ҒТАМР 27.29.15

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ДӘРЕЖЕЛІК ҚАТАРМЕН ӨРНЕКТЕУДІҢ ӘДІСТЕМЕСІ

Ж.А.САРТАБАНОВ, А.К.ШАУКЕНБАЕВА, М.Ж.ТАЛИПОВА

Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік мемлекеттік университеті

Ақтөбе, Қазақстан

Аңдатпа. Бұл жұмыста мектеп курсынан белгілі шешімдері негізгі тригонометриялық функциялар болып келетін дифференциалдық теңдеулер қарастырылып, оларды элементар жолмен дәрежелік қатар түрінде өрнектеудің әдісі көрсетілген. Демек, оқушы тригонометриялық функцияларды көпмүшеліктермен жуықтауға болатындығымен танысады. Сонымен қатар дифференциалдық теңдеудің шешімдері MatLab ортасында компьютерді қолдану арқылы көрсетілген.

Түйін сөздер: дифференциалдық теңдеулер, итерация, интеграл, элементар функция, тригонометриялық функция.

Аннотация. В данной работе рассматривается дифференциальные уравнения из учебника школьной математики, решениями которого является основные тригонометрические функции. Эти решения элементарным способом представляется в виде степенных рядов. Следовательно, школьник имеет возможность ознакомиться приблежениями тригонометрических функций с помощью многочленов. А также, показаны решения дифференциального уравнения с помощью компьютера в среде MatLab.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, итерация, интеграл, элементарная функция, тригонометрическая функция.

Annotation. This work provides a differential equation in modern school textbooks, the solution of which is a trigonometric function, and shows a method for determining it in the form of degrees. These elementary solutions are represented in the form of ranks. Consequently, a student has the ability to get acquainted with the application of trigonometric functions with the help of multiplexes. There is also a way to find the solution of the differential equation by computer in MatLab environment.

Key words: differential equations, iteration, integral, elementary function, trigonometric function.

Мақаланың басты мақсаты мектеп оқушыларына дифференциалдық теңдеулер арқылы негізгі тригонометриялық функциялар мен дәрежелік қатарлардың арасындағы байланысты көрсету және оны мектеп курсы аясындағы элементар әдістермен баяндау тәсілін ұсыну болып табылады. Демек, орта мектеп оқушыларына тригонометриялық функцияларды көпмүшеліктермен жуықтау жолымен танысуға мүмкіндік жасаймыз. Сонымен қатар қазіргі таңда компьютерлік программаларды қолдана отырып кез-келген есептерді шығаруға болады. Солардың бірі MatLab ортасында жай дифференциалдық теңдеулерді шешудің қарапайым жолын қарастыратын боламыз.

Тригонометриялық функциялар. Мектеп курсында қарастырылып жүрген дифференциалдық теңдеудің бір түрі

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\vartheta^2 y=0,\ \vartheta=const>0 \tag{1}$$

теңдеуі болып табылады. Бұл жерде $y(x), y'(x), y''(x)$ функциялары үзіліссіз функциялар класында өзгереді деп есептейміз [1].

Әдетте, бұл теңдеудің

$$y(0)=1,\quad y'(0)=0 \tag{1$'$}$$

немесе

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1 \tag{1$''$}$$

шарттарымен берілген шешімдерін тауып, ал оның қалған шешімдерін осы екі шешімнің сызықты комбинациясы түрінде іздейміз [2].

Сонымен, (1) теңдеудің (1′) шартын қанағаттандыратын шешімін (1) –(1′) – есебінің шешімі деп атап, оның интегралдық теңдеуін анықтайық. Берілген (1) теңдеуді $\vartheta=1$ болған жағдайда қарастырып, оны

$$y''(x)=-y(x) \tag{2}$$

түрінде жазып, теңдеудің екі жағын интегралдаймыз. Сонда

$$y'(x)-y'(0)=-\int_0^x y(t)dt \tag{3}$$

теңдігін аламыз. Егер (1′) шартын ескерсек, (3) теңдік,

$$y'(x)=-\int_0^x y(t)dt \tag{4}$$

түрінде жазылады. Тағы да (4) теңдеудің екі жағын $[0,x]$ аралығында интегралдап,

$$y(x)-y(0)=-\int_0^x dt\int_0^t y(s)ds \tag{5}$$

өрнегін аламыз. Осы (5) теңдеуді (1′) шартын ескеріп,

$$y(x)=1-\int_0^x dt\int_0^t y(s)ds \tag{6}$$

теңдеуін аламыз.

