УДК 517.946;517.588

МРНТИ 27.31.17

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПОСТРОЕНИЯ НОРМАЛЬНО-РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ

Ж.Н. ТАСМАМБЕТОВ[1], Ж.К. УБАЕВА[1]

[1]Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан

E-mail: tasmam@rambler.ru; zhanar_ubaeva@mail.ru

Аннотация. Исследована возможности существования нормально-регулярных уравнений вырожденных гипергеометрических систем, полученных путем предельного перехода из системы Лауричелла. Изучены их некоторые свойства. Доказаны связь установленных нормально-регулярных решений вырожденных систем с введенной В.И. Художниковым новой функцией представляющей частное решение изучаемой системы.

Ключевые слова: Нормально-регулярные решения, вырожденная, гипергеометрическая, система, функция, построения.

1. Введение. Французский математик П. Аппель определил в 1880 году четыре гипергеометрических ряда $F_1 - F_4$ двух переменных [1]. Лауричелла (1893) обобщил функций Аппеля $F_1 - F_4$ на случай n переменных F_A, F_B, F_C, F_D. Частные случаи рядов Лауичелла встречаются в исследовании по гиперсферическим гармоникам [2, с.236].

В данной работе нас интересует вырожденные функций многих переменных связанные с функцией Лауричелла $F_{\mathbf{B}}$.

Функция Лауричелла n переменных

$$F_B\left(\begin{matrix}(\alpha_n), & (\beta_n)\\ \gamma & \end{matrix}\middle|(z_n)\right) = \sum_{m_1,\dots m_n} \frac{(\alpha_1)_{m_1}\dots(\alpha_n)_{m_j}(\beta_1)_{m_1}\dots(\beta_n)_{m_j} z_1^{m_1}\dots z_n^{m_n}}{(\gamma)_{m_1+\dots+m_n} m_1! m_n!}, \tag{1.1}$$

$|z_k| < 1, k = \overline{1,n}$, является частным решением системы

$$z_i(1-z_i)\frac{\partial^2 w}{\partial z_i^2} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + [\gamma - (\alpha_i + \beta_i + 1)z_i]\frac{\partial w}{\partial z_i} - \alpha_i\beta_i w = 0, i = \overline{1,n}, \tag{1.2}$$

где использованы обозначения $(\alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), (z_n) = (z_1, z_{2,\dots,} z_n)$.

Вырожденные функции, получающиеся из F_B некоторым числом предельных переходов следуя В.И. Художникову обозначим через $\Phi_{B,n}^{k,l}$, где $0 \le k, l \le n, n-1 \le k+n \le n$, $n-$ число переменных [3,с.836]. Наряду с решением $\Phi_{B,n}^{k,l}$ существуют и нормально-регулярные решения вида [4]:

$$w(z_1, z_{2,...,} z_n) = \exp(\alpha_{1,0,...,0} \cdot z_1 + \alpha_{0,1,...,0} \cdot z_2 + ... + \alpha_{0,...,1} \cdot z_n) \cdot z_1^{\rho_1} \cdot z_2^{\rho_2} \cdot ... \cdot z_n^{\rho_n} \cdot \\ \cdot \sum_{m_1,...,m_n=0}^{\infty} A_{m_1,m_2,...,m_n} \cdot z_1^{m_1} \cdot z_2^{m_2} \cdot ... \cdot z_n^{m_n}, A_{0,...,0} \neq 0 \tag{1.3}$$

где $\rho_t\,(t=\overline{1,n}), A_{m_1,m_2,...,m_n}\,(m_1,...,m_n = 0,1,2,...),\quad \alpha_{1,0,...,0}, \alpha_{0,1,0,...,0},..., \alpha_{0,...,0,1}-$ неизвестные постоянные.

Целью данной работы является исследования возможности существования новых нормально-регулярных решений вырожденных гипергеометрических систем, полученных из системы Лауричеллы (1.2) путем предельного перехода. Изучение их некоторых свойств и связь с функцией В.И. Художникова $\Phi_{B,n}^{k,l}$, а также особенности В введении приводится краткое сведение о развитии гипергеометрических функции многих переменных, вид нормально-регулярного решения n переменных. Во второй части приводится общий вид вырожденной гипергеометрической системы полученный из системы Лауричелла (F_B) и некоторые гипергеометрические функции двух переменных. В третьей части эти результаты обобщены на случай n переменных.

