болады.

Есеп. (8)-(10) қарапайым жүктелген дифференциалдық теңдеулер үйірі үшін қойылған бейлокальді шеттік есебінің шешімінің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарттарын тағайындау.

(8)-(9) есебі $\hat{u}(\tau_i,\xi)$ бекітілген немесе анықталған функция болса, $W(\tau,\xi)$ бойынша қарапайым жүктелген дифференциалдық теңдеулер үйірі үшін қойылған екі нүктелік шекаралық шартты есебі болады. Ал (10) интегралдық қатынас $\hat{u}(\tau_i,\xi)$ функциясын анықтауға мүмкіндік береді.

$\hat{u}(\tau_i,\xi)\epsilon C(\overline{\Pi},\mathbb{R}^n)$ анықталған функция және ξ параметр болсын.

Анықтама. $\overline{\Pi}$ обылысында үзіліссіз $W(\tau,\xi)\epsilon C(\overline{\Pi},\mathbb{R}^n)$ функциясын (8)-(9) қарапайым жүктелген дифференциалдық теңдеулер үйірі үшін қойылған екі нүктелік шекаралық шартты есебінің шешімі деп атайды.

Осылайша $(\hat{u}(\tau_i,\xi),W(\tau,\xi))$ жұп функциясын анықтау үшін тұйық тендеулер жүйесіне келеміз. (8)-(10) есебін шешу үшін итерациялық әдіс қолданамыз, мұндағы $(\hat{u}^{(k)}(\tau,\xi),W^{(k)}(\tau,\xi)),\ k=0,1,2,\dots$, жуықтау жұбы біртіндеп жуықтау әдісі арқылы алгоритм бойынша анықталады.

Қарапайым жүктелген дифференциалдық теңдеулер үйірі үшін қойылған бейлокальді шеттік есебін біртіндеп жуықтау әдісі арқылы шешу алгоритмі:

Қадам 0. А) (8) теңдеудің оң жағына $\hat{u}(\tau_i,\xi)=\hat{S}(\tau),\ i=\overline{0,m}$ қолданып, (8)-(9) қарапайым жүктелген дифференциалдық теңдеулер үйірі үшін қойылған екі нүктелік шекаралық шартты есебін шешеміз:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau}=\hat{A}(\tau,\xi)W+\sum_{i=0}^{m}\hat{P}_i(\tau,\xi)\hat{S}(\tau)+\hat{f}(\tau,\xi)\,,\ \ W\epsilon\mathbb{R}^n, \tag{8}$$

$$\hat{B}(\xi)W(0,\xi)+\hat{C}(\xi)W(T,T+\xi)=\hat{d}(\xi),\ \xi\in[0,q]\,. \tag{9}$$

Осыдан $W^{(0)}(\tau,\xi)$ алғашқы жуықтауды анықтаймыз.

Ә) (10) интегралдық қатынасқа $W(\tau,\xi)=W^{(0)}(\tau,\xi)$ деп, $\hat{u}^{(0)}(\tau,\xi)$ жуықтауды біртіндеп анықтаймыз:

$$\hat{u}^{(0)}(\tau,\xi)=\hat{S}(\tau)+\int_{\tau}^{\tau+\xi}W^{(0)}(\tau,\psi)d\psi\,,\xi\in[0,q],\qquad \tau\in[0,T].$$

Қадам 1. А) (8) теңдеудің оң жағына $\hat{u}(\tau_i,\xi)=\hat{u}^{(0)}(\tau,\xi), i=\overline{0,m}$ деп, (8)-(9) қарапайым жүктелген дифференциалдық теңдеулер үйірі үшін қойылған екі нүктелік шекаралық шартты есебін есептеп $W^{(1)}(\tau,\xi)$ анықтаймыз.

Ә) (10) интегралдық қатынасқа $W(\tau,\xi)=W^{(1)}(\tau,\xi)$ деп, $\hat{u}^{(1)}(\tau,\xi)$ жуықтауды біртіндеп анықтаймыз.

Осыдай итерациялық процесті жалғастыра k қадамды анықтаймыз.

Қадам k. А) (8) теңдеудің оң жағына $\hat{u}(\tau_i,\xi)=\hat{u}^{(k-1)}(\tau,\xi)$ деп, (8)-(9) қарапайым жүктелген дифференциалдық теңдеулер үйірі үшін қойылған екі нүктелік шекаралық шартты есебін есептеп $W^{(k)}(\tau,\xi)$ анықтаймыз.

