https://www.researchgate.net/publication/322627817_Computer_Science_in_the_School_Curriculum_Issues_and_Challenges

19. Education and computing, 1985, №1 // Bork A. Computer and Information Technology as a Learning Aid. - P.29 -34. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1054883.pdf

ҒТАМР 27.23.15

СТАНДАРТТЫ ЕМЕС ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУДІҢ КЕЙБІР ӘДІСТЕРІ

БАЕШЕВА К.С., АМИРХАНОВА Н.Н.

Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

Аңдатпа. Білім алушылардың математика есептерін шығару барысында ойлау қабілеттерін, пәнге деген қызығушылықтарын арттыру үшін ең қызықты немесе стандартты емес есептерді шығарту керек. Мақалада стандартты емес есептерді дәстүрлі емес шешу жолдары қарастырылған. Келтірілген есептерді шешу барысында математикалық талдау пәнінен алған білімімізді қолдана отырып, есепті шығармас бұрын фукция, функция қасиеттері туралы мағлұматтарды білуіміз керек. Әр түрлі теңдеулер мен теңсіздіктердің шешімдерін табуда функцияның қандай қасиеттеріне баса назар аудару керектігі айтылып, мысалдар арқылы қасиеттердің қолданылуы ашып келтірілген. Нақтырақ айтар болсақ, мақалада функцияның монотондылық қасиеттері мен экстремальдық қасиеттері қарастырылып, есептер шығаруда қолданылған.

Кілт сөздер: стандартты емес есептер, теңдеу, теңсіздік, функция қасиеттері, функция монотондылығы.

Аннотация. Чтобы развивать мышление учащихся по математике, повысить интерес к указанному предмету, нужно решать как можно больше интересных или нестандартных задач. В статье рассматриваются нетрадиционные способы решения нестандартных задач. При решении предложенных задач мы используем знания, полученные при изучении математического анализа. Прежде чем приступить к решению задачи, необходимо вспомнить сведения о функции и ее свойствах. Какие именно свойства функции необходимо использовать при решении различных уравнений и неравенств рассмотрены подробно на конкретных примерах. В данной статье рассмотрены свойства монотонности и экстремальные свойства функции, которые используются при решении таких задач.

Ключевые слова: нестандартные задачи, уравнения, неравенства, свойства функций, монотонность функций.

Annotation. In order to develop students' thinking in mathematics and increase their interest in this subject, you need to solve as many interesting or non-standard problems as possible. Non-traditional ways of solving non-standard problems are considered in this article. When solving the proposed problems, we use the knowledge gained from the study of mathematical analysis. Before you start solving the problem, you need to remember the information about the function and its properties. Which properties of the function should be used in solving various equations and inequalities are considered in detail on specific examples. The monotonicity properties and extreme properties of the function that are used in solving such problems are considered in this article.

Key words: non-standard problems, equations, inequalities, properties of the function, monotonicity of the function.

Оқушылар мектептегі оқулықтары мен қосымша оқу құралдарында кездесетін жоғары қиындықтағы есептердің ішінде ерекше орындағы стандартты емес есептерді шешу барысында кедергілерге кездесіп жатады.

Стандартты емес есептерге дәстүрлі жолмен шығаруға келмейтін теңдеулер мен теңсіздіктер жатады. Көп жағдайда мұндай теңдеулер мен теңсіздіктерді шығару "функционалды деңгейде", яғни, графиктерін сызу арқылы немесе теңдеу мен теңсіздіктің екі жағында орналасқан функциялардың белгілі қасиеттерін өзара салыстыру көмегімен іске асады

Біз көп жағдайда теңдеулер мен теңсіздіктерді түрлендіру арқылы немесе белгісізді алмастыру арқылы шешуді қарастырамыз. Бұл мақалада жоғарыда атап өтілген әдістерден басқа, атап айтқанда функция қасиеттерін қолдану арқылы теңдеулер мен теңсіздіктерді шешу жолдары келтіріледі.

Мысал 1. Теңсіздікті шешу: $\sqrt{3+x} \geq 3-x$.

