УДК 517.968.72
МРНТИ 27.29.17

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИНВОЛЮЦИЕЙ.

К.И. УСМАНОВ, К.Ж. НАЗАРОВА, Б.Х. ТУРМЕТОВ

Международный Казахско-Турецкий университет им. А.Ясави

E-mail: y_kairat@mail.ru, gjnazarova@mail.ru.

Аннотация: В данной работе рассматривается многоточечная краевая задача для систем интегро – дифференциальных уравнении с инволюцией, когда производная от искомой функции содержится в правой части уравнения. Используя свойства инволютивного преобразования, задача сводится к исследованию многоточечной краевой здадачи для систем интегро-дифференциальных уравнении. Рассматривая интегральное уравнение II рода типа Фредгольма относительно ядра $K_2(t,s)$ и определив его резольвенту, можно избавится от производной искомой функции в правой части. Далее к данной задаче можно применит метод параметризации предложенный профессором Д.Джумабаевым. На основе этого решение задачи сводится к решению специальной задачи Коши и системы линейных уравнений. Используя методы решения интегральных уравнении, однозначная разрешимость исходной задачи, сводится к обратимости матрицы, которая зависит от исходных данных.

Ключевые слова: Система интегрально-дифференциальных уравнений, метод параметризации, параметр, краевые условия, однозначная разрешимость.

Исследование краевых задач интегро-дифференциальных уравнений были рассмотрены в работах многих авторов [1-7], однако с развитием компьютерных технологий, возникает вопрос о создание констуктивных методов получение решения поставленной задачи. Связи с этим, профессором Д.Джумабаевым был предложен метод параметризации решения линейной двухточечной краевой задачи для систем дифференциальных уравнений [8]. В работах [9-12] данный метод был применен к исследования краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнении и установлены критерии их однозначной разрешимости.

На отрезке $[0,T]$ рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dx(\mathrm{t})}{dt}+diag(a_1,a_2,\ldots,a_n)\frac{dx(\alpha(t))}{dt}=\sum_{k=1}^{m}\int_0^T K_1(t,s)x(s)\,ds+\int_0^T K_2(t,s)\dot{x}(s)\,ds+f(t),\quad \mathrm{t}\in[0,T],\quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} B_i x(\theta_i) = d\ , \quad d \in R^n, \tag{2}$$

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{m-1} < \theta_m = T,$$

где матрицы $K_1(t,s)$, $K_2(t,s)$ непрерывны соответственно на $[0,T]\times[0,T]$, n - мерная вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, матицы B_i, $i=\overline{1,m}$ - постоянные матрицы. $\alpha(t)-$ изменяющий ориентацию гомеоморфизм $\alpha:[0,T]\to[0,T]$ такой, что $\alpha^2(t)=\alpha(\alpha(\mathrm{t}))=\mathrm{t}$. Гомеоморфизм $\alpha(t)$ называют инволютивным преобразованием или просто инволюцией. На отрезке $[0,T]$ в качестве такого преобразования можно рассмотреть гомеоморфизм $\alpha(t)=\mathrm{T}-t$. Свойства инволютивного преобразования были изучены в работах Г.С.Литвинчука [13], Н.К.Карапетянца и С.Г.Самко [14] и др.

Рассмотрим значения уравнения (1) в точке $t=\alpha(t)$

$$\frac{dx(\alpha(t))}{dt} + diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{m}\int_0^T K_1(\alpha(t),s)x(s)\,ds + \int_0^T K_2(\alpha(t),s)\dot{x}(s)\,ds + f(\alpha(t)).$$

Из системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx(\mathrm{t})}{dt} + diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)\dfrac{dx(\alpha(t))}{dt} = \sum_{k=1}^{m}\int_0^T K_1(t,s)x(s)\,ds + \int_0^T K_2(t,s)\dot{x}(s)\,ds + f(t), \\ \dfrac{dx(\alpha(t))}{dt} + diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)\dfrac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{m}\int_0^T K_1(\alpha(t),s)x(s)\,ds + \int_0^T K_2(\alpha(t),s)\dot{x}(s)\,ds + f(\alpha(t)). \end{cases}$$

определим

$$diag(1-a_1^2, 1-a_2^2, \ldots, 1-a_n^2)\frac{dx(t)}{dt} = \int_0^T \left[K_1(t,s) - diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)K_1(\alpha(t),s)\right]x(s)ds +$$

$$+\int_0^T \left[K_2(t,s) - diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)K_2(\alpha(t),s)\right]\dot{x}(s)ds + \left[f(t) - diag(a_1, a_2, \ldots, a_n)f(\alpha(t))\right].$$