2. Вырожденные гипергеометрические системы полученные из системы Лауричелла

Постановка задачи. Объектом исследования являются ряд частных случаев вырожденных гипергеометрических систем полученных из обобщенной системы Лауричелла F_B вида

$$z_i(1-z_i)\frac{\partial^2 w}{\partial z_i^2} + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + [\gamma - (\alpha_i + \beta_i + 1) z_i]\frac{\partial w}{\partial z_i} - \alpha_i \beta_i w = 0, i = \overline{1,k}, \tag{2.1$_1$}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + (\gamma - z_i)\frac{\partial w}{\partial z_i} - \alpha'_{i-k} w = 0, i = \overline{k+1, k+l} \tag{2.1$_2$}$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + \gamma \frac{\partial w}{\partial z_i} - w = 0, i = \overline{k+l+1, n}, \tag{2.1$_3$}$$

где уравнения (2.1$_2$) получено из (1.1) с помощью предельного перехода по параметрам β $n-k$ раз, а уравнение (2.1$_3$) по параметрам α $n-k-l$ раз. В результате получена система

(2.1), в которой k первых уравнения совпадают с k первыми уравнениями системы (1.1), l следующих уравнений имеют вид (2.1₂) и остальные $n-k-l$ уравнений представляется в виде (2.1₃). В.И. Художников [3,с.836] совместно изучая систему (2.1) ввёл новую вырожденную функцию

$$\Phi_{B,n}^{k,l}\left(\begin{matrix}(\alpha_k), & (\alpha_l^{'}), & (\beta_k) \\ & \gamma & \end{matrix}\middle|(z_n)\right)=\sum_{i_1,\ldots,i_n}\frac{\Pi(\alpha_k)_{i_k}\cdot(\beta_k)_{i_k}}{(\gamma)_{\sum i_n}}\cdot\Pi(\alpha_1^{'})_{i_{l+k}}\cdot\Pi\frac{(z_n)^{i_n}}{i_n!},\qquad(2.2)$$

где использованы сокращения и обозначения [3,5] :

$$\Pi(\alpha_n)_{i_n}=\Pi_{k=1}^{n}(\alpha_k)_{i_k},\ \sum i_n=\sum_{k=1}^{n} i^k,\ \sum i_1,\ldots,i_n=\sum_{i_1=0}^{\infty}\cdot\sum_{i_2=0}^{\infty}\cdot\ldots\cdot\sum_{i_n=0}^{\infty}\cdot(\ldots),$$

которая является частным решением системы (2.1). Ряд (2.2) сходиться абсолютно в области $|z_i|<1, i=\overline{1,k}$.

Он изучил некоторые её свойства привёл интегральное представление и рассматривал интегральные уравнения Вольтерра с ядрами, содержащими эту функцию. Однако, до сих пор, остается не исследованными возможности существования нормально-регулярных решений вида (1.3) и их связь с введёнными функциями В.И. Художникова $\Phi_{B,n}^{k,l}$. Такие исследования являются актуальными, поскольку, не исследованными остаются существующие решения вида (1.3) вблизи иррегулярной особенности $(\infty,\infty,\ldots,\infty)$.

Определение 2.1. Вырожденные гипергеометрические функции двух переменных

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}_1(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1;\gamma;x,y)=\Phi_{B,2}^{1,1}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2^{'}, & \beta_1 \\ & \gamma & \end{matrix}\middle|x,y\right),\mathrm{E}_2(\alpha_1,\beta_1;\gamma;x,y)=\Phi_{B,2}^{0,1}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \beta_1 \\ \gamma & \end{matrix}\middle|x,y\right),\\ &\Phi_2(\alpha_1,\alpha_2;\gamma;x,y)=\Phi_{B,2}^{0,2}\left(\begin{matrix}\alpha_1, & \alpha_2^{'} \\ \gamma & \end{matrix}\middle|x,y\right),\Phi_3(\alpha_1;\gamma;x,y)=\Phi_{B,2}^{0,2}\left(\begin{matrix}\alpha_1 \\ \gamma\end{matrix}\middle|x,y\right)\end{aligned}\qquad(2.3)$$

полученные из (2.2) называют вырожденными функциями Гумберта [3].

Они получены из функций Аппеля F_3 и хорошо исследованы [1]. Как известно, функция Аппеля F_3 является частным случаем системы Лауричелла (F_B) (1.1). Поэтому, путем предельного перехода из неё будут получены системы решениями которых являются вырожденные гипергеометрические функции двух переменных (2.3). Однако, в различных сочетаниях приведенных в (2.1) трёх уравнений.

3. Свойства нормально регулярных решений вырожденной системы состоящей из n уравнений

Приведенные в предыдущем пункте вырожденные гипергеометрические функции Гумберта двух переменных (2.3) можно обобщить на случай n переменных.

