18. I.G.C. Weppelman, R.J. Moerland, L. Zhang, E. Kieft, P. Kruit, J.P. Hoogenboom, Pulse length, energy spread, and temporal evolution of electron pulses generated with an ultrafast beam blanker, Struct Dyn, 6 (2019) 024102.

19. Spivak-Lavrov I.F. Analytical Methods for The Calculation and Simulation of New Schemes of Static and Time-of-Flight Mass Spectrometers // Advances in Imaging and Electron Physics. – Burlington: Academic Press, 2016. – V. 193. – P. 45-128.

20. Спивак-Лавров И.Ф., Жеткергенов Д.Б., Шарипов С.У. Краевое поле дефлекторных пластин с заземленными экранами // Вестник АРГУ. – № 4 (58), Актобе, 2019. – С. 27-36.

ҒТАМР 27.27.17

ҚАРАПАЙЫМ АНАЛИТИКАЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫ КОНФОРМДЫ БЕЙНЕЛЕУЛЕР ҮШІН ҚОЛДАНУ МӘСЕЛЕЛЕРІ ТУРАЛЫ

Х.Т. ОТАРОВ, А.А. ТҰРҒАНБАЕВ

Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

Аңдатпа. Мақалада комплекс облыстарда аналитикалық қарапайым функциялар арқылы орындалатын геометриялық түрлендірулер қарастырылады.

Түйін сөздер: аналитикалық функция, конформды бейнелеу, комплекс сан, гомотетия, бұру, параллель көшіру.

Аннотация. В статье рассматриваются геометрические преобразования, осуществляемые простейшими аналитическими в комплексных областях функциями.

Ключевые слова: комплексное число, аналитическая функция, конформное отображение, гомотетия, поворот, параллельный перенос.

Annotation. The article deals with geometric transformations performed by the simplest analytical functions in complex domains.

Key words: complex number, analytical function, conformal mapping, homotopy, rotation, parallel translation.

Комплекс айнымалылы аналитикалық функциялар теориясының практикалық қолданыстарының ауқымы үлкен екендігі белгілі. Оның көмегімен картографияның, серпімділік теориясының, гидродинамиканың, аэродинамиканың, электродинамиканың т.б. көптеген мәселелері шешіледі. Аналитикалық функциялар кванттық теорияда, табиғи және жасанды аспан денелері қозғалыстарын зерттеуде, ғылым мен техниканың басқа да көптеген салаларында кеңінен қолданылады. Сонымен қатар, математиканың теориялық мәселелерін (мысалы, сандар теориясының) шешу үшін де аналитикалық функциялардың орны ерекше.

Мұндай функциялар арқылы күрделі интегралдар есептеледі, дифференциалдық теңдеулер шешіледі т.с.с.

Мектеп мұғалімі үшін аналитикалық функциялар теориясы маңыздылығының мынадай себептері бар: біріншіден, мектепте комплекс сандар туралы мағлұмат беріледі. Екіншіден, көрсеткіштік және логарифмдік, тригонометриялық функцияларды оқытудың кейбір мәселелері бұл функцияларды комплекс облыста қарастыруды талап етеді. Үшіншіден, аналитикалық функциялар теориясы мектеп мұғалімі білуге тиісті жазықтықтағы геометриялық түрлендірулермен және Лобачевский геометриясымен тығыз байланысты.

Көптеген практикалық мәселелерді (мысалы, картографияда) шешуде жазық облыстарда сызықтар арасындағы бұрыштарды өзгертпейтін бейнелеулер маңызды орын алады.

Егер D облысын D' облысына f бейнелеуі өзара бірмәнді, сызықтар арасындағы бұрыштарды сақтайтын және жазықтықтың бағытталуын өзгертпейтін болса, онда ол конформды бейнелеу деп аталады [1].

Жазықтықтағы D облысында $w = f(z)$ функциясымен берілген бейнелеудің конформды болуының қажетті және жеткілікті шарты $f(z)$ функциясының D -да қайтарымды, дифференциалданатын және $f'(z) \neq 0, z \in D$ болуы екендігі белгілі [2].

