УДК 517.956
МРНТИ 27.31.17

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА БУССИНЕСКА В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

М.Т. ДЖЕНАЛИЕВ [1], А.С. КАСЫМБЕКОВА [1,2], М.Г. ЕРГАЛИЕВ [1,2]

[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

[2]*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан*

E-mail: muvasharkhan@gmail.com; kasar1337@gmail.com; ergaliev.madi.g@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается начально-граничная задача для одномерного уравнения типа Буссинеска в вырождающейся области, представляющей собой треугольник. Методами теории монотонных операторов и априорных оценок установлены теоремы об их однозначной слабой разрешимости в соболевских классах. Установлена теорема о повышении гладкости слабого решения.

Ключевые слова: Уравнение типа Буссинеска, Вырождающаяся область, Слабое решение.

Введение. Теория уравнений Буссинеска и его модификаций всегда привлекает внимание как математиков, так и прикладников. Уравнение Буссинеска, а также их модификации занимают важное место при описании движения жидкости и газа, в том числе, в теории нестационарной фильтрации в пористых средах [1]–[13]. Дополнительно здесь отметим лишь работы [14]–[19]. В последние годы граничные задачи для этих уравнений активно исследуются, так как они моделируют процессы в пористых средах. Процессы, протекающие в пористых средах, особую важность приобретают для глубокого осмысления и понимания в задачах разведки и эффективной разработки нефтяных и газовых месторождений.

1. Постановка граничной задачи и основной результат. Пусть $\Omega_t = \{0 < x < t\}$, $\partial\Omega_t$ – граница Ω_t, $0 < t < T < \infty$. В области $Q_{xt} = \{x, t | x \in \Omega_t, t \in (0, T)\}$, представляющей собой треугольник, рассматривается граничная задача для уравнения типа Буссинеска

$$\partial_t u - \partial_x(|u|\partial_x u) = f, \{x, t\} \in Q_{xt}, \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$u = 0, \{x, t\} \in \Sigma_{xt} = \partial\Omega_t \times (0, T), \qquad (1.2)$$

где $f(x, t)$ – заданная функция.

Можно непосредственно показать, что нелинейный оператор $A_0(v) = -\partial_x(|v|\partial_x v)$ граничной задачи (1.1)–(1.2) обладает следующими свойствами:

$$A_0(v): L_3(\Omega_t) \to L_{3/2}(\Omega_t) - \text{хеминепрерывный оператор}, \qquad (1.3)$$

$$\|A_0(v)\|_{L_{3/2}(\Omega_t)} \leq c\|v\|^2_{L_3(\Omega_t)}, c > 0, \forall v \in L_3(\Omega_t), \qquad (1.4)$$

$$\langle A_0(v), v\rangle \geq \alpha\|v\|^3_{L_3(\Omega_t)}, \alpha > 0, \forall v \in L_3(\Omega_t). \qquad (1.5)$$

В работе нами установлены следующие теоремы.

Теорема 1.1 (Основной результат). *Пусть*

$$f \in L_{3/2}((0, T); W^{-1}_{3/2}(\Omega_t)). \qquad (1.6)$$

Тогда граничная задача (1.1)–(1.2) имеет единственное решение

$$u \in L_3((0, T); L_3(\Omega_t)) \cap L_\infty((0, T); H^{-1}(\Omega_t)). \qquad (1.7)$$

Теорема 1.2 (О гладкости). *Пусть*

$$f \in L_{3/2}((0, T); L_{3/2}(\Omega_t)). \qquad (1.8)$$

Тогда решение граничной задачи (1.1)–(1.2) допускает дополнительную гладкость, т.е.

$$u \in L_\infty((0, T); L_2(\Omega_t)), \qquad (1.9)$$

$$|u|^{1/2}u \in L_2((0, T); H^1_0(\Omega_t)), \qquad (1.10)$$

$$\partial_t u \in L_{3/2}((0, T); W^{-1}_{3/2}(\Omega_t)). \qquad (1.11)$$

2. Вспомогательные начально-граничные задачи в трапециях. Для доказательства Теоремы 1.1 сначала мы рассмотрим вспомогательные начально-граничные задачи. Пусть $\Omega_t = \{0 < x < t\}$, $\partial\Omega_t$ – граница Ω_t, $\varepsilon_m < t < T < \infty$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_m > \ldots$, $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$. В области $Q^m_{xt} = \{x, t | x \in \Omega_t, t \in (\varepsilon_m, T)\}$, представляющей собой трапецию, рассматривается начально-граничная задача для уравнения типа Буссинеска

$$\partial_t u_m - \partial_x(|u_m|\partial_x u_m) = f_m, \{x, t\} \in Q^m_{xt}, \qquad (2.1)$$

с граничными

$$u_m = 0, \{x, t\} \in \Sigma^m_{xt} = \partial\Omega_t \times (\varepsilon_m, T), \qquad (2.2)$$

и начальным условиями

$$u_m = 0, x \in \Omega_{\varepsilon_m} = (0, \varepsilon_m), \qquad (2.3)$$

где $f_m(x, t)$ – сужение функции $f(x, t)$ (1.6), заданной на треугольнике Q_{xt}, на трапецию Q^m_{xt}.

