УДК 517.956
МРНТИ 27.31.17

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ДРОБНО-НАГРУЖЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

М.Т. КОСМАКОВА[0000-0003-4070-0215]**, Д.М. АХМАНОВА**[0000-0003-1040-2495]**,**
Э.К. ЖУМАГУЛОВА
Карагандинский университет имени академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: svetlanamir578@gmail.com, danna.67@mail.ru, elmira09@inbox.ru

Аннотация. В работе рассматривается краевая задача для дробно-нагруженного уравнения теплопроводности в первом квадранте. Нагруженное слагаемое имеет вид дробной производной в смысле Римана-Лиувилля по пространственной переменной, причем порядок производной в нагруженном члене меньше порядка дифференциальной части. Исследование основано на сведении краевой задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Ядро полученного интегрального уравнения содержит специальную функцию — функцию типа Райта. Получены условия разрешимости интегрального уравнения и показано, что существование и единственность решений интегрального уравнения зависит как от порядка дробной производной в нагруженном слагаемом начально-краевой задачи, так и от закона движения нагрузки.

Ключевые слова: дробная производная, нагруженное уравнение теплопроводности, интегральное уравнение, функция типа Райта.

1. Постановка задачи

Важным разделом в теории дифференциальных уравнений являются нагруженные уравнения, в которых нагруженное слагаемое содержит дифференциальный или интегро-дифференциальный оператор, включающий операцию взятия следа от искомой функции на многообразиях из замыкания области определения решения размерности строго меньше ее размерности. Повышенный интерес к изучению таких уравнений можно объяснить, как расширяющимся объемом их приложений [1], так и тем фактом, что нагруженные уравнения – это особый класс уравнений со своими специфическими задачами [2]. Интерес представляют краевые задачи для дробно-нагруженного уравнения теплопроводности, когда нагруженное слагаемое представлено в форме дробной производной. В работах [3] - [4] нагруженное слагаемое - след дробной производной Римана-Лиувилля на линии $x = t$. Возникающее сингулярное интегральное уравнение Вольтерра имеет непустой спектр при определенных значениях порядка дробной производной. В данной статье нагруженное слагаемое - след дробной производной Римана-Лиувилля на линии $x = t^w$, и при оценке ядра интегрального уравнения используется асимптотика функции типа Райта при малых значениях времени в зависимости от закона движения нагрузки. Подобные задачи исследовались в работах [5] – [7].

В области $G = \{(x,t) | x > 0; t > 0\}$ найти решение уравнения

$$u_t = u_{xx} + \lambda \left\{ {}_r D_{0,x}^{\beta} u(x,t) \right\}\Big|_{x=\gamma(t)} + f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{t=0} = 0;\ u\big|_{x=0} = 0. \tag{2}$$

Здесь:

${}_r D_{0,x}^{\beta} f(x)$ - производная в смысле Римана-Лиувилля порядка β, $1 < \beta < 2$. Тогда для искомой функции $u(x,t) \in L_1(G)$.

$\gamma(t)$ – непрерывная возрастающая функция и $\gamma(0) = 0$.

Введем обозначения

$$\mu(t) = \left\{ {}_r D_{0,x}^{\beta} u(x,t) \right\}\Big|_{x=\gamma(t)},\ f_1(x,t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau. \tag{3}$$

Тогда решение задачи (1)-(2) можно представить в виде [8]

$$u(x,t) = -\lambda \int_0^t \int_0^{\infty} G(x,\xi,t-\tau)\mu(\tau) d\xi d\tau + f_1(x,t), \tag{4}$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t} \right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)_2}{4t} \right) \right\}$$

- функция Грина.

С учетом соотношения

$$\int_0^{\infty} G(x,\xi,t-\tau) d\xi = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right),$$

где $erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$ – интеграл ошибок, из (4) получим

$$u(x,t) = -\lambda \int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}} \right) \mu(\tau) d\tau + f_1(x,t).$$

Так как [9]

$$e^{-\xi^2} = \sqrt{\pi}\phi\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -2\xi \right),$$

где

$$\phi(\alpha,\beta;z)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{z^{\kappa}}{\kappa!\Gamma(\alpha\kappa+\beta)},\alpha>0,\beta\in C,$$

- функция Райта, то

$$erf(z)=1-\phi\left(-\frac{1}{2};1;-2z\right).$$

Тогда представление (4) перепишем в виде

$$u(x,t)=-\lambda\int_0^t K\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau+f_1(x,t), \tag{5}$$

где

$$K\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)=1-\phi\left(-\frac{1}{2};1;-\frac{x}{\sqrt{t-\tau}}\right) \tag{6}$$

К (5) применим операцию дробного дифференцирования по формуле (3).

Имеем

$${}_rD_{0,x}^{\beta}\left(K\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\right)=x^{-\beta}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}-e_{1,\frac{1}{2}}^{1-\beta,1}\left(-\frac{x}{\sqrt{t-\tau}}\right)\right)=$$

$$=\frac{x^{1-\beta}}{\sqrt{t-\tau}}e_{1,\frac{1}{2}}^{2-\beta,\frac{1}{2}}\left(-\frac{x}{\sqrt{t-\tau}}\right)=-ze_{1,\frac{1}{2}}^{2-\beta,\frac{1}{2}}(z),\ 1<\beta<2,$$

где

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)\Gamma(\delta-\beta n)},\mu\in C,\delta\in C, \tag{7}$$

- функция типа Райта [9, стр.23]. При вычислении использовали формулу автотрансформации (2.2.3) из [9, стр.24]

Получили интегральное уравнение

$$\mu(t)+\lambda\int_0^t K_\beta(t,\tau)\mu(\tau)d\tau=f_2(t);\ \ 1<\beta<2, \tag{8}$$

где

$$f_2(t)=\ {}_rD_{0,x}^{\beta}\big(f_1(x,t)\big)\Big|_{x=\gamma(t)},$$

$$K_\beta(t,\tau)=\frac{(\gamma(t))^{1-\beta}}{\sqrt{t-\tau}}e_{1,\frac{1}{2}}^{2-\beta,\frac{1}{2}}\left(-\frac{\gamma(t)}{\sqrt{t-\tau}}\right) \tag{9}$$

Пусть $\gamma(t) \sim t^{\omega}$ при $t \to 0; \omega > 0$.