Шешуі. Осыған ұқсас теңсіздіктерді шешуді білеміз. Оны шешудің екі стандартты әдісі бар: квадратты түрлендіру ($3 - x > 0$ шартқа сәйкес: егер $3-x \leq 0$ болса теңсіздік орындалады) және белгісізді алмастыру арқылы ($y = \sqrt{3+x}$).

Тағы да стандартты емес шешімін табуды қарастырайық. Функция сол жақта орналасса монотонды өседі, оң жақта болса кемиді. Графикалық ой-пікірлердің мәні мынадай: $\sqrt{3+x} = 3-x$ теңдеуінің біреуден артық шешімі болады. Сонымен бірге егер x_0 – осы теңдеудің шешімі болса, онда $\sqrt{3+x} < 3-x$ теңсіздігінің шешімі $-3 \leq x < x_0$ аралығында, бірақ берілген теңсіздіктің шешімі $x \geq x_0$ болады. x_0 мәні оңай шешіледі: $x_0 = 1$. Осылай жауабын табамыз: $x \geq 1$.

Мысал 2. Теңдеуді шешу: $3^x + 4^x = 7^x$.

Шешуі. Берілген теңдеудің шешімінің шамасы $x = 1$. Оның басқа шешімі жоқ екенін дәлелдейік. Теңдеудің екі жақ бөлігін 7^x-ке бөлеміз.

$$\frac{3^x}{7^x} + \frac{4^x}{7^x} = \frac{7^x}{7^x},$$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x = 1.$$

Сол жағы өзін монотонды кемитін функция екендігін көрсетеді. Осыдан, әрбір мәні бір рет қолданылады, басқаша айтқанда теңдеудің бір шешімі бар.

Жауабы: $x = 1$.

Сонымен, бұл екі есептен мынадай, тіпті қарапайым негізге сүйенеміз: егер $f(x)$ монотонды өссе, онда $\varphi(x)$ монотонды кемиді, онда $f(x) = \varphi(x)$ теңдеуінің бірден артық емес шешімі болады. Сонымен бірге $x = x_0$ – теңдеуінің шешімі болса, онда $x > x_0$ болғанда (x - $f(x)$ және $\varphi(x)$ екі функцияларының анықталу облысына кіреді) $f(x) > \varphi(x)$ болады, ал $x < x_0$ аралығында $f(x) < \varphi(x)$ болады.

Бұл идеяның мына түріне көңіл аударайық: егер $f(x)$ – монотонды функция болса, онда $f(x) = f(y)$ теңдігінен $x = y$ екендігі алынады.

Мысал 3. Теңдеуді шешу: $\log_{4-x}\log_4 x = \log_{5-x}\log_3(3x)$.

Шешуі. Алдымен берілген теңдеуді түрлендірейік. Ол үшін теңдеудің екі жағында да логарифмді басқа негізге келтірейік, яғни ондық логарифмге:

$$\frac{\lg\log_3 x}{\lg(4-x)} = \frac{\lg\left(\log_3 x+1\right)}{\lg(5-x)}.$$

Теңдіктің екі жағын түрлендіріп $\dfrac{\lg(5-x)}{\lg(4-x)} = \dfrac{\lg\left(\log_3 x+1\right)}{\lg\log_3 x}$, логарифмнің қасиеті бойынша келесі теңдеуге келеміз:

$$\log_{4-x}(5-x) = \log_{\log_3 x}(\log_3 x + 1).$$

$f(t) = \log_t(t+1)$ функциясын қарастырайық.

$t > 0$ болғанда бұл функцияның монотонды кемитінін дәлелдейік. Мұның мысал ретінде стандартты бейнесін қарастырайық: алдымен туындысын табайық $f'(t)$

$$\left(f(t) = \frac{\ln(t+1)}{\ln t}, \quad f'(t) = \frac{t\ln t - (t+1)\ln(t+1)}{t(t+1)\ln^2 t} \right)$$

және $t > 0$ болғанда $f'(t) = 0$ екенін дәлелдейік. Функцияны келесі түрде өрнектейік:

$$f(t) - 1 = \log_t(t+1) - 1 = \log_t\left(1 + \frac{1}{t}\right).$$

Алынған функцияның шамасы кемитіні анықталады (негізі өседі, логарифм астындағы функция белгісі кемиді).