Сонымен қатар, конформды бейнелеу де және оған кері бейнелеу де үзіліссіз және облысты облысқа көшіреді, облыстың байланыстылығын өзгертпейді.

Мақалада комплекс облыста аналитикалық ең қарапайым функциялармен берілген бейнелеулер арқылы орындалатын геометриялық түрлендірулер қарастырылады.

I. Сызықты функция

$w = az + b, \quad a \neq 0, \quad a, b -$ комплекс сандар, $z = x + iy$ бейнелеуі бүкіл комплекс жазықтықта конформды, түзуді түзуге, шеңберді шеңберге көшіреді және 3 түрлендірудің композициясы ретінде орындалады:

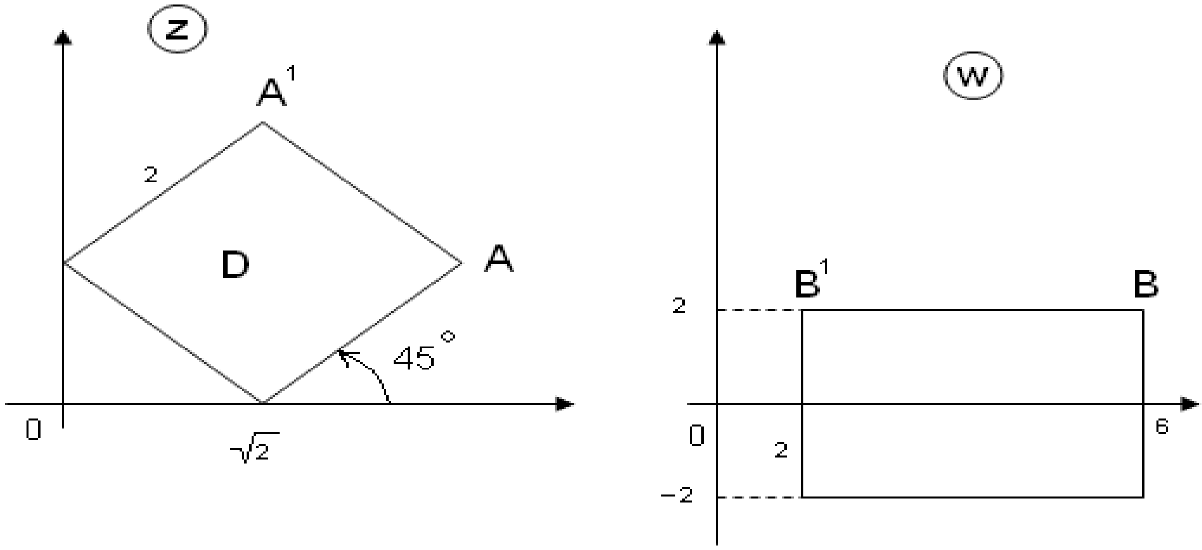
а) центрі $z = 0$ нүктесінде, ұқсастық коэффициенті $|a|$-ға тең ұқсас түрлендіру (гомотетия);

ә) координаталар басына қарағанда $\alpha = \arg a$ бұрышына бұру;

б) b векторына параллель көшіру.

1-мысал. Қабырғасы 2-ге тең D квадратын қабырғасы 4-ке тең E квадратына, A нүктесін B нүктесіне бейнелейтін сызықты функцияны анықтау керек.

Шешуі:



а) D квадратын қабырғасы 4 болатын D_1 квадратына көшіретін ұқсас түрлендіру $w_1 = 2z$ болады, себебі ұқсастық коэффициенті 2-ге тең. Сонда $A(2\sqrt{2};\sqrt{2})$ нүктесі $A_1(4\sqrt{2};2\sqrt{2})$ нүктесіне, A' нүктесі A_1' нүктесіне көшеді.