Ранее, в работах [1–2] нами были установлены следующие теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть*

$$f_m \in L_{3/2}((\varepsilon_m, T); W^{-1}_{3/2}(\Omega_t)). \qquad (2.4)$$

Тогда начально-граничная задача (2.1)–(2.3) имеет единственное решение

$$u_m \in L_3((\varepsilon_m, T); L_3(\Omega_t)) \cap L_\infty((\varepsilon_m, T); H^{-1}(\Omega_t)). \tag{2.5}$$

Теорема 2.2. *Пусть*

$$f_m \in L_{3/2}((\varepsilon_m, T); L_{3/2}(\Omega_t)). \tag{2.6}$$

Тогда решение граничной задачи (2.1)–(2.3) допускает дополнительную гладкость, т.е.

$$u_m \in L_\infty((\varepsilon_m, T); L_2(\Omega_t)), \tag{2.7}$$

$$|u_m|^{1/2} u_m \in L_2((\varepsilon_m, T); H_0^1(\Omega_t)), \tag{2.8}$$

$$\partial_t u_m \in L_2((\varepsilon_m, T); W_{3/2}^{-1}(\Omega_t)). \tag{2.9}$$

Отметим, что для цилиндрических областей подобные к теореме 2.2 результаты имеются также в работах [21, 22].

3. Доказательство теоремы 1.1. Существование. Прежде всего, для каждого m и соответствующей заданной функции $f_m(x,t)$ согласно утверждению теоремы 2.1 мы имеем установленным существование единственного решения $u_m(x,t)$ начально-граничной задачи (2.1)–(2.3).

Продолжим функции $u_m(x,t)$, $f_m(x,t)$ с трапеции Q_{xt}^m нулем на весь треугольник Q_{xt} и обозначим их соответственно через $\tilde{u}_m(x,t)$, $\tilde{f}_m(x,t)$. Эти продолженные нулем функции будут удовлетворять уравнению

$$\partial_t \tilde{u}_m - \partial_x(|\tilde{u}_m| \partial_x \tilde{u}_m) = \tilde{f}_m, \{x,t\} \in Q_{xt}, \tag{3.1}$$

с граничными условиями

$$\tilde{u}_m = 0, \{x,t\} \in \Sigma_{xt}. \tag{3.2}$$

Из (3.1) получаем

$$\langle \partial_t \tilde{u}_m(t), v \rangle + a_0(t, \tilde{u}_m(t), v) = \langle \tilde{f}_m(t), v \rangle, \forall v \in H^{-1}(\Omega_t), t \in (0,T), \tag{3.3}$$

где $a_0(t, \tilde{u}_m, v) = \langle A_0(t, \tilde{u}_m), v \rangle$, $A_0(t, \tilde{u}_m) = -\partial_x(|\tilde{u}_m| \partial_x \tilde{u}_m)$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\Omega_t} \varphi [(-d_x^2)^{-1} \psi] dx, \forall \varphi, \psi \in H^{-1}(\Omega_t), t \in (\varepsilon_m, T), \tag{3.4}$$

где $d_x^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \tilde{\psi} = (-d_x^2)^{-1} \psi : -d_x^2 \tilde{\psi} = \psi, \tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}(t) = 0, \forall \psi \in H^{-1}(\Omega_t)$.

Отметим, что близкие к скалярному произведению (3.4) понятия использовались уже в работах [21, 22].

Оператор $A_0(t, \tilde{u}_m)$ обладает свойством монотонности в соответствии со скалярным произведением (3.4). Для решений $\{\tilde{u}_m(t)\}_{m=1}^\infty$ установим равномерные по индексу m априорные оценки. Из (3.1)–(3.4) будем иметь:

$$\frac{1}{2}\|\tilde{u}_m(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega_t)} + \alpha\int_0^t \|\tilde{u}_m(\tau)\|^3_{L_3(\Omega_t)}d\tau \le$$

$$\le \int_0^t \left\|\tilde{f}_m(\tau)\right\|_{L_{3/2}(\Omega_t)} \|\tilde{u}_m(\tau)\|_{L_3(\Omega_t)}d\tau \le$$

$$\le \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\alpha}}\int_0^t \left\|\tilde{f}_m(\tau)\right\|^{3/2}_{L_{3/2}(\Omega_t)}d\tau + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \|\tilde{u}_m(\tau)\|^3_{L_3(\Omega_t)}d\tau \le$$

$$\le \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\alpha}}\int_0^T \|f(t)\|^{3/2}_{L_{\frac{3}{2}}(\Omega_t)}dt + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \|\tilde{u}_m(\tau)\|^3_{L_3(\Omega_t)}d\tau. \qquad (3.5)$$

