**ҒТМАР 27.01.45.**

# «БҮТІН САНДАРДЫҢ БӨЛІНГІШТІГІ» ТАҚЫРЫБЫ БОЙЫНША ОЛИМПИАДАЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУ

**СЕЙЛОВА Р.Д.** [0000-0002-4666-8001]***, ТҰРЖАН А.Т.** [0000-0002-7404-989X]

*Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті*

**e-mail: roza_seilova@mail.ru*

**Аңдатпа.** Қазіргі таңда мектептерде олимпиадалық есептерді шешу үлкен маңызға ие. Мұндағы негізгі мақсат – оқушының интеллектуалдық қабілетін дамытумен қатар, математикалық қабілеттерін өз ортасында қолдануға үйрету. Ұлы математик К. Гаусс айтқандай: «Математика – ғылымдардың патшасы», - десек, «сандар теориясы – математиканың патшасы». Осы орайда, сандар теориясы бөлімі бойынша математика олимпиадаларындағы маңызды тақырыптардың бірі бүтін сандардың бөлінгіштігі болып саналады. «Бүтін сандардың бөлінгіштігі тақырыбы» математикалық олимпиадаларда жиі кездесетін, маңызды тақырыптардың бірі.

Олимпиадаға қатысушы оқушылар үшін өздігінен оқу, тапсырмалар үлгісі арқылы есепті түсіну үлкен маңызға ие. Кез келген уақытта, мұғалім оқушыларға кері байланыс бере алмауы мүмкін, Ал мұндай жағдайларда, әдістемелік құралдар, тапсырмалар үлгісі бар жинақтар оқушыларға таптырмас құрал. Оларды шешу үшін дәлелдеу, ойлау қабілеті қажет. Сондықтан мектеп математикасының дәстүрлі курсын үйірме сабақтары, элективті пәндер арқылы кеңейту керек, мұнда сандардың қасиеттерін зерттеуге көбірек уақыт бөлу керек. Бұл мақалада бүтін сандарды қалдықпен, қалдықсыз бөлу есептерін шешу әдістері, толық шешу үлгісімен нақты мысалдар келтіріледі. Оқушылардың есепті түсінгендігін білу үшін, алған білімді бекіту ретінде, оқушының өзіндік жұмыс жасауына тапсырмалар берілген. Тапсырмалар сыныптар бойынша күрделілігіне, оқушылардың түсіну деңгейіне қарай құрастырылды.

**Түйін сөздер:** бүтін сандардың бөлінгіштігі, қалдық, қалдықпен бөлу, толымсыз бөлінді, қалдықсыз бөлу, Евклид алгоритмі, ең үлкен ортақ бөлгіш, жай және құрама сандар, көбейткіштерге жіктер, канондық жіктелу.

Олимпиадалық есептерді ұтымды шеше білу оқушының математикалық қабілетінің жоғары деңгейінің бірі болып табылады. Олимпиадаларды өткізудегі негізгі мақсат жеңімпазды анықтау емес, оқушылар арасында математикалық интеллектуалды орта қалыптастыру. Осындай ортаны көп жерде қалыптастыру үшін де оқушыларды олимпиадаға дайындау жүйелі өтуі қажет. Бұл ретте, оқушының өздігінен дайындық жасай алуы да маңызға ие.

Алғашқы уақыттан олимпиадалар оқушының мектепте білімін арттыруға қызығушылығын арттыру үшін өткізілетін болса, жыл өткен сайын математикалық олимпиадалар оқушы мен мұғалім үшін нағыз шығармашылық байқауға айналуда. Бұл дегеніміз, ондағы негізгі жетістік - белгілі бір тақырып бойынша алынған білім көрсеткіші емес, оның берілген уақытта логикалық ойлауымен есеп шешімін құрастыра алуында.

Сандар теориясының негізгі мақсаты бүтін сандардың қасиеттерін қарастыру болып саналады. Ал, бұл теорияның маңызды есептері санның бөлінгіштігін білумен тығыз байланысты.

***Сандар теориясы*** математиканың ертеден келе жатқан бөлімдерінің бірі. Сандар теориясы бүтін сандардың негізгі қасиеттерін қарастырады. Бүтін сандарды көбейту және бөлумен байланысты есептерден пайда болғандықтан, кейде оны жоғарғы арифметика деп атайды. Ұлы математик Гаусс осы себепті де, «Математика – ғылымдар патшасы, ал математиканың патшасы - арифметика» деп жазып қалдырған. Кез келген математикалық жарыстарда теориялық-сандық есептердің берілетіні заңды.