ә) алғашқы түрлендіру нәтижесінде шыққан D_1 квадратын $A_1'A_1$ қабырғасы $B'B$ -ға параллель болатындай етіп, бас нүктеге қарағанда 45^0 бұрышқа сағат тіліне қарсы бағытта бұру арқылы D_2 квадратын аламыз.

Бұл түрлендіру $w_2 = w_1 \cdot e^{\frac{i\pi}{4}}$ түрінде өрнектеледі. Нәтижесінде A_1 нүктесі $A_2 = \left(4\sqrt{2} + i2\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = (4+2i)(1+i) = 2+6i$ нүктесіне ауысады.

б) D_2 квадратын $\overrightarrow{A_2B}$ векторына параллель көшіру қалды. $B = 6+2i$ болғандықтан $\overrightarrow{A_2B} = 4-4i$ және $w = w_2 + 4 - 4i$

Сонымен, $w = w_2 + 4 - 4i = w_1 e^{i\frac{\pi}{4}} + 4 - 4i = 2ze^{i\frac{\pi}{4}} + 4 - 4i$.

Демек, ізделінді $w = az + b$ сызықты бейнелеуінде

$a = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $b = 4-4i$ болуы тиіс: $w = (\sqrt{2}+i\sqrt{2})z + (4-4i)$.

II. Сызықты-бөлшек функция

$w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $c \neq 0$, $ac - bd \neq 0$, бейнелеуі комплекс жазықтықта конформды және шеңберді шеңберге, шеңберге қарағанда симметриялы нүктелер жұбын осы шеңбер бейнесіне қарағанда симметриялы нүктелер жұбына көшіреді. Бұл бейнелеу $w_1 = z + G$,

$w_2 = \dfrac{1}{w_1}$, $\quad w = E + Fw_2$, $\quad E = \dfrac{a}{c}$, $\quad F = \dfrac{bc-ad}{c^2}$, $\quad G = \dfrac{d}{c}$ қарапайым бейнелеулердің композициясы ретінде орындалады.

Ескертулер:

1) әдетте, түзу де шектеусіз үлкен радиусты шеңбер ретінде қарастырылады.

2) егер A және A' нүктелері радиусы $R < \infty$ шеңбердің O центрінен шығатын бір сәуле бойында жатса және $OA \cdot OA' = R^2$ болса, онда A және A' нүктелері шеңберге қарағанда *симметриялы* деп аталады.

3) A және A' нүктелері Γ шеңберіне (радиусы шексіз үлкен болуы да мүмкін) қарағанда симметриялы болуы үшін A және A' нүктелері арқылы өтетін кез келген шеңбердің Γ шеңберіне перпендикуляр болуы қажетті және жеткілікті.

2-мысал. Жоғарғы жартыжазықтықты бірлік дөңгелектің ішкі бөлігіне бейнелейтін сызықты-бөлшек функцияны табу керек.

Шешуі. z_0 - жоғарғы жартыжазықтықтың бірлік дөңгелектің центріне көшетін нүктесі, яғни $w(z_0) = 0$ болсын. Жоғарыда аталған 2-ші ескертуге сәйкес, z_0-ге нақты оське қарағанда симметриялы $\overline{z_0}$ нүктесі $w = 0$ нүктесіне $|w| = 1$ шеңберіне қарағанда симметриялы $w = \infty$ нүктесіне бейнеленуі тиіс. Сондықтан, $w(z_0) = 0, \quad w(\overline{z_0}) = \infty$ шарттарына қанағаттандыратын сызықты-бөлшек функция $w = A \cdot \dfrac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}$, A-тұрақты сан, түрінде жазылады.

Бірақ A тұрақтысы кез келген бола алмайды, себебі: z нақты мән қабылдағанда w нүктесі бірлік шеңбер бойында жатуы тиіс, яғни $|w| = 1$.