Теорема 3.1. Вырожденная система

$$\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_1 \partial z_2} + (\gamma - z_i)\frac{\partial w}{\partial z_i} - \alpha_i w = 0, (i = \overline{1,n}) \tag{3.1}$$

состоящая из n уравнений полученная путем предельного перехода из системы Лауричелла F_B вблизи регулярной особенности $(0,0,...,0)$ имеет 2^n линейно-независимых частных решений, одним из которых являются вырожденная гипергеометрическая функция от n переменных Гумберта

$$\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\begin{matrix}\alpha_n^{'} \\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right) = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1^{'})_{m_1}...(\alpha_n^{'})_{m_n}}{(\gamma)_{m_1+...+m_n}} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\frac{z_2^{m_2}}{m_2!}. \tag{3.2}$$

Действительно, решение системы (3.1) состоящих из n уравнений ищется в виде ряда от n переменных

$$w(z_1,...,z_n) = z_1^{\rho_1}...z_n^{\rho_n} \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} A_{m_1,...,m_n} z_1^{m_1}...z_n^{m_n}, A_{0,...,0} \neq 0 \tag{3.3}$$

где $\rho_t(t = \overline{1,n}), A_{m_1,...,m_n}(m_1,....,m_n = 0,1,2,...) -$неизвестные постоянные.

Из системы характеристических функции $L_t[z_1^{\rho} ,...,z_n^{\rho_n}],(t = \overline{1,n})$ определим систему определяющих уравнений относительно особенности $(0,0,...,0)$:

$$f_{0,...,0}^{(t)}(\rho_1,\rho_n) = \rho_t(\rho_t - 1 + \sum_{t=1,i\neq t}^{n} \rho_t + \gamma) = 0, \tag{3.4}$$

$(t = \overline{1,n})$ которая имеет 2^n корней: $(\rho_1 = 0,...\rho_n = 0)$; $(\rho_1 = 1-\gamma,...\rho_2 = 0,...,\rho_n = 0)$, …, $(\rho_1 = 1-\gamma,...\rho_2 = 1-\gamma,...,\rho_n = 1-\gamma)$. Они являются показателями 2^n регулярных решений системы (3.1) в виде ряда (3.3). Неизвестные коэффициенты $A_{m_1,...,m_n}(m_1,...,m_n = 0,1,2,...)$ определяются из последовательностей рекуррентных соотношений. Построенное таким образом решение $w_{n_1}(z_1,...,z_n)$ определяет вырожденную гипергеометрическую функцию n переменных **(**3.3**).**

Нас интересует связь этого решения с нормально-регулярными решениями системы (3.1).

Теорема 3.2. Вспомогательная система полученная из системы (3.1) с помощью преобразования

$$w(z_1,...,z_n) = \exp(\alpha_{\underbrace{1,0,...,0}_{n}} z_1 + ... + \alpha_{\underbrace{0,...,0,1}_{n}} z_n)U(z_1,...,z_n) \tag{3.5}$$

где $\alpha_{1,0,...,0},...,\alpha_{0,...,0,1}$ –неизвестные постоянные, при выполнении двух необходимых условий

$$\alpha_{1,0,...,0}^2-\alpha_{1,0,...,0}=0,...,\alpha_{0,...,0,1}^2-\alpha_{0,0,...,0,1}=0 \qquad (3.6)$$

и (3.4) имеют n нормально-регулярных решений.

На самом деле, (3.6) имеет 2^n корней: $(\alpha_{1,0,...,0}=0,\alpha_{0,1,0,...,0}=0,...,\alpha_{0,0,...,0,1}=0)$, $(\alpha_{1,0,...,0}=1,\alpha_{0,1,0,...,0}=0,...,\alpha_{0,...,0,1}=0)$,…, …, $(\alpha_{1,0,...,0}=0,..,\alpha_{0,0,...,0,1}=0)$, …, $(\alpha_{1,0,...,0}=1,\alpha_{0,1,0,...,0}=1,...,\alpha_{0,0,...,0,1}=1)$.