Отсюда мы получаем

$$\|\tilde{u}_m(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega_t)} + \alpha\int_0^t \|\tilde{u}_m(\tau)\|^3_{L_3(\Omega_t)}d\tau \le \frac{4}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\alpha}}\|f(t)\|^{3/2}_{L_{\frac{3}{2}}(Q_{xr})}, t \in (0,T]. \quad (3.6)$$

В (3.5) мы воспользовались соотношениями (1.5),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{u}_m(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega_t)} = \langle \tilde{u}'_m(t), \tilde{u}_m(t)\rangle, \text{ так как } \tilde{u}_m(t) \equiv 0 \text{ на } \Sigma_{xt},$$

$$\left\|\tilde{f}_m(t)\right\|_{L_{3/2}(\Omega_t)} \le \|f(t)\|_{L_{3/2}(\Omega_t)},$$

а также неравенством Юнга ($p^{-1} + q^{-1} = 1$):

$$|DE| = \left|\left(d^{1/p}D\right)\left(d^{1/q}\frac{E}{d}\right)\right| \le \frac{d}{p}|D|^p + \frac{d}{qd^q}|E|^q,$$

где

$$D = \|w_m(t)\|_{L_{3/2}(\Omega)},\ \ E = \|w_m(t)\|_{L_3(\Omega)},\ \ d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\alpha}},\ \ p = \frac{3}{2},\ \ q = 3.$$

Наконец, из (3.6) и неравенства (1.4)

$$\left\|A_0(t, \tilde{u}_\mu)\right\|_{L_{3/2}(\Omega_t)} \le c\left\|\tilde{u}_\mu\right\|^2_{L_3(\Omega_t)}$$

следуют следующие соотношения

$$\tilde{u}_\mu \to u * -\text{ слабо в } L_\infty((0,T); H^{-1}(\Omega_t)), \qquad (3.7)$$

$$\tilde{u}_\mu \to u \text{ слабо в } L_3(Q_{xt}), \qquad (3.8)$$

$$\tilde{u}_\mu(T) \to \eta \text{ слабо в } H^{-1}(\Omega_T), \qquad (3.9)$$

$$A_0\left(t, \tilde{u}_\mu\right) \to h(t) \text{ слабо в } L_{3/2}((0,T); L_{3/2}(\Omega_t). \qquad (3.10)$$

Теперь продолжим функции $\tilde{u}_m(t), A_0(t, \tilde{u}_m(t)), \ldots$, с области Q_{xt} нулем на бесконечную область $\bar{Q}_{xt}$, где

$$\bar{Q}_{xt} = \begin{cases} x = 0, & t \le 0, \\ x \in \Omega_t, & t \in (0,T], \\ x \in \Omega_T, & t > T; \end{cases}$$

и обозначим эти продолжения соответственно через $\bar{\tilde{u}}_m(t),\ \bar{A}_0(t, \bar{\tilde{u}}_m(t)), \ldots$, т.е.

$$\bar{\tilde{u}}_m(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ \tilde{u}_m(t)\in H^{-1}(\Omega_t), & t\in(0,T],\\ 0, & t>T;\end{cases}\quad \bar{v}(t)=\begin{cases}0, & t\le 0,\\ v(t)\in H^{-1}(\Omega_t), & t\in(0,T],\\ 0, & t>T.\end{cases} \tag{3.11}$$

В результате, для продолжений (3.11) будем иметь:

$$\langle\bar{\tilde{u}}'_m(t),\bar{v}(t)\rangle+\left\langle\bar{A}_0\big(t,\bar{\tilde{u}}_m(t)\big),\bar{v}(t)\right\rangle=$$
$$=\langle\bar{\tilde{f}}_m(t),\bar{v}(t)\rangle-\langle\tilde{u}_m(T),\bar{v}(t)\rangle\delta(t-T),t\in R^1. \tag{3.12}$$

Далее, выбирая из $\{\bar{\tilde{u}}_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ слабо сходящуюся подпоследовательность $\{\bar{\tilde{u}}_\mu(t)\}_{\mu=1}^{\infty}$ и переходя к пределу при $\mu\to\infty$, имеем

$$\langle\bar{u}'(t),\bar{v}(t)\rangle+\langle\bar{h}(t),\bar{v}(t)\rangle=\langle\bar{f}(t),\bar{v}(t)\rangle-\langle\eta,\bar{v}(t)\rangle\delta(t-T),t\in R^1,$$

где $\bar{u}(t)$, $\bar{h}(t)$ и $\bar{f}(t)$ – продолжения функций $u(t)$ (3.7), $h(t)$ (3.10) и $f(t)$ на R^1, т.е., отсюда получаем

$$\bar{u}'(t)+\bar{h}(t)=\bar{f}(t)-\eta\delta(t-T),t\in R^1. \tag{3.13}$$

Теперь, сужая равенство (3.13) на временной интервал $(0,T)$, получаем

$$u'(t)+h(t)=f(t),\ t\in(0,T), \tag{3.14}$$

$$u'(t)\in L_{3/2}((0,T);L_{3/2}(\Omega_t)). \tag{3.15}$$

Далее, с одной стороны, из условия монотонности оператора $A_0(t,v)$ (см. ниже Лемму 4.1) будем иметь

$$Y_\mu\equiv\int_0^T\left\langle A_0\left(t,\tilde{u}_\mu(t)\right)-A_0\big(t,v(t)\big),\tilde{u}_\mu(t)-v(t)\right\rangle dt\ge 0$$
$$\forall v\in L_3\big((0,T);L_3(\Omega_t)\big), \tag{3.16}$$