Демек, $z = x$ үшін $|x - z_0| = |x - \overline{z_0}|$ болғандықтан: $1 = |w| = \left| A \cdot \dfrac{x - z_0}{x - \overline{z_0}} \right| = |A| \cdot \left| \dfrac{x - z_0}{x - \overline{z_0}} \right| = |A|$

Сонымен, $A = e^{i\varphi}$ және ізделінді функция: $w = e^{i\varphi} \dfrac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}, \quad \operatorname{Im} z_0 > 0$

Бұл функция φ нақты саны мен z_0 комплекс санының әртүрлі мәндерінде жоғарғы жартыжазықтықты бірлік дөңгелектің ішіне көшіретін бейнелеулердің ақырсыз жиынын анықтайды.

3-мысал. $|z| < 1$ бірлік дөңгелекті $|w| < 1$ бірлік дөңгелегіне бейнелейтін сызықты-бөлшек функцияны табу керек.

Шешуі: $|z| < 1$ дөңгелектің z_0 нүктесі $w = 0$ нүктесіне көшетін болсын.

Онда, z_0 -ге $|z|=1$ шеңберіне қарағанда симметриялы z_0' нүктесі $w=0$ нүктесіне $|w|=1$ шеңберіне қарағанда симметриялы $w=\infty$ нүктесіне көшуі тиіс.

z_0 және z_0' нүктелері $z=0$ нүктесінен шығатын бір сәуле бойында жататын болғандықтан:

$z_0' = kz_0$, $k>0$, және $|z_0|\cdot\left|z_0{}'\right|=1$, яғни $k\cdot|z_0|^2=1$, $k=\dfrac{1}{|z_0|^2}$;

Сонымен, $z_0' = kz_0 = \dfrac{z_0}{|z_0|^2} = \dfrac{z_0}{z_0\cdot\overline{z_0}} = \dfrac{1}{\overline{z_0}}$. Демек, $w(z_0)=0$ және $w\left(\dfrac{1}{\overline{z_0}}\right)=\infty$ шарттарына қанағаттандыратын сызықты-бөлшек функция $w = A\dfrac{z-z_0}{z-\dfrac{1}{\overline{z_0}}} = -A\overline{z_0}\cdot\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}\cdot z}$, A - комплекс тұрақты, түрінде анықталады.

$|z|=1$ шеңбері $|w|=1$ шеңберіне бейнеленетін болғандықтан, A тұрақтысы кез-келген бола алмайды. Оны, мысалы, $z=1$ және $|w|=1$ талаптары арқылы табуға болады:

$1=|w|=\left|-A\bar{z}_0\cdot\dfrac{1-z_0}{1-\bar{z}_0}\right|=\left|-A\bar{z}_0\right|$, себебі: $|1-z_0|=|1-\bar{z}_0|$; яғни $-A\bar{z}_0=e^{i\varphi}$.

Сонымен, $|z|<1$ дөңгелегі $|w|<1$ дөңгелегіне $w=e^{i\varphi}\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$ функциясы арқылы бейнеленеді. Бұл функция да φ және z_0 сандарынан тәуелді бейнелеулердің ақырсыз жиынын анықтайды.