Предположим, что матрица $diag(1-a_1^2, 1-a_2^2, \ldots, 1-a_n^2)$ не является вырожденной, тогда она обратима и краевую задачу (1), (2) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^T \tilde{K}_1(t,s)x(s)ds + \int_0^T \tilde{K}_2(t,s)\dot{x}(s)ds + \tilde{f}(t), \quad \mathrm{t}\in[0,T], \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} B_i x(\theta_i) = d\ , \quad d \in R^n, \tag{4}$$

$$0=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_{m-1}<\theta_m=T,$$

где $\tilde{K}_1(t,s)=diag(1/(1-a_1^2),1/(1-a_2^2),\ldots,1/(1-a_n^2))\left[K_1(t,s)-diag(a_1,a_2,\ldots,a_n)K_1(\alpha(t),s)\right]$,

$\tilde{K}_2(t,s)=diag(1/(1-a_1^2),1/(1-a_2^2),\ldots,1/(1-a_n^2))\left[K_2(t,s)-diag(a_1,a_2,\ldots,a_n)K_2(\alpha(t),s)\right]$,

$\tilde{f}(t)=diag(1/(1-a_1^2),1/(1-a_2^2),\ldots,1/(1-a_n^2))\left[f(t)-diag(a_1,a_2,\ldots,a_n)f(\alpha(t))\right]$.

Условие А. Пусть интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$z(t)=\int_0^T\tilde{K}_2(t,s)z(s)ds+\Phi(t) \tag{5}$$

имеет единственное решение при любой функции $\Phi(t)\in C\left(\left[0,T\right],R^n\right)$.

Если выполнено условие А, то существует $\Gamma_2(t,s;1)$ - резольвента интегрального уравнения Фредгольма второго рода с ядром $\tilde{K}_2(t,s)$ и решение интегрального уравнения можно записать в виде

$$z^*(t)=\Phi(t)+\int_0^T\Gamma_2(t,s;1)\Phi(s)ds.$$

Пользуясь условием А, задачу (3), (4) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt}=\int_0^T\tilde{K}_1(t,s)x(s)ds+\tilde{f}(t)+\int_0^T\Gamma_2(t,\tau;1)\left[\int_0^T\tilde{K}_1(\tau,s)x(s)ds+\tilde{f}(\tau)\right]d\tau,\quad t\in\left[0,T\right], \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^m B_i x(\theta_i)=d\ ,\quad d\in R^n, \tag{7}$$

$$0=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_{m-1}<\theta_m=T,$$

В интегральном члене меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_0^T\Gamma_2(t,s;1)\int_0^T\tilde{K}_1(s,\tau)x(\tau)d\tau ds=\int_0^T\left(\int_0^T\Gamma_2(t,\tau;1)\tilde{K}_1(\tau,s)d\tau\right)x(s)ds=\int_0^T K^*{}_1(t,s)x(s)ds.$$

Введем обозначения

$$\hat{K}_1(t,s)=K^*{}_1(t,s)+\tilde{K}_1(t,s)\ ,\qquad \hat{f}(t)=\tilde{f}(t)+\int_0^T\Gamma_2(t,\tau;1)\tilde{f}(\tau)d\tau.$$

Тогда задачу (6), (7) запишем в виде

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^T \hat{K}_1 t,s)x(s)ds + \hat{f}(t), \quad \mathrm{t} \in [0,T], \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} B_i x(\theta_i) = d\ , \quad d \in R^n, \tag{9}$$

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{m-1} < \theta_m = T,$$

К краевой задачи (9), (10) применяем метод параметризации Д.Джумабаева [8], для этого берем натуральное число $l \in \mathrm{N}$ и по нему производим разбиение: $[0,T) = \bigcup_{r=1}^{m(l+1)} [t_{r-1}, t_r),$ где $t_{i(l+1)+j} = t_{i(l+1)} + \frac{h_{i+1}}{l},\ h_i = \theta_i - \theta_{i-1}, i = \overline{0, m-1},\ j = \overline{1, l+1}$. Обозначим $h = \max\{h_1, h_1, \ldots, h_m\}$, $\beta = \max_{t,s \in [0,T]} \|K(t,s)\|.$

На основе данного метода получим следующее утверждение:

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *условие А,*
2) *матрица* $diag(1-a_1^2, 1-a_2^2, \ldots, 1-a_n^2)$ обратима.

Тогда *для однозначной разрешимости задачи (8), (9) необходимо и достаточно существования* $l \in N$ *, при котором матрица* $Q_{*,*}(l)$ *обратима.*

Где l определяется из условия $q(l) = \beta T \frac{h}{l} < 1.$

Это исследование было частично поддержано Министерством образования и науки Республики Казахстан, Гранты № AP09259137

Список использованной литературы

1. Brunner H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations. Cambridge: Cambridge University Press; 2004.
2. Chen J, Huang Y, Rong H, Wu T, Zeng T. A multiscale Galerkin method for second-order boundary value problems of Fredholm integro-differential equation. J Comput Appl Math. 2015;290:633-640.
3. Du H, Zhao G, Zhao C. Reproducing Kernelmethod for solving Fredholm integro-differential equations withweakly singularity. J Comput Appl Math. 2014;255:122-132.