***Қалдықсыз бөлу. Бүтін сандардың бөлінгіштік қасиеттері.***

$n$ – бүтін санын ( $n \in Z$ ) және $m$ – натурал санын ( $m \in N$ ) алайық. Егер $n=mp$ *теңдігі* орындалатындай $p$ ( $p \in Z$ ) саны табылса, $n$ саны $m$ санына қалдықсыз бөлінеді дейді, ал $m$ санын $n$ санының бөлгіші, $p$ саны $n$ санының еселігі дейді.

$a$, $b$ – бүтін сандары және $m$ – натурал саны үшін сандар қосындысының(айырымының), көбейтіндісінің қасиеттерін қарастырайық.

1. Егер $a$ және $b$ сандары $m$ санына бөлінсе, онда $a+b$ және $a$-$b$ сандары да $m$ санына бөлінеді.
2. Егер $a$ және $b$ сандары $m$ санына бөлінсе, онда кез келген бүтін $k$ және $l$ сандары үшін $ak+bl$ саны $m$ санына бөлінеді.
3. Егер $a$ саны $m$ санына бөлінсе, ал $b$ саны $m$ санына бөлінбесе, онда $a+b$ және $a$-$b$ сандары да m санына бөлінбейді.
4. Егер $a$ саны $m$ санына бөлінсе, ал m саны $k \in N$ санына бөлінсе, онда $a$ саны $k$ санына да бөлінеді.
5. Егер $a$ саны $m$ санына бөлінсе, ал $b$ саны $m$ санына бөлінбесе, онда $ab$ саны m санына бөлінеді.
6. Егер $a$ саны $(m, k) = 1$ болатындай, $m$ және $k$ сандарының әрқайсысына бөлінсе, онда $a$ саны $mk$ көбейтіндісіне бөлінеді.
7. Егер $a$ саны $m$ санына бөлінсе, ал $ak$ саны, кез келген $k \in N$ үшін, $mk$ санына бөлінеді.
8. Егер $ab$ саны m санына бөлінсе және $b$ саны $m$ санымен өзара жай болса, онда $a$ саны $m$ санына бөлінеді.

1-қасиеттің дәлелдеуін қарастырайық.

***Дәлелдеуі:*** Егер $a$ және $b$ сандары $m$ санына бөлінсе, онда $a=mp$, $b=qm$ болатындай $p \in Z$, $q \in Z$ сандары табылады.

Осыдан шығатыны,

$$a + b = mp + mq = (p + q)m,$$

$$a - b = mp - mq = (p - q)m.$$

$p+q$ және $p$-$q$ сандары бүтін болғандықтан да, $a+b$ және $a$-$b$ сандары да $m$ санына бөлінетіні шығады. Қасиет дәлелденді.

**Мысал-1.** *3n+2* және *8n+3 сандары* $p \neq 1$ натурал санына бөлінеді. $p$ санын табыңыз.

*Шешімі.* *3n+2* және *8n+3* *сандары* *p* санына бөлінетіндіктен, $8 \cdot (3n + 2) - 3 \cdot (8n + 3) = 7$ саны да $p$ санына бөлінуі қажет. Бірақ, 7 санына бөлінетін жалғыз натурал сан( $p \neq 1$ ) 7 саны ғана. Демек, $p = 7$. Мысалы, $n=4$ болғанда, 7-ге бөлінетін 14 және 35 сандарын аламыз.

*Жауабы:* $p = 7$

***Жай және құрама сандар.***

Егер $p>1$ натурал санының, өзі мен 1 санынан басқа, оң бүтін бөлгіштері болмаса, $p$ натурал саны жай сан деп аталады. Анықтамадан шығатыны, егер $p$ және $p_1$ жай сандар болып және $p$ саны $p_1$ санына бөлінсе, онда $p= p_1$. Бұдан бөлек, кез келген натурал сан үшін оның 1-ден өзге ең кіші оң бөлгіші жай сан болады.

$n>1$ натурал саны құрама сан деп аталады, егер оның, өзінен және 1 санынан басқа, кем дегенде бір оң бөлгіші болса.