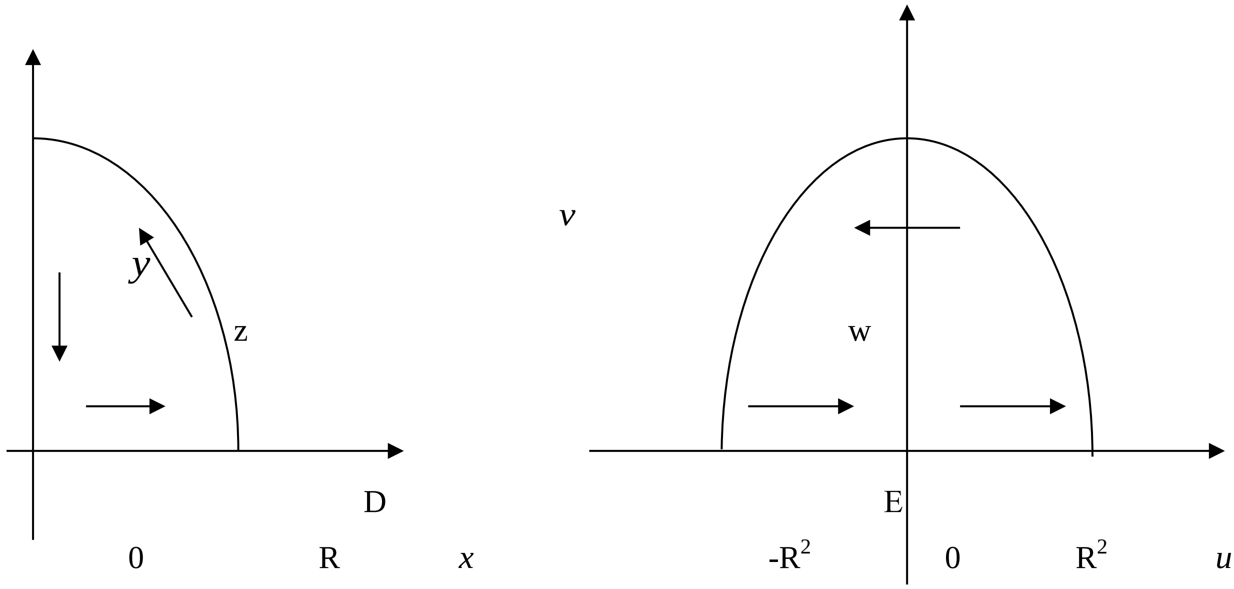
III. Дәрежелік функция

$w=z^n$, $n\in N$, дәрежелік функциясы $n>1$ болғанда қайтарымды емес. $w'(0)=0$ болғандықтан $z=0$ нүктесінде бейнелеудің конформдылығы бұзылады. Бірақ төбесі координаталар басы, шамасы $\alpha<\dfrac{2\pi}{n}$ болатын кез-келген бұрыш ішінде біржапырақты болады және $0<\varphi<\theta$ $(\theta<\dfrac{2\pi}{n})$ бұрышы $0<\varphi<n\theta$ бұрышына бейнеленеді.

4-мысал. $w=z^2$ функциясы арқылы радиусы R-ге тең дөңгелектің ширек бөлігі қандай облысқа бейнеленеді?

Шешуі. z және w айнымалыларын көрсеткіштік түрде өрнектейік:

$z=re^{i\varphi}, w=\rho e^{i\theta}$. Онда $w=z^2$ болғандықтан, $\rho e^{i\theta}=r^2e^{i2\varphi}$ немесе $\rho=r^2, \theta=2\varphi$ болып шығады.