4. Maleknejad K, Attary M. An efficient numerical approximation for the linear Fredholm integro-differential equations based on Cattani's method. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. 2011;16:2672-2679.
5. Molabahrami A. Direct computation method for solving a general nonlinear Fredholm integro-differential equation under the mixed conditions: degenerate and non-degenerate Kernels. J Comput Appl Math. 2015;282:34-43.
6. Yuzbasi Së . Numerical solutions of system of linear Fredholm-Volterra integro-differential equations by the Bessel collocation method and error estimation. Appl Math Comput. 2015;250:320-338.
7. Wazwaz AM. Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications. Beijing and Springer-Verlag: Higher Education Press; 2011.
8. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation, U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. 29(1989), No 1, 34-46.
9. Джумабаев Д.С. Об одном методе решения линейной краевой задачи для интегродифференциального уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 7. С. 1209-1221.
10. Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integrodifferential equation, Computational Mathematics and Mathematical Physics, 53(2013), No 6, 736-758.
11. Dulat Dzhumabaev, “Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations”, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41:4 (2018), 1439-1462
12. А.Т. Асанова, А.А. Ермек. Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулері үшін үшнүктелі шеттік есептің шешімі туралы. Вестник Актюбинского регионального университета им. К. Жубанова, №1(63), март, 2021, Физико-математические науки, 14-25 б.
13. Литвинчук Г. С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. — Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1977.
14. Карапетянц Н.К., Самко С.Г. Уравнения с инволютивными операторами и их приложения // Ростов-н/Д. Изд-во РГУ. -1988. 188 с.

ИНВОЛЮЦИЯСЫ БАР ФУНКЦИОНАЛДЫ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН КӨПНҮКТЕЛІ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ БІРМӘНДІ ШЕШІМДІЛІГІ ТУРАЛЫ.

УСМАНОВ К.И. [1], НАЗАРОВА К.Ж. [1] , ТУРМЕТОВ Б.Х. [1]
[1]Қ.А.Ясауи атындағы Халықаралық Қазақ-Түрік университеті

E-mail: y_kairat@mail.ru, gjnazarova@mail.ru.

Андатпа. Бұл жұмыста ізделінді функцияның туындысы теңдеудің оң жағында болған кезде инволюциясы бар интегралдық – дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін көпнүктелі шеттік есеп қарастырылады. Инволютивті түрлендірудің қасиеттерін қолдана отырып, есеп интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін көпнүктелі шеттік есепті зерттеуге дейін келтіріледі. Фредгольм II типіндегі интегралдық теңдеуді өзекке қатысты қарастырып, оның резольвентасын анықтай отырып, теңдеу оң жақта ізделінді функцияның туындысы болмайтын интегралдық-дифференциалдық теңдеуге келтіріледі. Әрі қарай, есепкеа профессор Д.Жұмабаевпен ұсынылған параметрлеу әдісін қолдануға болады. Оның негізінде есепті шешу арнайы Коши есебі мен сызықтық теңдеулер жүйесін шешуге келтіріледі. Интегралдық теңдеулерді шешу теориясын қолдана отырып, қойылған есептің бірмәнді шешімділігі, бастапқы берілгендерге тәуелді матрицаның қайтымдылығына байланыстырылады.

Түйін сөздер: Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі, параметрлеу әдісі, параметр, шекті шарттар, бір мәнді ажыратымдылық.

ON THE UNAMBIGUOUS SOLVABILITY OF A MULTIPOINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH INVOLUTION.

USMANOV K.I.[1], K.ZH. NAZAROVA[1], TURMETOV B.K.[1]

[1]Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkistan, Kazakhstan

E-mail: y_kairat@mail.ru, gjnazarova@mail.ru.

Abstract. In this paper, we consider a multipoint boundary value problem for systems of integro–differential equations with an involution when the derivative of the desired function is contained in the right side of the equation. Using the properties of the involutive transformation, the problem is reduced to the study of a multipoint boundary value problem for systems of integro-differential equations. Considering an integral equation of the second kind of Fredholm type with respect to the kernel and determining its resolvent, the equation reduces to an integro-differential equation that does not contain the derivative of the desired function in the right part. Further, the parameterization method proposed by Professor D.Dzhumabaev can be applied to this problem. Based on this, the solution of the problem is reduced to solving a special Cauchy problem and a system of linear equations. Using the methods of solving integral equations, the unambiguous solvability of the original problem is reduced to the reversibility of the matrix, which depends on the initial data.

Key words: System of integral differential equations, parametrization method, parameter, boundary conditions, unambiguous solvability.