с другой стороны, из (3.3) получаем

$$\int_0^T\left\langle A_0\left(t,\tilde{u}_\mu(t)\right),\tilde{u}_\mu(t)\right\rangle dt=$$
$$=\int_0^T\langle\tilde{f}_\mu(t)),\tilde{u}_\mu(t)\rangle dt-\frac{1}{2}\left\|\tilde{u}_\mu(T)\right\|^2_{H^{-1}(\Omega_T)}. \tag{3.17}$$

Таким образом, из соотношений (3.16)–(3.17) следует, что

$$Y_\mu\equiv\int_0^T\langle\tilde{f}_\mu(t),\tilde{u}_\mu(t)\rangle dt-\frac{1}{2}\left\|\tilde{u}_\mu(T)\right\|^2_{H^{-1}(\Omega_T)}-\int_0^T\langle A_0(t,\tilde{u}_\mu(t)),v(t)\rangle dt-$$
$$-\int_0^T\left\langle A_0\big(t,v(t)\big),\tilde{u}_\mu(t)-v(t)\right\rangle dt\ \ \forall v\in L_3\big((0,T);L_3(\Omega_t)\big). \tag{3.18}$$

Теперь, используя свойство слабой снизу полунепрерывности нормы в банаховом пространстве

$$\liminf\ \left\|\tilde{u}_\mu(T)\right\|^2_{H^{-1}(\Omega_T)}\ge\|\tilde{u}(T)\|^2_{H^{-1}(\Omega_T)},$$

имеем

$$0 \leq \limsup \; Y_\mu \leq \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt - \frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{H^{-1}(\Omega_T)} - \int_0^T \langle h(t), v(t)\rangle dt -$$

$$- \int_0^T \big\langle A_0\big(t, v(t)\big), u(t) - v(t)\big\rangle dt \quad \forall v \in L_3\big((0,T); L_3(\Omega_t)\big). \qquad (3.19)$$

В свою очередь, из (3.14) мы получаем

$$\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt = \int_0^T \langle h(t), u(t)\rangle dt + \frac{1}{2}\|u(T)\|^2_{H^{-1}(\Omega_T)}. \qquad (3.20)$$

Подставляя выражение для $\int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle dt$ из (3.20) в неравенство (3.19), устанавливаем следующее неравенство

$$\int_0^T \big\langle h(t) - A_0\big(t, v(t)\big), u(t) - v(t)\big\rangle dt \geq 0$$

$$\forall v(t) \in L_3\big((0,T); L_3(\Omega_t)\big). \qquad (3.21)$$

Теперь для завершения доказательства теоремы 1.1, т.е. существования решения граничной задачи (1.1)–(1.2), нашей целью является: показать справедливость следующего равенства

$$h(t) = A_0(u(t)). \qquad (3.22)$$

Используем свойство хеминепрерывности оператора $A_0(t, v)$ (1.3). Подставляя в (3.21) вместо $v(t) = u(t) - \lambda w(t),\ \lambda > 0,\ w \in L_3(Q_{xt})$, получаем

$$\int_0^T \langle h(t) - A_0(t, u(t) - \lambda w(t)), w(t)\rangle dt \geq 0 \quad \forall w(t) \in L_3(Q_{xt}).$$

Отсюда, устремляя $\lambda \to 0+$, получаем требуемое равенство (3.22). Часть существования решения в теореме 1.1 доказана.

4. Доказательство теоремы 1.1. Единственность. Покажем, что оператор $A_0(t, u)$ в задаче (1.1)–(1.2) будет обладать свойством монотонности, если ввести соответствующим образом скалярное произведение. Для этой цели возьмем в качестве скалярного произведения

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \int_{\Omega_t} \varphi[(-d_x^2)^{-1}\psi]dy, \forall \varphi, \psi \in H^{-1}(\Omega_t), \forall t \in (0,T), \qquad (4.1)$$

где $d_x^2 = \frac{d^2}{dx^2},\ \tilde{\psi} = (-d_x^2)^{-1}\psi\colon -d_x^2\tilde{\psi} = \psi,\ \widetilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}(t) = 0,\ \forall \psi \in H^{-1}(\Omega_t),\ \forall t \in (0,T)$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4.1. *Оператор $A_0(t, u)$ является монотонным в смысле скалярного произведения* (4.1) *в пространстве $H^{-1}(\Omega_t)$, т.е. справедливы неравенства:*

$$\langle A_0(t, u_1) - A_0(t, u_2), u_1 - u_2\rangle \geq 0, \ \forall u_1, u_2 \in \mathcal{D}(\Omega_t), \ \forall t \in (0,T). \qquad (4.2)$$