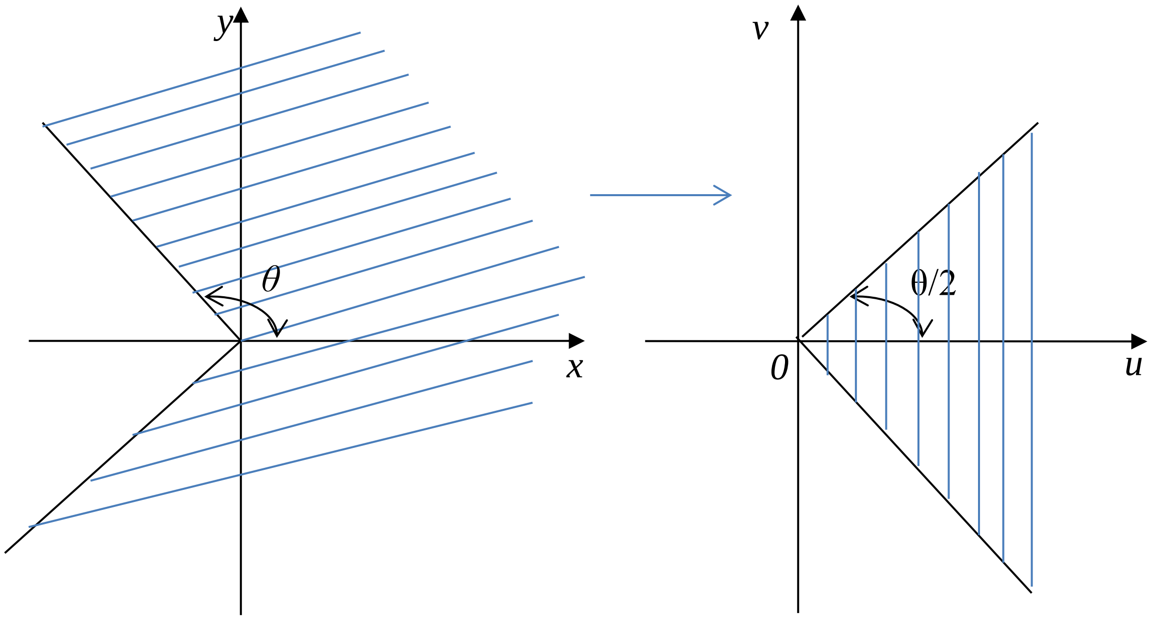
6-сурет

$w = z^2$ бейнелеуі бойынша D облысы шекарасы қандай қисыққа көшетіндігін анықтайық. D шекарасы “оң бағытталған” (яғни $z = 0$ нүктесінен бастап шекара бойынша қозғалғанда D облысы сол жақта қалады) деп ұйғарайық.

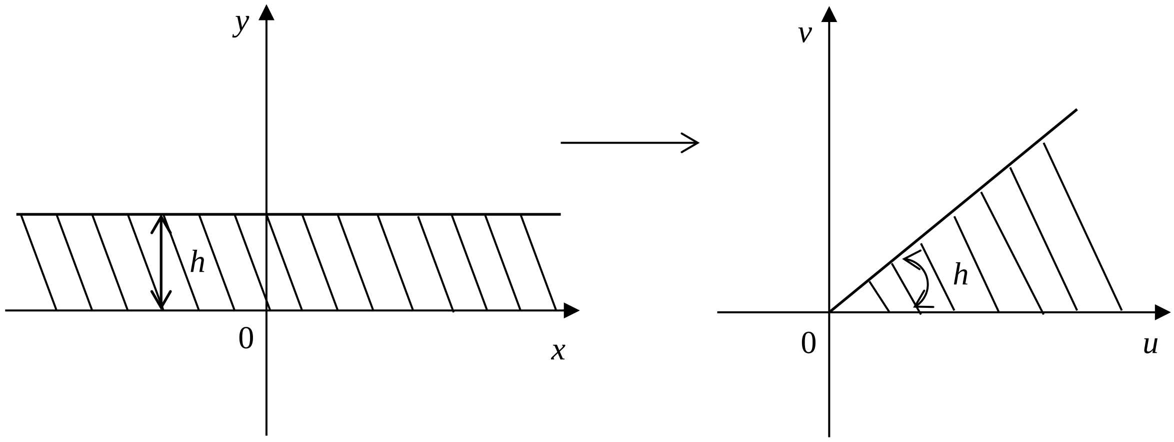
$\rho = r^2, \theta = 2\varphi$ формулаларынан $0 \le r \le R, \varphi = 0$ кесіндісінің (нақты ось бойындағы) $0 \le \rho \le R^2, \theta = 0$ кесіндісіне (C_w жазықтығының нақты осі бойында) бейнеленетіндігі, ал $r = R, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ ширек шеңберінің $\rho = R^2, 0 \le \theta \le \pi$ жарты шеңберіне бейнеленетіндігі және жорамал осьтің $0 \le r \le R, \varphi = \frac{\pi}{2}$ кесіндісі нақты осьтің $0 \le \rho \le R^2, \theta = \pi$, (яғни $[-R^2, 0]$) кесіндісіне көшетіндігі шығады

(6-сурет). D облысының әрбір ішкі нүктесі E жартыдөңгелегінің ішкі нүктесіне бейнеленеді (жартыдөңгелек z нүктелерінің бейнелерімен толық, ешқандай “тесіксіз” жабылады).