Ә) (10) интегралдық қатынасқа $W(\tau,\xi)=W^{(k)}(\tau,\xi)$ деп $\hat{u}^{(k)}(\tau,\xi)$ біртіндеп анықтаймыз, $k=1,2,3,\dots$.

Алгоритмді қортындылай келе (8)-(10) қарапайым жүктелген дифференциалдық теңдеулер үйірі үшін қойылған бейлокальді шеттік есебінің шешімін табу процесінде алгоритм екі бөлікке бөлінеді: А) қарапайым жүктелген дифференциалдық теңдеулер үйірі үшін қойылған екі нүктелік шекаралық шартты есебін $W(\tau,\xi)$ функциясы бойынша шешу; Ә) (10) интегралдық қатынастан $\hat{u}(\tau_i,\xi)$ функциясын анықтау.

Теорема. Егер $(\bar{L})$ шарты орындаласа және $\max\limits_{(\tau,\xi)\epsilon\overline{\Pi}}\|\Phi^{-1}(\tau,\xi)\| \leq \alpha$, $\max\limits_{(\tau,\xi)\epsilon\overline{\Pi}}\left\|\hat{f}(\tau,\xi)\right\| \leq M$ болса, онда (8)-(10) қарапайым жүктелген дифференциалдық теңдеулер үйірі үшін қойылған шеттік есебінің кең мағынадағы $W^*(\tau,\xi)\epsilon C(\overline{\Pi},\mathbb{R}^n)$ жалғыз шешімі бар.

Дәлелдеу. Теореманы дәлелдеу барысында ұсынылған алгоритм қолданылды.

Қорытынды

Егер салыстырмалы кіріс деректеріне және жүктелген дербес туындылы дифференциальдық теңдеуі үшін бейлокальді шеттік есебінің кең мағынадағы құрылған шешіміне, t және x айнымалылары бойынша үзіліссіз дифференциалданады деп қосымша болжасақ, онда $u(t,x) \in C(\bar{\Omega},R^n)$ функциясы $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ және $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ үзіліссіз дербес туындаларымен, барлық $(t,x) \in \bar{\Omega}$ үшін (1) теңдеумен (2)-(3) шарттарды қанағаттандырып, (1)-(3) шеттік есептің классикалық шешімі болады.

Әдебиеттер тізімі

1. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. - М.: Высш. шк., - 1995. - 301 с.

2. Ломов И. С. Свойство базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка на интервале. - Дифференц. уравнения. - 1991.

3. Krall A. M. The development of general differential and general differential boundary systems. - Rock. Moun. J.Math. - 1975.

4. Искендеров А. Д. О смешанной задаче для нагруженных квазилинейных уравнений гиперболического типа. - Докл. АН СССР. - 1971. Т. 199, С. 1237-1239.

5. Искендеров А. Д. О первой краевой задаче для нагруженной системы квазилинейных параболических уравнений - Дифференц. уравнения. - 1971. Т. 7, С. 1911-1913.

6. Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И. Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. - Алматы: Ғылым,- 2010.- 334 с.

7. Стеклов В. А. Основные задачи математической физики. – Петроград, -1922-1923.

8. Нахушев. А. М. Нагруженные уравнения и их применение. - М.: Наука, -2012. - 231 с.

9. Abdikalikova G. A., Assanova A. T., Shekerbekova Sh. T., A nonlocal problem for fourth-order loaded hyperbolic equations, - Russian Math. -2022.

10. Dzhumabaev D. S., Well-posedness of nonlocal boundary value problem for a system of loaded hyperbolic equations and an algorithm for finding its solution. - Journal of Mathematical Analysis and Applications. -2018.

References

1. Nahushev A. M. Uravneniya matematicheskoj biologii. - M.: Vyssh. shk., - 1995. - 301 s.

2. Lomov I. S. Svojstvo bazisnosti kornevyh vektorov nagruzhennyh differencial'nyh operatorov vtorogo poryadka na intervale. - Differenc. uravneniya. - 1991.

3. Krall A. M. The development of general differential and general differential boundary systems. - Rock. Moun. J.Math. - 1975.

4. Iskenderov A. D. O smeshannoj zadache dlya nagruzhennyh kvazilinejnyh uravnenij giperbolicheskogo tipa. - Dokl. AN SSSR. - 1971. T. 199, S. 1237-1239.