К доказательству Леммы 4.1. Для каждого $t \in (0,T)$ оператор $A_0(t,u) = -\partial_x(|u|\partial_x u)$ является монотонным и условие (4.2) выполнено (согласно [20], гл. 2, п. 3.1). Действительно, с одной стороны, имеем

$$\langle A_0(t,\varphi) - A_0(t,\psi), \varphi - \psi \rangle = \frac{1}{2}\int_{\Omega_t} (-d_x^2)(|\varphi|\varphi - |\psi|\psi)(-d_x^2)^{-1}(\varphi - \psi)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_t} (|\varphi|\varphi - |\psi|\psi)(\varphi - \psi)dx, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega_t), \quad \forall t \in (t_0, T).$$

С другой стороны, из условия выпуклости функционала

$$J(t,\varphi) = \frac{1}{3}\int_{\Omega_t} \varphi|(x)|^3 dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_t), \quad \forall t \in (0,T),$$

следует

$$\langle J'(t,\varphi) - J'(t,\psi), \varphi - \psi \rangle \geq 0, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega_t), \quad \forall t \in (0,T).$$

Таким образом, получаем

$$\int_{\Omega_t} (|\varphi|\varphi - |\psi|\psi)(\varphi - \psi)dx \geq 0, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega_t), \quad \forall t \in (0,T),$$

т.е. неравенство (4.2) установлено. Лемма 4.1 доказана.

Теперь мы готовы показать единственность решения в задаче (1.1)–(1.2). Пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ есть два решения задачи (1.1)–(1.2). Тогда их разность $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$ удовлетворяет однородной задаче:

$$u'(t) + A_0(t, u_1(t)) - A_0(t, u_2(t)) = 0,$$

$$\langle u'(t), u(t) \rangle + \langle (A_0(t, u_1(t)) - A_0(t, u_2(t)), u_1(t) - u_2(t) \rangle = 0$$

и, благодаря свойству монотонности оператора $A_0(t,u)$, имеем:

$$\langle u'(t), u(t) \rangle = \frac{d}{2dt}\|u(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega_t)} \leq 0, \text{т.е.} u(t) \equiv 0.$$

Единственность решения задачи (1.1)–(1.2) доказана.

Это завершает доказательство Теоремы 1.1.

5. Доказательство теоремы 1.2. Нам достаточно показать существование решения, а единственность следует из теоремы 1.1.

Прежде всего, для каждого m и соответствующей заданной функции $f_m(x,t)$ согласно утверждению теоремы 2.2 мы имеем установленным существование более гладкого (чем в теореме 2.1) единственного решения $u_m(x,t)$ начально-граничной задачи (2.1)–(2.3) для соотвествующей трапеции Q_{xt}^m. Продолжим функции $u_m(x,t), f_m(x,t)$ с трапеции Q_{xt}^m нулем на весь треугольник Q_{xt} и обозначим их соответственно через $\tilde{u}_m(x,t), \tilde{f}_m(x,t)$. Эти продолженные нулем функции будут удовлетворять уравнению

$$\partial_t \tilde{u}_m - \partial_x(|\tilde{u}_m|\partial_x \tilde{u}_m) = \tilde{f}_m, \{x,t\} \in Q_{xt}, \tag{5.1}$$

с граничными условиями

$$\tilde{u}_m = 0, \{x,t\} \in \Sigma_{xt}. \tag{5.2}$$

Из (5.1) получаем

$$\langle \partial_t \tilde{u}_m(t), v\rangle + a_0(t, \tilde{u}_m(t), v) = \langle \tilde{f}_m(t), v\rangle, \forall v \in H^{-1}(\Omega_t), t \in (0,T), \tag{5.3}$$

где $a_0(t,\tilde{u}_m, v) = \langle A_0(t,\tilde{u}_m), v\rangle$, $A_0(t,\tilde{u}_m) = -\partial_x(|\tilde{u}_m|\partial_x \tilde{u}_m)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \int_{\Omega_t} \varphi[(-d_x^2)^{-1}\psi]dx, \quad \forall\varphi,\psi \in H^{-1}(\Omega_t), \quad t \in (\varepsilon_m, T),$$

где $d_x^2 = \frac{d^2}{dx^2}$, $\tilde{\psi} = (-d_x^2)^{-1}\psi$: $-d_x^2\tilde{\psi} = \psi$, $\tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}(t) = 0$, $\forall\psi \in H^{-1}(\Omega_t)$.