Ал, $w = \sqrt{z},$ $w(1) = 1,$ функциясы кез-келген $-\theta < \varphi < \theta$ ($0 < \theta < \pi$) бұрышын $-\frac{\theta}{2} < \varphi < \frac{\theta}{2}$ бұрышына конформды бейнелейді:



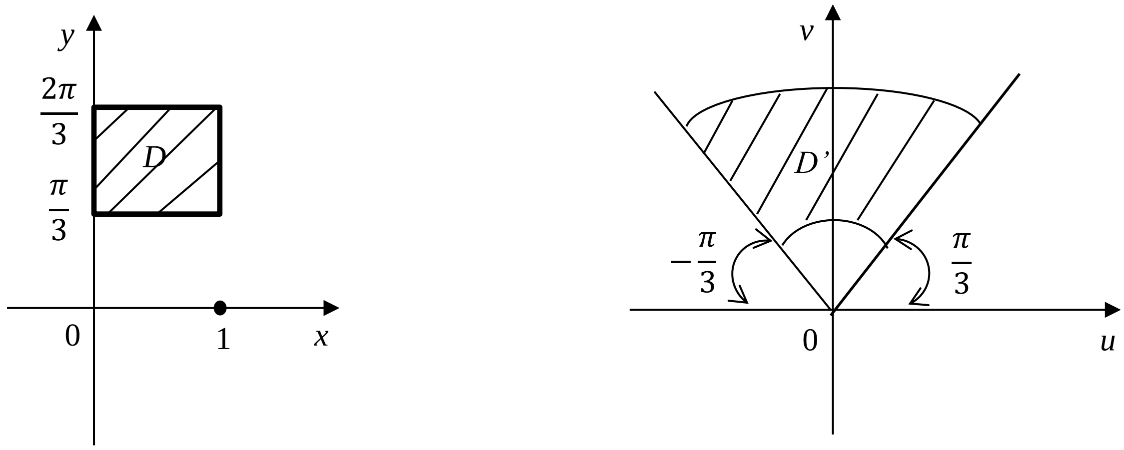
$w = e^z$ көрсеткіштік функциясы кез-келген $0 < y < h$ ($h < 2\pi$) горизонталь жолағын төбесі координаталар басында, шамасы h болатын бұрышқа конформды бейнелейді:



5-мысал. $w = e^z$ бейнелеуі бойынша $\operatorname{Re} z = 0,$ $\operatorname{Re} z = 1,$ $\operatorname{Im} z = \frac{\pi}{3},$ $\operatorname{Im} z = \frac{2\pi}{3}$ түзулерімен шектелген тіктөртбұрыштың бейнесін анықтау керек.

Шешуі: Берілген тіктөртбұрыш $0 \le \operatorname{Re} z \le 1$ және $\frac{\pi}{3} \le \operatorname{Im} z \le \frac{2\pi}{3}$ теңсіздіктерімен сипатталады. $|w| = |e^z| = |e^x \cdot e^{iy}| = e^x,$ $Argw = \operatorname{Im} z + 2k\pi i$ болғандықтан, тіктөртбұрыштың бейнесі үшін $e^0 \le |w| \le e^1$ және $\frac{\pi}{3} \le \arg w \le \frac{2\pi}{3}$ теңсіздіктері орындалады.

Демек, ізделінді бейне $|w| = 1$ және $|w| = e$ шеңберімен, $\arg w = \frac{\pi}{3}$ және $\arg w = \frac{2\pi}{3}$ сәулелерімен шектелген облыс болып табылады:



Жуковский функциясы деп аталатын $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ функциясы «ұшақ қанаты теориясында» маңызды қолданысқа ие және көптеген конформды бейнелеулерді құруда үлкен рөл атқарады. Ол жазықтықтың O және ∞ нүктелерінен басқа бөлігінде аналитикалық және $|z|<1$ дөңгелегінің ішін де, сыртын да $[-1,1]$ кесіндісі бойымен қиылған бүкіл $w-$ жазықтығына конформды бейнелейді.