1 саны жай сан да, құрама сан да емес.

**Мысал-2.** $a = 4 \cdot 16^{12} - 2^{40}$ саны 33-ке бөлінетінін дәлелдеңіз.

*Шешімі.* $4 \cdot 16^{12} - 2^{40} = 2^2 \cdot 4^{48} = 2^{50}$. Демек,

$$a = 2^{50} - 2^{40} = 2^{40}(2^{1-} - 1) = 2^{40}(2^5 - 1)(2^5 + 1) = 2^{40} \cdot 32 \cdot 33.$$

Осыдан шығатыны, $a$ саны 33-ке бөлінеді.

**Мысал-3.** $a = 8n^2 + 10n + 3$ саны кез келген $n$ натурал саны үшін құрама сан болатынын дәлелдеңіз.

*Шешімі.* $a$ саны кез келген $n$ натурал саны үшін құрама сан болады. Себебі, $a = 8n^2 + 10n + 3 = (2n + 1)(4n + 3)$, мұндағы *2n+1* және *4n+3* 1-ден өзге натурал сандар.

***Натурал сандардың канондық жіктелуі***

$n$ натурал санының екі натурал санның $ab$ көбейтіндісі түрінде берілуі *көбейткіштерге жіктелуі* деп аталады. Санның жай сандардың көбейтіндісі түрінде жазылуы *жай көбейткіштерге жіктелуі* деп аталады.

$n>1$ бүтін санының канондық жіктелуі деп $n$ санының мына түрде берілуін айтамыз:

$$n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s},$$

мұндағы, $p_1,\ p_2,\ldots,\ p_s$ - қос-қостан әртүрлі жай сандар, ал $k_1,\ k_2,\ldots,\ k_s$ - натурал сандар.

***Натурал санның бөлгіштерінің саны***

*Теорема.* $n$ натурал санының жай көбейткіштерге канондық жіктелуі $n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}$ болсын. Онда $n$ санының, 1 саны мен өзінен басқа, натурал бөлгіштерінің $\tau(n)$ саны мына формуламен өрнектеледі:

$$\tau(n)=(k_1+1)\cdot(k_2+1)\cdot\ldots\cdot(k_s+1).$$

Дәлелдеуі. $n$ натурал санының кез келген бөлгіші $d=p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdot\ldots\cdot p_s^{m_s}$ түрінде болады, мұндағы $m_i$ – $0\le m_1\le k_1$, …, $0\le m_s\le k_s$ шартын қанағаттандыратын бүтін сан. d санының әрбір бөлгішіне сәйкесінше реттелген $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_s$ сандарын, және керісінше, қоюға болады. Бұл жиынтықтағы бірінші позиция $k_1+1$ тәсілмен, екіншісі $k_2+1$, …, соңғысы $k_s\ +1$ тәсілмен толықтырыла алады. Алғашқы екі позицияны $(k_1+1)\cdot(k_2+1)$ тәсілмен толтыруға болады. Әрі қарай математикалық индукция әдісі арқылы әртүрлі $(k_1+1)\cdot(k_2+1)\cdot\ldots\cdot(k_s+1)$ тәсілмен, яғни

$$\tau(n)=(k_1+1)\cdot(k_2+1)\cdot\ldots\cdot(k_s+1).$$

Теорема дәлелденді.

***Мысал-4.*** 1440 санының барлық бөлгіштерінің санын, оның ішінде 1 санын және санның өзін қоса алғанда, табыңыз.

*Шешімі.* 1440 санының канондық жіктелуін жазамыз. 1440=5·288=5·9·32, онда

$$1440 = 2^5\cdot 5^1\cdot 3^2.$$

Осыдан шығатыны, $\tau(n)=(5+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1)=36$.

Жауабы: 36.

***Қалдықпен бөлу***

Барлық бүтін *a* саны бүтіндей *m* санына бөліне бермейді. *a* санын *b* санына бөлгенде артық қалатын сан бөлгіш *b* санынан аспайды: $a = qb + r$, $0 \le r < b$. Мұндағы *q* саны *толымсыз бөлінді* деп аталады. Бөлінгіш және толымсыз бөлінді мен бөлгіштің көбейтіндісінің *r* айырмасы *қалдық* деп аталады. Егер қалдық нолге тең болса, *a* саны *b* санына бөлінеді(қалдықсыз).