Енді $f(x)$ және $\varphi(x)$ функцияларын

$$f(x)=\int_0^x dt\int_0^t y(s)ds,\ \varphi(x)=\int_0^x (x-t)y(t)dt \tag{7}$$

теңдіктерімен анықтап , олардың туындыларын табайық:

$$f'(x)=\int_0^x y(t)dt,\ \ \varphi'(x)=\int_0^x (x-t)'\cdot y(t)dt+(x-x)y(x)=\int_0^x y(t)dt \qquad (7')$$

Осы (7′) өрнектерінен (7) функциялардың туындылары тең екенін көреміз. Ендеше, (7) функциялардың айырмасы тұрақты сандар ғана болады. Олай болса, c тұрақтысы арқылы

$$f(x)=\varphi(x)+C$$

өрнегін аламыз. Егер $x=0$ болса,онда (7) өрнектен $f(0)=\varphi(0)=0$ екенін ескерсек, $c=0$ болатындығы шығады.

Демек, $f(x)=\varphi(0)$ теңдігі шығады, яғни

$$\int_0^x dt\int_0^t y(s)ds=\int_0^x (x-t)y(t)dt \qquad (8)$$

теңдігін аламыз.

Осы (8) теңдіктің негізінде (6) теңдеу

$$y(x)=1-\int_0^x (x-t)y(t)dt \qquad (9)$$

теңдеу түріне келтіріледі.

Одан әрі, (9) өрнектің оң жағындағы $y(x)$ мәнін интеграл астындағы $y(t)$ функциясының орнына қойып, яғни итерациялау амалын жасап,

$$\begin{aligned} y(x)&=1-\int_0^x (x-t_1)\cdot\left[1-\int_0^{t_1}(t_1-t_2)y(t_2)dt_2\right]dt_1=\\ &=1-\int_0^x (x-t_1)dt_1+\int_0^x (x-t_1)dt_1\int_0^{t_1}(t_1-t_2)y(t_2)dt_2=\\ &=1+\frac{(x-t_1)^2}{2!}\Big|_0^x+\int_0^x (x-t_1)dt_1\int_0^{t_1}(t_1-t_2)y(t_2)dt_2=\\ &=1-\frac{x^2}{2!}+\int_0^x (x-t_1)dt_1\int_0^{t_1}(t_1-t_2)y(t_2)dt_2 \end{aligned} \qquad (9_1)$$

өрнегін аламыз.

Осы (9_1) өрнектегі интеграл астындағы $y(t_2)$ функциясының орнына (9) теңдеудің оң жағына қойсақ, онда (9_1) өрнек

$$y(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\int_0^x (x-t_1)dt_1\int_0^{t_1}(t_1-t_2)dt_2(t_2-t_3)dt_3 \qquad (9_2)$$

түрінде болар еді.

Осы процесті жалғастырып, $n-$ші қадамда

$$y(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{2n!}+(-1)^{n+1}\int_0^x(x-t_1)dt_1\int_0^{t_1}(t_1-t_2)dt_2\ldots \tag{9_n}$$

$$\ldots\int_0^{t_n}(t_n-t_{n+1})y(t_{n+1})dt_{n+1}$$

өрнегін аламыз, мұндағы

$$R_n(x)=(-1)^{n+1}\int_0^x(x-t_1)dt_1\int_0^{t_1}(t_1-t_2)\ldots\int_0^{t_n}(t_n-t_{n+1})y(t_{n+1})dt_{n+1} \tag{10_n}$$

қосылғышы n өскен сайын $|x|\le r$ аралығында нөлге ұмтылатынын көрсетуге болады.

Шынында да, кез-келген $r>0$ үшін $|y(x)|\le M_r$ шексіздігі орындалады деп есептеп, $x\ge 0$ жағдайда

$$\begin{aligned}
|r_n(x)|&\le\int_0^x(x-t_1)dt_1(t_1-t_2)dt_2\ldots\int_0^{t_n}(t_n-t_{n+1})dt_{n+1}\cdot M_r=\\
&=M_r\int_0^x(x-t_1)dt_1\int_0^{t_1}(t_1-t_2)dt_2\ldots\int_0^{t_{n-1}}(t_{n-1}-t_n)\frac{t_n^2}{2!}dt_n=\\
&=M_r\int_0^x(x-t_1)dt_1\int_0^{t_1}(t_1-t_2)dt_2\ldots\int_0^{t_{n-2}}(t_{n-2}-t_{n-1})\frac{t_{n-1}^4}{4!}dt_n=\ldots=\\
&=M_r\int_0^x(x-t_1)\frac{t_1^{2n}}{2n!}dt_1=\frac{M_r}{2n!}\left(\frac{xt_1^{2n+1}}{2n+1}-\frac{t_1^{2n+2}}{2n+2}\right)\Bigg|_0^x=\\
&=M_r\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\le M_r\frac{r^{2n+2}}{(2n+2)!}\to 0, n\to\infty
\end{aligned} \tag{11}$$