Мысалы, $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ бейнелеуі C_z жазықтығындағы полярлық торды (шеңберлер мен сәулелерден жасалған) C_w жазықтығындағы фокустас (фокустары -1 және 1 нүктелері болатын) эллипстар мен гиперболалардан тұратын торға көшіреді. Бұл жерде әрбір эллипс пен гипербола шеңберлер мен сәулелер бейнелері арқылы екі рет «жабылады». [2]

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Балк М.Б., Виленкин Н.Я., Петров В.А. Математический анализ. Теория аналитических функций. - М., Просвещение, 1985.

2. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014.

3. Леонтьева Т.А. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Научный мир, 2014.

4. Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. – М.:Лань, 2015.

5. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015.

6. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. Изд.3-е, испр. и доп. - М., «Наука», 1966.

7. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 2018.

8. Шабунин М.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: БИНОМ, 2016.

ҒТАМР 30.19.00

ҚОЛДАНБАЛЫ МЕХАНИКАНЫ ОҚЫТУДА ОҚУ ҚҰРАЛЫ КЕШЕНІН ҚҰРАУШЫ ЛОГИКА-ҚҰРЫЛЫМДЫ СҰЛБАЛАР

М.Р. АХМЕТОВА

Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

Аңдатпа. Қолданбалы механика пәнін оқытуда курстың күрделілігіне, ерекшелігіне байланысты логика-құрылымды сұлбаларды қолдану әдістемесі қарастырылады. Заманауи талапқа сай ақпарат құралдары бағдарламаларын техникалық пәндерде қолдану негізгі мәселелерді шешуде үлкен роль атқарады. Оқу материалының негізгі элементі ретінде арнаулы техникалық терминдермен, белгілермен бекітілген ұғымдар айқындалады. Конструкторлық тәлім беруде, техникалық ой өрісін дамытуда логика-құрылымды сұлбаларды қолданумен сабақ жүргізу уақыт үнемдеу тиімділігімен маңыздылығын табады. Логика-құрылымды сұлбаларды қолдану білім алушылардың тақырып бойынша білімдерін жүйелендіру және олардың конструкция есептеулерінде практикалық мәнін жалпыландыруға арналғанын көрсетеді.

Түйін сөздер*:* қолданбалы механика ұғымдары, логика құрылымды сұлбалар, деформация, кернеу, негізгі болжамдар, серпімділік модулі, Гук заңы.

Аннотация. В изучении дисциплины прикладной механики рассматриваются методы применения логико-конструктивных схем в зависимости от сложности и специфики курса. Использование в технических дисциплинах программ современных средств информации играет большую роль в решении основных задач. В качестве основного элемента учебного материала определяются понятия, закрепленные специальными техническими терминами, знаками. Проведение занятий с использованием логико-конструктивных схем конструкторского обучения, развития технического кругозора находит важность экономии времени. Применение логико-конструктивных схем свидетельствует о том, что обучающийся предназначен для систематизации знаний по теме и обобщения их практического значения в расчетах конструкции.

Ключевые слова: понятия прикладной механики, конструктивные схемы логики, деформация, напряжение, основные прогнозы, модуль упругости, закон Гука.

Annotation. In the study of the discipline of applied mechanics the methods of application of logic-constructive schemes depending on the complexity and specificity of the course are considered. The use of modern means of information in technical disciplines plays an important role in solving the main problems. As the main element of educational material the concepts fixed by special technical terms, signs are defined. Conducting classes with the use of logical-structural schema design training , development technical Outlook finds the importance of saving time. The use of logic-constructive schemes indicates that the student is designed to systematize knowledge on the topic and generalization of their practical value in the design calculations.

Key words*:* concepts of applied mechanics, constructive schemes of logic, deformation, stress, basic forecasts, elastic modulus, Hooke's law.