Біздің теңдеуіміз мына түрге келді: $f(4 - x) = f(\log_3 x)$, яғни $\log_3 x = 4 - x$. Сол жақтағы функция өседі, оң жақтағы кемиді. Теңдеудің нағыз шешімі іріктеліп, оңай шешіледі: $x = 3$.

Теңдеудің түрі $\varphi(\varphi(x)) = x$ болсын.

Осы теңдеуді шешкенде, бастапқы көрсетілген түріне келесі теореманың орындалуы қажетті: егер $y = \varphi(x)$ – монотонды өсетін функция болса, онда теңдеу

$$\varphi(x) = x \tag{1}$$

және

$$\varphi(\varphi(x)) = x \qquad (2)$$

эквивалентті болады.

Дәлелдеуі: Онда (2) теңдеуі (1) теңдеуінен шығады, шамасы (1) теңдеуінің кез келген түбірі (2) теңдеуін қанағаттандырады. (Егер $\varphi(x_0) = x_0$, онда $\varphi(\varphi(x_0)) = \varphi(x_0) = x_0$) (2) теңдеуінің кез келген түбірі (1) теңдеуін қанағаттандыратынын дәлелдейік.

$\varphi(\varphi(x_0)) = x_0$ болсын. $\varphi(x_0) \neq x_0$ және $\varphi(x_0) > x_0$ деп болжасақ, онда $\varphi(\varphi(x_0)) > \varphi(x_0) > x_0$, қарсы болжам ($\varphi(\varphi(x_0)) = x_0$) табылады.

Теорема дәлелденді.

Ескерту. Егер $y = \varphi(x)$ монотонды өссе, онда кез келген k мәнінде $\underbrace{\varphi(\varphi(...\varphi(x))...)}_{k} = x$ және $\varphi(x) = x$ теңдеуінде эквивалентті.

Бұл теореманы пайдаланып, бірнеше мысал келтірейік.

Мысал 4. Теңдеуді шешу: $\sqrt{2 + \sqrt{x}} = x - 2$.

Шешуі. Теңдеуді $2 + \sqrt{2 + \sqrt{x}} = x$ түріне келтіреміз.

$\varphi(x) = 2 + \sqrt{x}$ функциясын қарастырайық. Бұл функция монотонды өседі. $\varphi(\varphi(x)) = x$ теңдеуін аламыз. Теоремаға сәйкес оны эквивалентті теңдеуге айналдырамыз. $\varphi(x) = x$ немесе $2 + \sqrt{x} = x$. Бұдан теңдеуді түрлендіріп, $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ аламыз. $\sqrt{x} = t$ ауыстыруын жасап, $t^2 - t - 2 = 0$ квадрат теңдеуін аламыз. Оның шешімдері: $t_1 = 2$, $t_2 = -1$. Бірінші шешім ғана теңдеу шешімі бола алады. Демек, $\sqrt{x} = 2$, $x = 4$.

Мысал 5. Теңдеуді шешу: $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$.

Шешуі. Теңдеуді келесі түрде өрнектесек: $\dfrac{1 + \left(\dfrac{x^3 + 1}{2}\right)^3}{2} = x$.

Берілген теңдеу мына түрге келеді: $\varphi(\varphi(x)) = x$, мұндағы $\varphi(x) = \dfrac{1 + x^3}{2}$.

Теоремада көрсетілгендей эквивалентті теңдеу аламыз.

$$\frac{x^3 + 1}{2} = x,$$

$$x^3 - 2x + 1 = 0,$$

$$(x - 1)(x^2 + x - 1) = 0.$$

Жауабы: 1, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Мысал 6. Теңдеулер жүйесін шешу: $\begin{cases} x^3 + 2x^2 + 2x = y, \\ y^3 + 2y^2 + 2y = z, \\ z^3 + 2z^2 + 2z = x. \end{cases}$

Шешуі. $\varphi(t) = t^3 + 2t^2 + 2t$ функциясын қарастырайық. Мүмкіндігінше барлық t-да $\varphi'(t) = 3t^2 + 4t + 2 > 0$, онда $\varphi(t)$ өседі.