Сонымен (9_n) өрнегін

$$y(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+r_n(x) \tag{12}$$

түрінде жазып, осы (12) өрнекте шекке көшсек, (11) өрнек бойынша $y(x)$ шешімі шектеусіз мүшелі дәрежелік қатар түрінде, яғни

$$y(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\ldots \tag{13}$$

түрде өрнектелетінін көреміз. Бұл функцияның анықталу облысы $R=(-\infty,+\infty)$ болады. Себебі (11) шегі кез-келген $r>0$ үшін орындалады.

Дәл осылайша (1) теңдеуді (1″) шартымен қарастырып, $\vartheta=1$ жағдайда, осы тәсілмен

$$y(x)=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \tag{14}$$

шешімін анықтаймыз.

Сонымен (13) өрнекпен анықталған шешімді $y_1(x)$, ал (14) өрнекпен анықталған шешімді $y_2(x)$ деп белгілесек,

$$y_1(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+\ldots,\quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{15}$$

$$y_2(x)=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\quad (n=0,1,2,\ldots) \tag{16}$$

функцияларын аламыз.

Енді $y_1(x)$ функциясының туындыларын анықтасақ

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots-(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots= \\ &= -\left(\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+..\right)=-y_2(x), \end{aligned} \tag{17}$$

$$y_1''(x)=-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+\ldots\right)=-y_1(x) \tag{18}$$

болатынын көреміз.

Осылайша,

$$y_2'(x)=y_1(x),\ \ y_2''(x)=-y_2(x) \tag{19}$$

формулаларын аламыз.

Осы (15)–(19) формулалардан қорытылған (15) және (16) функциялардың шынында да (1) теңдеуді $\vartheta=1$ болған жағдайда қанағаттандыратынын және (1′), (1″) шарттары орындалатынын көреміз.

Егер (1)-(1′) және (1)-(1″) есептерінің шешімдері $y_1(x)=\cos(x)$ және $y_2(x)=\sin(x)$ функциялары екендігін ескерсек, онда

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+\ldots, \tag{20}$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \tag{21}$$

екенін көреміз.

Сонымен мынандай теорема дәлелденді.

Теорема 1. Дифференциалдық (2) теңдеуінің (1′) және (1″) шарттарын қанағаттандыратын шешімдері дәрежелік қатармен өрнектелетін (20) және (21) тригонометриялық функциялары болып табылады.

Енді осы табылған шешімді компьютердің көмегімен шығарып көрелік. Жалпы қазіргі таңда математикалық есептеулерді жүзеге асыратын көптеген компьютерлік бағдарламалар бар. Солардың бірі – MatLab ортасы.

Matlab - бүгінгі таңдағы кең таралған, автоматтандырылған математикалық есептеулер жүйесі. Онда көптеген математикалық есептеулер тек дайын функцияларды пайдалану жолымен шешіледі. Matlab бүкіл адамзат тарихындағы математикалық есептеулер саласындағы барлық әдістерді қамтиды және күшті есептеу жүйесі болып табылады. Бұл жүйенің артықшылығы, яғни құрамына енетін функцияларды (мәтін түрінде жазылған М-файлдар және С түрінде жазылған бағдарламалар арқылы) өзгертуге, қосымшалар енгізуге болады. Сондай-ақ сандық есептеулерден басқа графикалық функциялармен (екі өлшемді, үш өлшемді) орындауға болады [3].