Перепишем уравнение (5.3) в виде

$$(\partial_t \tilde{u}_m(t), (-\partial_x^2)^{-1}v) + \frac{1}{2}(|\tilde{u}_m(t)|\tilde{u}_m(t), v) = \left(\tilde{f}_m(t), (-\partial_x^2)^{-1}v\right),$$
$$\forall v \in H^1_{0,\Delta}(\Omega_t), \quad t \in (0,T),$$

где $H^1_{0,\Delta}(\Omega_t) = \{\varphi | \varphi, \partial_x^2\varphi \in H_0^1(\Omega_t)\}$, или

$$(\partial_t \tilde{u}_m(t), \tilde{v}) + \frac{1}{2}(|\tilde{u}_m(t)|\tilde{u}_m(t), v) = \left(\tilde{f}_m(t), \tilde{v}\right),$$
$$\forall\tilde{v} = (-\partial_x^2)^{-1}v \in H_0^1(\Omega_t), \ t \in (0,T), \tag{5.4}$$

Далее, из (5.4) получаем следующее равенство

$$\langle \partial_t \tilde{u}_m(t), \tilde{u}_m(t)\rangle + \tfrac{1}{2}\left(|\tilde{u}_m(t)|\tilde{u}_m(t), -\partial_x^2\tilde{u}_m(t)\right) = \left\langle \tilde{f}_m(t), \tilde{u}_m(t)\right\rangle, t \in (0,T). \tag{5.5}$$

а из (5.5), следовательно, будем иметь

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\tilde{u}_m(t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \frac{4}{9}\int_{\Omega_t}\left[\partial_x\left(|\tilde{u}_m(t)|^{\frac{1}{2}}\tilde{u}_m(t)\right)\right]^2 dx =$$
$$= \left\langle \tilde{f}_m(t), \tilde{u}_m(t)\right\rangle, \quad t \in (0,T),$$

или же

$$\frac{1}{2}\|\tilde{u}_m(t)\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \frac{4}{9}\int_0^t\int_{\Omega_\tau}\left[\partial_x\left(|\tilde{u}_m(\tau)|^{\frac{1}{2}}\tilde{u}_m(\tau)\right)\right]^2 dxd\tau =$$
$$= \int_0^t \langle \tilde{f}_m(\tau), \tilde{u}_m(\tau)\rangle d\tau, t \in (0,T). \tag{5.6}$$

Здесь использовано следующее равенство

$$-\tfrac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\tilde{u}_m(t)|\tilde{u}_m(t)\partial_x^2\tilde{u}_m(t)dx = \tfrac{4}{9}\int_{\Omega_t}\left[\partial_x\left(|\tilde{u}_m(t)|^{\frac{1}{2}}\tilde{u}_m(t)\right)\right]^2 dx, \quad t \in (0,T). \tag{5.7}$$

Покажем его справедливость. Вначале преобразуем левую часть равенства (5.7). Покажем, что имеет место равенство

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}|\tilde{u}_m(t)|\tilde{u}_m(t)\partial_x^2\tilde{u}_m(t)dx = \int_{\Omega_t}|\tilde{u}_m(t)|[\partial_x\tilde{u}_m(t)]^2dx. \qquad (5.8)$$

Действительно, имеем:

$$|\tilde{u}_m|\tilde{u}_m = \begin{cases} [\tilde{u}_m]^2, & \text{при } \tilde{u}_m > 0, \\ 0, & \text{при } \tilde{u}_m(t) = 0, \\ -[-\tilde{u}_m]^2, & \text{при } \tilde{u}_m < 0, \end{cases}$$

$$\partial_x(|\tilde{u}_m|\tilde{u}_m) = \begin{cases} 2\tilde{u}_m\partial_x\tilde{u}_m, & \text{при } \tilde{u}_m > 0, \\ 0, & \text{при } \tilde{u}_m(t) = 0, \\ 2[-\tilde{u}_m]\partial_x\tilde{u}_m, & \text{при } \tilde{u}_m < 0. \end{cases}$$

Таким образом, отсюда получаем: $\partial_x(|\tilde{u}_m(t)|\tilde{u}_m(t)) = 2|\tilde{u}_m(t)|\partial_x\tilde{u}_m(t)$, т.е. равенство (5.8).

Аналогичное имеет место и для правой части равенства (5.7). Получаем

$$|\tilde{u}_m|^{\frac{1}{2}}\tilde{u}_m = \begin{cases} [\tilde{u}_m]^{\frac{3}{2}}, & \text{при } \tilde{u}_m > 0, \\ 0, & \text{при } \tilde{u}_m = 0, \\ -[-\tilde{u}_m]^{\frac{3}{2}}, & \text{при } \tilde{u}_m < 0, \end{cases}$$

$$\partial_x\left(|\tilde{u}_m|^{1/2}\tilde{u}_m\right) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}[\tilde{u}_m]^{1/2}\partial_x\tilde{u}_m, & \text{при } \tilde{u}_m > 0, \\ 0, & \text{при } \tilde{u}_m = 0, \\ \dfrac{3}{2}[-\tilde{u}_m]^{1/2}\partial_x\tilde{u}_m, & \text{при } \tilde{u}_m < 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем: $\partial_x\left(|\tilde{u}_m(t)|^{1/2}\tilde{u}_m(t)\right) = \frac{3}{2}|\tilde{u}_m(t)|^{1/2}\partial_x\tilde{u}_m(t)$, т.е. верно равенство:

$$\frac{4}{9}\int_{\Omega_t}\left[\partial_x\left(|\tilde{u}_m(t)|^{1/2}\tilde{u}_m(t)\right)\right]^2dx = \int_{\Omega_t}|\tilde{u}_m(t)|[\partial_x\tilde{u}_m(t)]^2dx.$$