***Мысал-5.*** $a = 2^{2022} + 3^{2002}$ саны берілген. *a* санының соңғы цифрын және *a* санын 11-ге бөлгендегі қалдықты табыңыз.

*Шешімі.* *a* санының соңғы цифрын табайық. $2^k$ санының соңғы цифрлары әр төрт цифрмен қайталанып аяқталады($2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, ... .). Осыған байланысты $2^{2002}$ –нің соңғы цифры $2^2$-нің соңғы цифрындай, себебі $2002 = 4 \cdot 500 + 2$, яғни соңғы цияры 4 болады.

Осыған ұқсас, $3^{2002}$ –нің соңғы цифры $3^2$- нің соңғы цифрындай, яғни 9 болады.

Ізделінді *a* санының соңғы цифры, 4 + 9 =13 қосындысының соңғы циярындай, яғни 3 болады.

*a* санын 11-ге бөлгендегі қалдықты табайық. $2^k$ түріндегі санның 11-ге бөлгендегі қвлдықтары әр 10 сан сайын қайталанады. Сондықтан $2^{2002}$ –ін 11-ге бөлгендегі қалдық $2^2$-ін 11-ге бөлгендегі қалдықпен тең, $2002 = 10 \cdot 200 + 2$, яғни қалдық 4 болады.

Осыған ұқсас, $3^k$ түріндегі санның 11-ге бөлгендегі қалдықтары әр 5 сан сайын қайталанады. Сондықтан $3^{2002}$ –ін 11-ге бөлгендегі қалдық $3^2$-ін 11-ге бөлгендегі қалдықпен тең, $2002 = 5 \cdot 400 + 2$, яғни қалдық 9 болады.

Ізделінді, *a* санын 11-ге бөлгендегі қалдық, 4 + 9 =13 қосындысын 11-ге бөлгендегі қалдықпен тең болады, яғни 2 болады.

***Евклид алгоритмі***

Екі санның ең үлкен ортақ бөлгішін табу үшін үлкен санды кішісіне бөледі, егер нөлден өзге қалдық қалса, кіші санды қалдыққа бөледі; егер тағы да нөлден өзге қалдық қалса, бірінші қалдықты екіншісіне бөледі. Нөл қалдық қалғанға дейін амалды жалғастырады. Осы арқылы шыққан соңғы бөлгіш ең үлкен ортақ бөлгіштің өзі болады.

$$a = q_1 b + r_1 \qquad (0 \le r_1 < b),$$

$$b = r_2 q_2 + r_2 \qquad (0 \le r_2 < r_1),$$

…………………………….

$$r_{n-1} = r_n q_{n+1} + r_{n+1} \qquad (0 \le r_{n+1} < r_n),$$

$$r_n = r_{n+1} q_{n+2}.$$

$r_{n+1}$ саны $a$ және $b$ санының ең үлкен ортақ бөлгіші болып табылады.

***Мысал-6.*** $\dfrac{a}{b}$ бөлшегі – қысқартылмайтын бөлшек ( $a, b \in N$ ). Олай болса, $\dfrac{2a+b}{5a+3b}$ бөлшегі де қысқартылмайтын екендігін дәлелдеңіз.

*Шешімі.* $\dfrac{a}{b}$ бөлшегі қысқартылмайды, демек, $(a, b) = 1$. $5a+3b$ және $2a+b$ сандарының ең үлкен ортақ бөлгішін табайық. Евклид алгоритмін қолдана отырып,

$$5a + 3b = 2 \cdot (2a + b) + a + b,$$

$$2a + b = 1 \cdot (a + b) + a,$$

$$a + b = 1 \cdot a + b$$

Осыдан , $d = (5a+3b, 2a+b) = (2a+b, a+b) = (a+b, a)$.

Әрі қарай Евклид алгоритмі бойынша $a$ және $b$ санының ең үлкен ортақ бөлгіші табылады, бірақ шарт бойынша $(a, b) = 1$. Осыдан $d = (a, b) = 1$ екендігі шығады. Демек $\dfrac{2a+b}{5a+3b}$ бөлшегі қысқартылмайды.

### *Өзіндік жұмыс тапсырмалары үлгісі*

1. $a$ саны 3-ке еселі. $a$ санын 12-ге бөлгенде қалдық 2 болуы мүмкін бе?