5. Iskenderov A. D. O pervoj kraevoj zadache dlya nagruzhennoj sistemy kvazilinejnyh parabolicheskih uravnenij - Differenc. uravneniya. - 1971. T. 7, S. 1911-1913.

6. Dzhenaliev M. T., Ramazanov M. I. Nagruzhennye uravneniya kak vozmushcheniya differencial'nyh uravnenij. - Almaty: Gylym,- 2010.- 334 s.

7. Steklov V. A. Osnovnye zadachi matematicheskoj fiziki. – Petrograd, -1922-1923.
8. Nahushev. A. M. Nagruzhennye uravneniya i ih primenenie. - M.: Nauka, -2012. - 231 s.
9. Abdikalikova G. A., Assanova A. T., Shekerbekova Sh. T., A nonlocal problem for fourth-order loaded hyperbolic equations, - Russian Math. -2022.
10. Dzhumabaev D. S., Well-posedness of nonlocal boundary value problem for a system of loaded hyperbolic equations and an algorithm for finding its solution. - Journal of Mathematical Analysis and Applications. -2018.

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

АБДИКАЛИКОВА Г.А., ШАКИМОВ Е.Е.*

Абдикаликова Галия Амиргалиевна — Кандидат физико-математических наук, доцент, Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан
E-mail: agalliya@mail.ru; https://orcid.org/0000-0001-6280-4168
***Шакимов Ернар Есенұлы —** Магистрант, Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан
E-mail: eron1997@mail.ru; https://orcid.org/0009-0001-0000-8729

Аннотация. Исследуется нелокальная краевая задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных с нагружением. Такие краевые задачи встречаются в приложениях в виде математической, в том числе дифференциальной модели реальных физических, биологических, экологических и др. процессов. Нагруженные дифференциальные уравнения описывают динамику замкнутой популяции, процессы, происходящие в сплошной среде и др.

Нагруженные дифференциальные уравнения возникают при замене интегрального члена интегро-дифференциальных уравнений, а также при построении приближенного решения системы интегро-дифференциальных уравнений. Значительный интерес представляют краевые задачи с нелокальными ограничениями для нагруженных дифференциальных уравнений. Построению конструктивных методов исследования задач для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений посвящено значительное количество работ. Как известно, различными методами получены условия существования и единственности решения краевых задач для таких уравнений.

Для краевой задачи с нелокальным условием для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка исследован вопрос однозначной разрешимости. Установлены эквивалентность решений нелокальной краевой задачи для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных и краевой задачи с нелокальным условием для дифференциального уравнения с частными производными первого порядка и связывающим интегральным соотношением.

Предложен алгоритм нахождения решения таких краевых задач.

Ключевые слова: нагруженные уравнения, разрешимость, в широком смысле, нелокальное, характеристика, алгоритм.

SOLVABILITY OF A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR LOADED DIFFERENTIAL EQUATIONS

ABDIKALIKOVA G.A., SHAKIMOV E.E.*

Abdikalikova Galiya Amirgalievna - Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan
E-mail: agalliya@mail.ru; https://orcid.org/0000-0001-6280-4168
***Shakimov Ernar Yesenuly -** Master's student, K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan
E-mail: eron1997@mail.ru; https://orcid.org/0009-0001-0000-8729

Abstract. A nonlocal boundary value problem for a system of partial differential equations with loading is investigated. Such boundary value problems are encountered in applications in the form of a mathematical model, including a differential model of real physical, biological, ecological and other processes. Loaded differential equations describe the dynamics of a closed population, processes occurring in a continuous medium, etc.

Loaded differential equations arise when replacing the integral term of integro-differential equations, as well as when constructing an approximate solution to a system of integro-differential equations. Of considerable interest are boundary value problems with nonlocal constraints for loaded differential equations. A significant number of works are devoted to the construction of constructive methods for studying problems for some classes of loaded differential equations. As is known, conditions for the existence and uniqueness of a solution to boundary value problems for such equations are obtained by various methods.

For a boundary value problem with a nonlocal condition for a second-order partial differential equation, the issue of unique solvability is studied. Equivalence of solutions of a nonlocal boundary value problem for a loaded partial differential equation and a boundary value problem with a nonlocal condition for a first-order partial differential equation and a connecting integral relation is established.

An algorithm for finding a solution to such boundary value problems is proposed.

Key words: loaded equations, solvability, in the wide extent, nonlocal, characteristic, algorithm.