Жүйе мына түрге келеді: $y = \varphi(x)$, $z = \varphi(y)$, $x = \varphi(z)$, яғни $x = \varphi(\varphi(\varphi(x)))$. Теоремада келіскендей x мәні $\varphi(x) = x$ теңдеуін қанағаттандырады немесе

$$x^3 + 2x^2 + 2x = x, \quad x(x^2 + 2x + 1) = 0, \quad x(x + 1)^2 = 0.$$

Жауабы: (0, 0, 0), (-1, -1, -1).

Енді қарастырылған функцияның экстремальдық қасиетін пайдаланайық. Негізгі идея бұл жерде мына мысалдардан анық көрінеді.

Мысал 7. Теңдеуді шешу: $2\cos x = 2^x + 2^{-x}$.

Шешуі. Теңдеудің сол жақ бөлігі 2-ден аспайды, ал оң жақ бөлігі – 2-ден кем емес. Бұдан, теңдіктің шартына сәйкес бір ғана орны бар, оң жағы да, сол жағы да 2-ге тең, яғни $x = 0$.

Ескерту. Берілген шамадағы, функцияның ең кішісі теңдеудің бір жағында орналасса, функцияның ең үлкен мәніне тең болады. Басқа жағында орналасса жинақталуы мүмкін. Жалпы көптеген жағдайларда теңдеудің түрі $f(x) = \varphi(x)$, барлық x үшін $f(x) \le \varphi(x)$ (формальды түрде бұл теңдеуді $f(x) - \varphi(x) = 0$ түріне келтіреміз).

Мысал 8. Теңдеуді шешу: $x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{1+x^2}$.

Шешуі. $a_1a_2 + b_1b_2 \le \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ теңсіздігін қарастырамыз. Бұл теңсіздіктің геометриялық интерпретациясы мынадай: екі вектордың скалярлық көбейтіндісі ұзындығының көбейтіндісінен асып түспейді. Ол жиі кездесетін жағдай ($n = 2$). Коши – Буняковскийдің жалпы теңсіздігі бізге дәлелденген.

$$x\sqrt{1+x} + 1 \cdot \sqrt{3-x} \le \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{(1+x) + (3-x)} = 2\sqrt{1+x^2}$$

аламыз. Демек, $(x, 1)$ векторлары және $\left(\sqrt{1+x}, \sqrt{3-x}\right)$ коллинеарлы, яғни

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{3-x}}, \quad x\sqrt{3-x} = \sqrt{x+1}, \ x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0,$$

$$(x-1)(x^2 - 2x - 1) = 0, \ x_1 = 1, \ x_2 = 1 + \sqrt{2}, \quad x_3 = 1 - \sqrt{2}.$$

Соңғы түбірі болмайды.

Жауабы: $1,\ 1+\sqrt{2}$.

Мысал 9. Теңдеуді шешу: $\lg(\cos x-0{,}5)+\lg(\sin x-0{,}3)+1=0$.

Шешуі. Берілген теңдеудің шешімі болмайтынын дәлелдейік.

$(cosx-0{,}5)\,(\sin x-0{,}3)=\dfrac{1}{10}$ теңдеуін түрлендірейік. Геометриялық ортасы мен арифметикалық ортасы арасындағы теңсіздіктің сол жағын бағалаймыз.

$$\left(ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right).$$

$$(cosx-0{,}5)(\sin x-0{,}3)\le\left(\frac{cosx+\sin x-0{,}8}{2}\right)^3\le\left(\frac{\sqrt{2}-0{,}8}{2}\right)^2<\left(\frac{1{,}42-0{,}8}{2}\right)^2=$$

$$=(0{,}31)^2<0{,}1$$

яғни, оң жағы сол жағынан кіші. Теңдеудің шешімі болмайды.

Тағы теңдеулер мен теңдеулер жүйесінің шешіміне бірнеше стандартты емес мысалдар келтірейік.