2. Евклид алгоритмін қолдана отырып, 5160 және 16920 сандарының ең үлкен ортақ бөлгішін анықта

3. Барлық бүтін $n$ саны үшін

a) $n^5 - 5n^3 + 4n$ өрнегі мәнінің 120-ға бөлінетінін;

b) $n^2 - 3n + 5$ өрнегі мәнінің 121-ға бөлінетінін дәлелдеңіз.

4. $\dfrac{3n^3 - 8n^2 + 14n - 8}{3n - 5}$ бөлшегі қысқартылатындай, барлық $n$ натурал сандарды табыңыз.

5. Барлық бүтін оң $n$ саны үшін $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ бөлшегі қысқартылатын бөлшек екенін дәлелдеңіз.

6. Жиынның барлық элементтерін табыңдар: $S = \left\{ x \in Z \middle| \dfrac{x^3 - 3x + 2}{2x+1} \in Z \right\}$.

7. $a^4 + 4b^4$ жай сан болатындай, барлық *a, b* бүтін оң сандарын табыңыз.

8. $p^2 + 11$ санының тек алты бөлгіші болатындай барлық *p* жай сандарын табыңыз.

9. $n > 1$ болатындай әрбір *n* бүтін саны үшін $n^5 + n^4 + 1$ саны жай сан емес екендігін дәлелдеңіз.

10. Егер *p* – жай сан және *p>3* болса, $p^2 - 1$ саны 24-ке бөлінетінін дәлелдеңіз.

Оқушыларды дамуы көп жағдайда оқыту процесінің түріне қарайды. Егер оқушы дайын ақпаратты алып, оны қабылдап, есте сақтап, кейін қолданса, мұндай оқытудың нәтижесі– алынған білімді еске түсіру ғана болмақ. Ал егер оқушы белсенді түрде мысалдар бойынша талдау, салыстырулар жүргізіп отырса, нәтиже – белсенді оқыту болмақ. Өз ойын негіздей алып отырса, оқушыда жалпы есептерді шешудің ұтымды жолдары және жекелеген есептерде өз жауабын нақтылай алу қабілеттері сақталады. Олимпиадаға қатысушы әр оқушыға бұл ең маңызды нәрсе.

**Пайдаланылған әдебиеттер**

1. Andreescu, T.; Feng, Z., Mathematical Olympiads: Problems and Solutions from around the World, 1999–2000, Mathematical Association of America, 2002. – P. 3-14.

2. Основные особенности системы подготовки учащихся к олимпиадам по математике - методическое пособие на тему: «Методы и формы работы учителя математики при подготовке учащихся к олимпиадам» для 5 – 9 классов- КГУ «Сокологоровская средняя школа» 2014 г – 46 с. https://www.azbyka.kz/files/pdf/932/932.pdf

3. Лебедева С. В. Олимпиадная математика: учебно-методическое пособие для студентов, обучающихся по направлению подготовки педагогическое образование, профиль – математическое образование/ С. В. Лебедева. – Саратов, 2019. – 82 с. https://obuchalka.org/20191224116667/olimpiadnaya-matematika-uchebno-metodicheskoe-posobie-dlya-studentov-lebedeva-s-v-2019.html

4. Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов, Олимпиадная математика. Задачи на целые числа с решениями и указаниями, Москва Лаборатория знаний, 2020 – 274 с. https://ru.djvu.online/file/DRPxUO979T7LH

5. Justin Stevens, Olympiad Number Theory Through Challenging Problems, Third edition, 2013. – 129 p. https://s3.amazonaws.com/aops-cdn.artofproblemsolving.com/resources/articles/olympiad-number-theory.pdf

6. Konrad Pilch, Number Theory in Problem Solving, April 7, 2016. – 23 c. http://www.its.caltech.edu/~kpilch/olympiad/NumberTheory-Complete.pdf

## References

1. Andreescu, T.; Feng, Z., Mathematical Olympiads: Problems and Solutions from around the World, 1999–2000, Mathematical Association of America, 2002. – P. 3-14

2. The main features of the system of preparing students for Olympiads in mathematics - a methodological guide on the topic: "Methods and forms of work of a mathematics teacher in preparing students for Olympiads" for grades 5 – 9 - KSU "Sokologorovskaya secondary School" 2014 – 46 p https://www.azbyka.kz/files/pdf/932/932.pdf