Из них, только начальные $n+1$ корней определяют совместные присоединенные системы уравнений. Как и раньше, при $(\alpha_{1,0,...,0}=0,..,\alpha_{0,0,...,0,1}=0)$ получаем исходную систему (3.1) с 2^n решениями вида (3.3). На основании теоремы 3.1 первое решение этой присоединенной системы соответствующее показателю $(\rho_1=0,...\rho_n=0)$ определяет функцию $\Phi_{B,n}^{0,n}$, то есть справедливо равенство

$$w_{n-1}(z_1,z_2,...,z_n)=\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\begin{matrix}\alpha_n^{'}\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right). \qquad (3.7)$$

Последующие n присоединенных систем имеют нормально-регулярные решения

$$\begin{aligned}
&w_{n-1}(z_1,z_2,...,z_n)=e^{z_1}\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\gamma-\alpha_1^{'},-...,-\alpha_n^{'},\alpha_2^{'},...,\alpha_n^{'};\gamma;-z_1,z_2-z_1,...,z_n-z_1\right),\\
&w_{n-2}(z_1,z_2,...,z_n)=e^{z_2}\Phi_{B,n}^{0,n}(\alpha_1^{'},\gamma-\alpha_2^{'}-\alpha_1^{'}-,...,-\alpha_n^{'},\alpha_0^{'},...,\alpha_n^{'};\\
&\gamma;z_1-z_2,-z_2,z_3-z_2,...,z_n-z_2),\\
&-----------------------------------\\
&w_{n,n+1}(z_1,z_2,...,z_n)=e^{z_n}\Phi_{B,n}^{0,n}(\alpha_1^{'},...,\alpha_{n-1}^{'},\gamma-\alpha_n^{'}-\alpha_1^{'},-...,-\alpha_{n-1}^{'};\\
&\gamma;z_1-z_n,...,z_{n-1}-z_n,z_n).
\end{aligned} \qquad (3.8)$$

Все построенные $w_{np}(z_1,...,z_n)(p=\overline{n+1})$ решений соответствуют показателю $(\rho_1=0,\rho_2=0,...,\rho_n=0)$, а все соответствующие присоединенные системы имеют одинаковые системы определяющих уравнений относительно особенности $(0,0,...,0)$. Переходим к свойствам нормально-регулярных решений.

Теорема 3.3.Имеют место равенства

$$e^{z_1}\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\begin{matrix}\alpha_n^{'}\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right)=\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\gamma-\alpha_1^{'},-...,-\alpha_n^{'},\alpha_2^{'},...,\alpha_n^{'};\gamma;-z_1,z_2-z_1,...,z_n-z_1\right), \qquad (3.9_1)$$

$$e^{z_2}\Phi_{B,n}^{0,n}\left(\begin{matrix}\alpha_n^{'}\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right)=\Phi_{B,n}^{0,n}(\alpha_1^{'},\gamma-\alpha_2^{'}-\alpha_1^{'}-,...,-\alpha_n^{'},\alpha_3^{'},...,\alpha_n^{'};\gamma;z_1-z_2,-z_2,z_3,...,z_n-z_2), \qquad (3.9_2)$$

—————————————————————————————

$$e^{z_n}\Phi^{0,n}_{B,n}(\alpha_1',...,\alpha_{n-1}',\gamma-\alpha_n'-\alpha_1',-...,-\alpha_{n-1}';\gamma;z_1-z_n,...,z_{n-1}-z_n,z_n) \qquad (3.9_n)$$

Используя равенство (3.7) можно получить справедливость еще n равенств.

$$\Phi^{0,n}_{B,n}\left(\begin{matrix}\alpha_n'\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right)=e^{z_1}\Phi^{0,n}_{B,n}\left(\gamma-\alpha_1',-...,-\alpha_n',\alpha_2',...,\alpha_n';\gamma;-z_1,z_2-z_1,...,z_n-z_1\right), \qquad (3.10_1)$$

$$\Phi^{0,n}_{B,n}\left(\begin{matrix}\alpha_n'\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right)=e^{z_2}\Phi^{0,n}_{B,n}(\alpha_1',\gamma-\alpha_2'-\alpha_1'-,...,-\alpha_n',\alpha_3',...,\alpha_n';\gamma;z_1-z_2,-z_2,z_3,...,z_n-z_2), \qquad (3.10_2)$$

——————————————————————————————————————

$$\Phi^{0,n}_{B,n}\left(\begin{matrix}\alpha_n'\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_n)\right)=e^{z_n}\Phi^{0,n}_{B,n}(\alpha_1',...,\alpha_{n-1}',\gamma-\alpha_n'-\alpha_1',-...,-\alpha_{n-1}';\gamma;z_1-z_n,...,z_{n-1}-z_n,-z_n). \qquad (3.10_n)$$

Выводы. Таким образом в данной работе были изучены возможности существования нормально-регулярных решений ряда частных случаев вырожденных гипергеометрических систем (2.1) полученных из обобщенной системы Лауричелла (F_B) (1.1). Вырожденная система (2.1) состоит из трёх уравнений. Каждое уравнение в свою очередь, также являются системами состоящие из некоторого количества уравнений. Каждый из них имеют свои интересные особенности решения. Например, решениями частных случаев (2.1_1) являются функции Гаусса, Аппеля (F_1-F_4) , гипергеометрические функции со списка Горна. Решениями частных случаев (2.1_2) являются функции Куммера, вырожденные гипергеометрические функции. Решениями (2.1_3) являются функции сводящаяся к функциям Бесселя одной и многих переменных [6,7,8].