Так как из теоремы 2.1 мы имеем, что функции $\tilde{u}_m(t)$ ограничены в $L_3(Q_{xt})$, поэтому правая часть (5.6) ограничена при выполнении условия (1.6) теоремы 1.1. Отсюда из (5.6) выводим, что

$$\tilde{u}_m \text{ ограничены в } L_\infty((0,T); L_2(\Omega_t)), \qquad (5.9)$$

$$\partial_x(|\tilde{u}_m|\tilde{u}_m) \text{ ограничены в } L_2(Q_{xt}), \text{ т.е. } \quad |\tilde{u}_m|^{1/2}\tilde{u}_m \in L_2((0,T); H_0^1(\Omega_t)). \qquad (5.10)$$

Из соотношений (5.9)–(5.10), уравнения (5.1) и условий (1.4), (2.6) устанавливаем оценку для производной по времени t

$$\partial_t\tilde{u}_m \text{ ограничены в } L_{3/2}((0,T); W_{3/2}^{-1}(\Omega_t)). \qquad (5.11)$$

Следовательно, мы можем записать

$$\tilde{u}_m \to u \text{ слабо в } L_\infty((0,T); L_2(\Omega_t)), \qquad (5.12)$$

$$|\tilde{u}_m|^{\frac{1}{2}}\tilde{u}_m \to \chi \text{ слабо в } L_2((0,T); H_0^1(\Omega_t)). \qquad (5.13)$$

Таким образом, на основе соотношений (5.11)–(5.13) устанавливаем

$$\tilde{u}_m \to u \text{ сильно в } L_3\big((0,T); L_3(\Omega_t)\big) \text{ и почти всюду,}$$

и, далее, используя (5.10) и применяя Теорему 12.1 и Предложение 12.1 из ([20], гл.1, п.12.2), а также Лемму 1.3 из ([20], гл.1, п.1.4), в результате имеем

$$|\tilde{u}_m|^{\frac{1}{2}}\tilde{u}_m \to |u|^{\frac{1}{2}}u \text{ слабо в } L_2((0,T); H_0^1(\Omega_t)), \text{т.е. } \chi = |u|^{1/2}u. \tag{5.14}$$

Лемма 1.3 ([20], гл.1, п.1.4). *Пусть $\mathcal{O}$ – ограниченная область в $R_x^n \times R_t^1$, g_μ и g – такие функции из $L_q(\mathcal{O}), 1 < q < \infty$, что*

$$\left\|g_\mu\right\|_{L_q(\mathcal{O})} \le C, \;\; g_\mu \to g \text{ п.в. в } \mathcal{O}.$$

Тогда $g_\mu \to g$ слабо в $L_q(\mathcal{O})$.

Из (5.11), (5.13) и (5.14) получаем требуемые утверждения (1.9)–(1.11). Теорема 1.2 полностью доказана.

Заключение. В работе изучены начально-граничные задачи для одномерного уравнения типа Буссинеска в области, представляющей собой треугольник. Методами теории монотонных операторов и априорных оценок доказаны теоремы об их однозначной слабой разрешимости в соболевских классах, а также теоремы о повышении гладкости слабого решения.

Благодарности. Это исследование финансировано Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (Грант № AP09258892, 2021–2023гг.).

Список использованной литературы

1. Дженалиев М.Т., Касымбекова А.С., Ергалиев М.Г. О начально-граничных задачах для уравнения типа Буссинеска // Традиц. Междунар. апр. матем. конф. в честь дня работн. науки РК. Тезисы докладов. – Алматы: Изд. ИМММ. – 2022. – С. 76–77.

2. Jenaliyev M.T., Kasymbekova A.S., Yergaliyev M.G., Assetov A.A. An Initial Boundary Value Problem for the Boussinesq Equation in a Trapezoid // Bulletin of the Karaganda University – Mathematics. – 2022. – 106: 2. – 11p.

3. McKean H.P. Boussinesq's Equation on the Circle // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1981. – Vol. XXXIV. – P.599–691.

4. Yan Z. Y., Xie F.D., Zhang H.Q. Symmetry Reductions, Integrability and Solitary Wave Solutions to Higher-Order Modified Boussinesq Equations with Damping Term // Communications in Theoretical Physics. – 2001. – Vol. 36, No.1. –P.1–6.

5. Baklanovskaya V.F., Gaipova A.N. On a two-dimensional problem of nonlinear filtration // Zh. vychisl. math. i math. phiz. – 1966. – Vol. 6, Supplement No. 4. – P. 237–241 (in Russian).