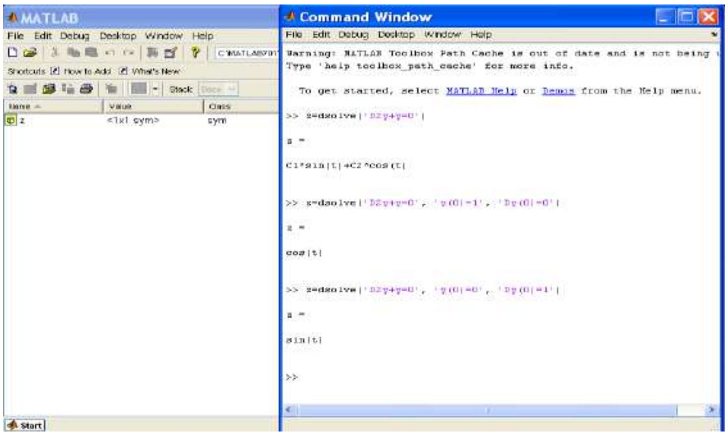
Жай дифференциалдық теңдеуді MatLab ортасында шығару үшін *dsolve* функциясы қолданылады. Оны шақырудың қарапайым форматы:

dsolve('equation') немесе var = dsolve('equation'), мұндағы 'equation' – берілген теңдеуді жазатын символдар жолы. Олай болса (2) теңдеуді (1′) және (1″) шарттарымен мына түрде жазуға болады:

dsolve('D2y+y=0', 'y(0)=1', 'Dy(0)=0')

dsolve('D2y+y=0', 'y(0)=0', 'Dy(0)=1').

Сонымен мектеп оқушыларына (2) дифференциалдық теңдеудің (1′) және (1″) шарттарын қанағаттандыратын шешімдерін арнайы MatLab бағдарламалық пакетін қолданып шығарған кезде де шешім (20) және (21) тригонометриялық функциялары болып табылатынын 1-суреттен көрсетуге болады.



1-сурет. Дифференциалдық теңдеудің MatLab ортасындағы шешімі

Қорыта келгенде, мектеп курсында қарастырылатын дифференциалдық теңдеудің шешімі дәрежелік қатарлар арқылы анықталған тригонометриялық функциялармен анықталатынын көреміз. Бұл зерттеу нәтижесін математиканы тереңірек оқытатын мектеп оқушылары, колледждің білім алушылары өз бетімен оқып, әр түрлі ғылыми-зерттеу жұмыстарында қолдануларына болады.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1. Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа, 10-11 класс/ А.Н. Колмогоров и др. – Алматы: Рауан, 1992, -352 с.
2. Эльсгольц А.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление/ - М.: Наука, 1965, -424 с.
3. https://uniface.kz/index.php

ҒТАМР: 20.23.25

САБАҚ КЕСТЕСІН АВТОМАТТАНДЫРУ ЖҮЙЕСІН ҚҰРУ

Г.А. ШАНГЫТБАЕВА, Б.Ж. БИСЕНҒАЛИ

Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік мемлекеттік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

Аңдатпа. Ақпараттық жүйелер – ақпаратты арнайы ұйымдастырылған түрде сақтауға арналған және онымен түрлі әрекеттер жасауға және оны еңгізуді қамтамасыз етуші, сонымен бірге түрлі белгілері бойынша іздеу салушы, отчет жасаушы жүйелер. Мақалада автоматтандырылған ақпараттық жүйені құру принциптері қарастырылған. Кез келген өнірістің жұмыс орнын автоматтандыру үшін көптеген автоматтандырылған бағдарламалық жүйелер мен құрылғылар қолданылатындығы туралы айтылады. ЖШС «Волна» дүкені коймасында жұмыс істейтін жұмысшылар, ондағы тауарлар туралы мәліметтерді, яғни тауарлардың кірісі мен шығысы, қалдығы және пайда т.б. мүмкіндіктері қарастырылады.

Түйін сөздер. ақпараттық жүйе, автоматтандырылған жұмыс орны, мәліметтер қоры, қойма, авторизация.

Аннотация. Информационные системы - это системы, предназначенные для хранения информации в специально организованном виде, а также для выполнения и взаимодействия с ней различными способами, а также для поиска и составления отчетов о различных функциях. В статье рассматриваются принципы создания автоматизированной информационной системы. Многие автоматизированные программные системы и устройства используются для автоматизации рабочих мест в любой отрасли. А также рассматриваются особенности склада ТОО «Волна», где хранят информацию о сотрудниках, о товарах, т.е. о доходах и расходах товаров, остатках и прибыли и т.д.

Ключевые слова: информационная система, автоматизированное рабочее место, база данных, склад, авторизация.

Abstract. Information systems are systems designed to store information in a specially organized way and to perform and interact with it in various ways, as well as to search and report on various features. The article discusses the principles of creating an automated information system. Many automated software systems and devices are used to