Алдымен стандартты емес алмастыру жағдайын қарастырайық.

Мысал 10. Теңдеуді шешу: $8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1$.

Шешуі. $|x|\ge 1$ аралығында $|x|<1$ дәлелдеу қиын емес

$$2x^2-1\ge 1 \text{ және } 8x^4-8x^2+1\ge 1.$$

Орын ауыстырамыз

$$x=\cos t,\ 0<t<\pi.$$

Сондықтан

$$2x^2-1=2\cos^2 t-1=\cos 2t,\ 8x^4-8x^2+1=2(2x^2-1)^2-1=2\cos^2 2t-1=\cos 4t.$$

Онда теңдеу мына түрге келеді: $8\cos t\cos 2t\cos 4t=1$.

Екі жағын да $\sin t$-ға көбейтеміз. Түрлендіруден кейін $\sin 8t-\sin t=0,\ \ 2\cos\frac{9}{2}t\sin\frac{7}{2}t=0$ мынадай болады.

$0<t<\pi$ қайдан екенін есепке ала отырып, $t=\dfrac{2}{7}\pi k,\ k=1,\,2,\,3$ немесе $t=\dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2}{9}\pi k,\ k=0,1,\,2,\,3$ табамыз. x-ке қайтып келсек, жауабын аламыз.

Жауабы: $\cos\frac{2}{7}\pi,\ \cos\frac{4}{7}\pi,\ \cos\frac{6}{7}\pi,\ \cos\frac{\pi}{9},\ \frac{1}{2},\ \cos\frac{5\pi}{9},\ \cos\frac{7\pi}{9}$.

Сонымен, осы мақала математикадан факультатив сабақтарда теңдеулер мен теңсіздіктерді, олардың жүйелерін шешуді стандартты емес есептеу әдістері арқылы оқыту барысында тыңдаушылардың математикаға деген қызығушылығын арттыруға септігін тигізеді деген ойдамыз.

Пайдаланылған ақпараттар тізімі:

1. Олехник С.Н., Потапов М.К., Пасиченко П.И. «Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения: справочник», М: Факториал, 1997. (кітап)
2. Потапов М.К. «Уравнения и неравенства. Нестандартные методы решения» Москва: «Дрофа», 2002 г. (кітап)
3. Барвенов С.А. «Методы решения алгебраических уравнений», Москва: «Аверсэв», 2006 г. (кітап)
4. Вавилов В.В. и др. «Задачи по математике. Уравнение и неравенства»–Москва: Наука, 1987. (кітап)
5. Галицкий М.А. и другие «Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа» - Москва: Просвещение. (кітап)
6. Ивлев Б.М. и др. «Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа» – Москва: Просвещение, 1990. (кітап)
7. Олехник С.Н. и др. «Нестандартные методы решения уравнений и неравенств» – Москва: МГУ, 1991. (кітап)

ҒТАМР 20.01.09

ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ НЕГІЗДЕРІНІҢ ДАМУ ТАРИХЫ ЖӘНЕ ҚОЛДАНУ САЛАЛАРЫ

Г.И. САЛҒАРАЕВА, Ұ.Б. ЖҰМАБАЕВА
Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

Аңдатпа: Мақалада жасанды интеллект негіздерінің даму тарихы және қолдану салалары қарастырылады. Жасанды интеллекттің жалпы зерттеу мақсаты – компьютерлер мен машиналардың дұрыс жұмыс істеуіне мүмкіндік беретін технологияны құру. Жасанды интеллект негіздерінің заман талабына сай құрылған программалары қарастырылды. Қазіргі таңда барлық салаларға еніп жатқан жасанды инттеллекттің маңызы зерттелеген. Машиналық оқытудың қазіргі таңда қолданыстағы түрлері. Жасанды интеллект саласындағы ең күрделі мәселелерді шешу жолы. ЖИ классикалық зерттеулері қарастырылды.

Кілттік сөздер: жасанды интеллект, Черч-Тюринг тезисі, нейробиология, нейрондық байланыс, зияткерлік агенттер