3. Lebedeva S. V. Olympiad mathematics: an educational and methodical manual for students studying in the field of pedagogical education, profile – mathematical education/ S. V. Lebedeva. – Saratov, 2019. – 82 p. https://obuchalka.org/20191224116667/olimpiadnaya-matematika-uchebno-metodicheskoe-posobie-dlya-studentov-lebedeva-s-v-2019.html

4. N. L. Semendyaeva, M. V. Fedotov, Olympiad mathematics. Integer problems with solutions and instructions, Moscow Laboratory of Knowledge, 2020. – 274 p. https://ru.djvu.online/file/DRPxUO979T7LH

5. Justin Stevens, Olympiad Number Theory Through Challenging Problems, Third edition, 2013. –129 p.https://s3.amazonaws.com/aops-cdn.artofproblemsolving.com/resources/articles/olympiad-number-theory.pdf

6. Konrad Pilch, Number Theory in Problem Solving, April 7, 2016. – 23 c. http://www.its.caltech.edu/~kpilch/olympiad/NumberTheory-Complete.pdf

# РЕШЕНИЕ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ»

**СЕЙЛОВА Р.Д., ТҰРЖАН А.Т.**

*Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова*

**e-mail: roza_seilova@mail.ru*

**Аннотация.** В настоящее время в школах большое значение имеет решение олимпиадных задач. Основная цель учителя - научить ученика использовать свои математические способности и помочь развивать интеллектуальные способности. Еще великий математик К. Гаусс отметил: «Математика – царица наук, а

теория чисел - царица математики». Одной из важных и часто встречающихся тем на олимпиадах по математике по разделу теория чисел считается делимость целых чисел.

Большое значение для учащихся, участвующих на математических олимпиадах, имеет самостоятельное изучение темы, а также понимание решений задач через конкретные примеры. Учитель не всегда может быть с учащимся в контакте, в таких случаях незаменимым инструментом для учащихся являются методические пособия, наборы с образцами заданий. Для их решения требуется умение доказывать, умение рассуждать. Поэтому традиционный курс школьной математики следует расширить за счет занятий кружка, факультативов, где больше времени необходимо выделить на изучение свойств чисел. В данной статье приводятся методы решения задач деления целых чисел с остатком, без остатка, конкретные примеры с полной моделью решения. Для того чтобы учащиеся поняли задачу, в качестве закрепления полученных знаний даны задания на самостоятельную работу учащегося. Задания были составлены по классам в зависимости от сложности, уровня понимания учащимися.

**Ключевые слова:** делимость целых чисел, остаток, деление с остатком, деление без остатка, алгоритм Евклида, наибольший общий делитель, простые и составные числа, деления на множители, каноническое разложение.

## SOLVING OLYMPIAD PROBLEMS ON THE TOPIC «DIVISIBILITY OF INTEGERS»

**SEILOVA R.D.*, TURZHAN A.T.**

*Aktobe Regional University named after K. Zhubanov*

**e-mail: roza_seilova@mail.ru*

**Abstract.** Currently, the solution of Olympiad tasks is of great importance in schools. The main goal here is to teach the student to use his mathematical abilities in his environment, as well as to develop his intellectual abilities. As the mathematician K. Gauss said: "Mathematics is the king of sciences," he says, "number theory is the king of mathematics." In this regard, the divisibility of integers is considered one of the important topics in mathematics Olympiads in the number theory section. "The topic of divisibility of integers" is one of the most frequently encountered, important topics at mathematical Olympiads.

Of great importance for students participating in the Olympiad is independent reading, understanding the task through examples of tasks. At any time, the teacher may not give students feedback, and in such cases, methodological manuals, sets with sample assignments are an indispensable tool for students. This article provides methods for solving problems of dividing integers with remainder, without remainder, specific examples with a complete solution model. In order for students to understand the task, tasks for independent work of the student are given as consolidation of the acquired knowledge. The tasks were compiled by class, depending on the complexity, the level of understanding of the students.

**Keywords:** divisibility of integers, remainder, division with remainder, division without remainder, division without remainder, Euclid's algorithm, greatest common divisor, prime and composite numbers, division by multipliers, canonical decomposition.