Уникальность введенной новой функции (2.2) В.И. Художникова в том, что они является общим частным решением системы (2.1). Данная работа дополняет исследования В.И. Художникова, так как рассмотрена до сих пор, не исследованная, возможности существования нормально-регулярных решений вида (1.3) и их связь с функцией Художникова $\Phi^{k,l}_{B,n}$.

Использованная авторами классический подход с применением метода Фробениуса-Латышевой [4] позволяет взглянуть на вырожденную систему (2.1) всесторонне, учитывая регулярные и иррегулярные особые кривые. Особенно при построении решения неоднородных вырожденных систем.

В третьей части эти результаты обобщены на случай n переменных в теоремах 3.1 и 3.2. В (3.8)-(3.10) использованы обобщения формулы Эрдейи

$$\Phi_2\left(\gamma-\alpha_1-\alpha_2^{'},\gamma;-z_1,z_2-z_1\right)=\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\frac{\left(\gamma-\alpha_1-\alpha_2^{'}\right)_{m_1}(\alpha_2^{'})_{m_2}(-z_1)^{m_1}(z_2-z_1)^{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2}m_1!m_2!}.$$

В работе больше внимание обращается на построения решении систем (2.1_2), поскольку, в (2.1) иррегулярную особенность имеет только это уравнение и нормально-регулярные решения существуют за счёт этого уравнения.

Список использованной литературы

1. Appell P. and Kampe de Feriet J., Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques. - Polynomes d Hermite:Gauthier-Villars, New York, 1944.
2. Bateman G. and Erdeyi A., Higher transcendental functions. Hypergeometric function. M: Science, 1965.
3. В.И. Художников. Две новые вырожденные гипергеометрические функции многих переменных и интегральные уравнения с ними //Дифф.уравнения, 2003, том 39, №6, с.835-843.
4. Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Актобе: ИП Жандилдаева С.Т., 2015. -464 с.
5. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И., Интегралы и ряды: Дополнительные главы. М., 1986.
6. Srivastava H. M., Karlsson P.W., Multiple Gaussian Hypergeometric Series. New York. 1985, 415 p.
7. Тасмамбетов Ж.Н., Об иррегулярных особых кривых систем типа Уиттекера//Вестник Сам.гос.тех. университета. Серия физ-мат науки. 2013, №4(11). С.25-33.
8. Babister A.W., Trancendental function satisfying nonhomogeneous linear dierential equations. New York-London. 1967, 414 p.

ТУЫНДАЛҒАН ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ҚАЛЫПТЫ-ТҰРАҚТЫ ШЕШІМДЕРІН ҚҰРУ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ ТУРАЛЫ

Ж.Н. ТАСМАМБЕТОВ[1], Ж.К. УБАЕВА[1]
[1] Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан
E-mail: tasmam@rambler.ru; zhanar_ubaeva@mail.ru

Аңдатпа. Лауричелла жүйесінен шекке көшу арқылы алынған гипергеометриялық жүйелердің қалыпты тұрақты теңдеулерінің болуы зерттелген. Олардың кейбір қасиеттері зерттелді. В.И. Художников функциясымен байланысы, сондай-ақ біртекті емес жүйелердің жеке дербес жағдайларының шешімдерін құру ерекшеліктері дәлелденді.

Түйінді сөздер: Қалыпты-тұрақты шешімдер, туындалған, гипергеометриялық, жүйе, функция, құру.

ON THE FEATURES OF CONSTRUCTING NORMALLY REGULAR SOLUTIONS OF DEGENERATE SYSTEMS

Zh.N. TASMAMBETOV[1], Zh.K. ABAYEVA[1]

[1]Aktobe Regional University named after K.Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan

e-mail: tasmam@rambler.ru; zhanar_ubaeva@mail.ru

Abstract. The possibility of existence of normal-regular equations of degenerate hypergeometric systems obtained by passing to the limit from the Lauricella system is investigated. Some of their properties have been studied. The connection between the established normal-regular solutions of degenerate systems and the one introduced by V.I. Khudozhnikov with a new function representing a particular solution of the system under study.

Key words: System, degenerate, hypergeometric, normal-regular, by passage to the limit, function, variables.