6. Vazquez J.L. The Porous Medium Equation. Mathematical Theory. – Oxford: Oxford University Press, 2007. – XXII+625p.

7. Polubarinova-Kochina P.Ya. On a nonlinear differential equation encountered in the theory of infiltration // Dokl. Akad. Nauk SSSR. – 1948. – 63(6). P. 623–627.

8. Polubarinova-Kochina P.Ya. Theory of Groundwater Movement. – Princeton: Princeton Univ. Press, 1962.

9. Zel'dovich Ya.B., Kompaneets A.S. Towards a theory of heat conduction with thermal conductivity depending on the temperature // In Collection of Papers Dedicated to 70th Anniversary of A. F. Ioffe. – Moscow: Izd. Akad. Nauk SSSR, 1950. – P. 61–72.

10. Zel'dovich Ya.B., Barenblatt G.I. On the dipole-type solution in the problems of a polytropic gas flow in porous medium // Appl. Math. Mech. – 1957. – 21(5). P. 718–720.

11. Zel'dovich Ya.B., Barenblatt G.I. The asymptotic properties of self-modelling solutions of the nonstationary gas filtration equations // Sov. Phys. Doklady. – 1958. – 3. – P. 44–47 [Russian, Akad. Nauk SSSR, Doklady, 118, 671–674].

12. Showalter R.E. Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations. – Providence : Amer. Math. Soc., 1997. XIII+270=283p.

13. Vainberg M.M. Variational Method and Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations. – New York: Wiley, 1973.

14. Zhong X. Strong solutions to the nonhomogeneous Boussinesq equations for magnetohydrodynamics convection without thermal diffusion // Electronic Journal of Qualitative Theory Differential Equations. – 2020. – No.24. – P. 1–23.

15. Zhang H., Hu Q., Liu G. Global existence, asymptotic stability and blow-up of solutions for the generalized Boussinesq equation with nonlinear boundary condition // Mathematische Nachrichten. – 2020. – 293: 2. – P. 386–404.

16. Oruc G., Muslu G.M. Existence and uniqueness of solutions to initial boundary value problem for the higher order Boussinesq equation // Nonlinear Analysis – Real World Applications. – 2019. – 47. – P. 436–445.

17. Ding W., Wang Zh.-A. Global existence and asymptotic behavier of the Boussinesq-Burgers system // Journal of Mathematical Analysis and Applications. –2015. – 424: 1. – P. 584–597.

18. Zhu N., Liu Zh., Zhao K. On the Boussinesq-Burgers equations driven by dynamic boundary conditions // Journal of Differential Equations. – 2018. – 264: 3. – P. 2287–2309.

19. Crank J. Free and Moving Boundary Problems. – Oxford: Oxford University Press, 1984.

20. Lions J.-L. Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires. – Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1969.

21. Дубинский Ю.А. Слабая сходимость в нелинейных эллиптических и параболических уравнениях // Матем. сб. – 1965. – 67(109), № 4. – С. 609–642.

22. Raviart P.A. Sur la resolution et l'approximation de certaines equations paraboliques non lineaires degenerees // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1967. – 25. – P. 64–80.

ҮШБҰРЫШТАҒЫ БУССИНЕСК ТИПТІ ТЕҢДЕУ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕП

М.Т. ДЖЕНАЛИЕВ [1], А.С. КАСЫМБЕКОВА [1,2], М.Г. ЕРГАЛИЕВ [1,2]

[1]Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

[2] Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

E-mail: muvasharkhan@gmail.com; kasar1337@gmail.com; ergaliev.madi.g@gmail.com

Аңдатпа. Жұмыста үшбұрыш болып табылатын деградациялық аймақтағы Буссинеск типінің бірөлшемді теңдеуі үшін бастапқы-шекаралық есеп қарастырылады. Монотонды операторлар теориясы мен априорлық бағалау әдістерімен Соболев сыныптарында олардың бір мәнді әлсіз ажыратымдылығы туралы теоремалар анықталды. Әлсіз шешімнің тегістігін арттыру туралы теорема құрылды.

Түйін сөздер: Буссинеск типті теңдеу, деградациялық аймақ, әлсіз шешім.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A BOUSSINESQ-TYPE EQUATION IN A TRIANGLE

M.T. GENALIEV [1], A.S. KASYMBEKOVA [1,2], M.G. ERGALIEV [1,2]

[1] Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

[2] Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

E-mail: muvasharkhan@gmail.com; kasar1337@gmail.com; ergaliev.madi.g@gmail.com

Annotation. The paper considers an initial boundary value problem for a one-dimensional Boussinesq-type equation in a degenerate region representing a triangle. Using the methods of the theory of monotone operators and a priori estimates, theorems on their unambiguous weak solvability in Sobolev classes are established. A theorem on increasing the smoothness of a weak solution is established.

Keywords: Boussinesq type equation, Degenerate domain, Weak solution.