Рассмотрим случаи.

а) $0 < \omega < \frac{1}{2}$, $\Rightarrow$ $|z| = \left| -\frac{t^{\omega}}{\sqrt{t-\tau}} \right| \underset{t \to 0}{\to} +\infty$; $z = \frac{\gamma(t)}{\sqrt{t-\tau}} \Rightarrow \sqrt{t-\tau} = \frac{\gamma(t)}{z}$

$\Rightarrow$ с учетом формулы (2.2.7) из [9, стр.24] получим

$$K_{\beta}(t,\tau) = -t^{-\omega\beta} z e_{1,\frac{1}{2}}^{2-\beta,\frac{1}{2}}(z) \to \frac{t^{-\omega\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \underset{t \to 0}{\to} \infty,$$

так как $1 < \beta < 2$.

б) $\omega > \frac{1}{2}$, $\Rightarrow$ $z = \frac{t^{\omega}}{\sqrt{t-\tau}} \to 0$ при $t \to 0$. Ряд (7) сходится абсолютно для любого z из C [9, стр.23].

$$\Rightarrow e_{1,\frac{1}{2}}^{2-\beta,\frac{1}{2}}\left(-\frac{t^{\omega}}{\sqrt{t-\tau}} \right) \underset{t \to 0}{\to} \frac{1}{\Gamma(2-\beta)\sqrt{\pi}}.$$

$K_{\beta}(t,\tau) \sim \frac{t^{\omega(1-\beta)}}{\sqrt{t-\tau}}$ при $t \to 0$.

Поскольку $\omega > \frac{1}{2}$ и $1 < \beta < 2$, то интегральный оператор уравнения (8), действующий в классе непрерывных функций, будет ограниченным при $\omega(1-\beta) + 1/2 \geq 0$.

Следовательно, при $1 < \beta < 2$ и $\omega(\beta - 1) \leq 1/2$ интегральное уравнение (8) с ядром (9) однозначно разрешимо.

в) $\omega = \frac{1}{2}$, $\Rightarrow z = \frac{t^{\omega}}{\sqrt{t-\tau}} \to 1$ при $t \to 0$. Ряд (7) сходится абсолютно для любого z из C [9, стр.23]. Поскольку $\omega = \frac{1}{2}$ и $1 < \beta < 2$, то интегральный оператор уравнения (8), действующий в классе непрерывных функций, будет ограниченным.

Следовательно, при $1 < \beta < 2$ и $\omega = \frac{1}{2}$ интегральное уравнение (8) с ядром (9) однозначно разрешимо.

Теорема. Интегральное уравнение (8) с ядром (9) при $1 < \beta < 2$ и $\gamma(t) \sim t^{\omega}$ (в окрестности точки t=0) однозначно разрешимо в классе непрерывных функций для любой непрерывной правой части, если $\omega \geq \frac{1}{2}$.

Список использованной литературы

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. - М.: Высшая школа, 1995. - 205 с.

2. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения. - 1983. - Т.19, №1. - С.86-94.

3. Attayev A.Kh., Iskakov S.A., Karshigina G.Zh., Ramazanov M.I. The first boundary problem for heat conduction equation with a load of fractional order. I. // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics. – 2014. – Vol.76, №4. - 11-16.

4. Iskakov S.A., Ramazanov M.I., Ivanov I.A. (2015). The first boundary problem for heat conduction equation with a load of fractional order. II. // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics. – 2015. – Vol.78, №2. – P. 25-30.

5. Kosmakova M.T., Iskakov S.A., Kasymova L.Zh. To solving the fractionally loaded heat equation // Bulletin of the Karaganda University-mathematics. – 2021. – Vol. 1, №101. – P. 65-77.

6. Ramazanov M.I., Kosmakova M.T., Kasymova L.Zh. On a Problem of Heat Equation with Fractional Load // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – Vol. 41, №9. – P. 1873-1885.

7. Kosmakova M.T., Ramazanov M.I., Kasymova L.Zh. To Solving the Heat Equation with Fractional Load // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42, №12. – P. 2854-2866.

8. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.

9. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. – М.: Наука, 2005. – 199 с.

ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІҢ БӨЛШЕКТІ-ЖҮКТЕЛГЕН ШЕТТІК ЕСЕБІНІҢ ШЕШІМДІЛІК ШАРТТАРЫ

М.Т. КОСМАКОВА, Д.М. АХМАНОВА, Э.К. ЖУМАГУЛОВА

Академик Е. А. Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, Қарағанды, Қазақстан

e-mail: svetlanamir578@gmail.com, danna.67@mail.ru, elmira09@inbox.ru

Аңдатпа. Жұмыста бірінші квадрантта бөлшекті-жүктелген жылуөткізгіштік теңдеуі үшін шеттік есептер қарастырылады. Жүктелген қосылғыш кеңістіктік айнымалыға қатысты Риман-Лиувилль мағынасында бөлшектік туынды, ал жүктелген мүшедегі туындының реті дифференциалдық бөліктің ретінен кіші түрінде берілген. Зерттеу шеттік есепті екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеуіне келтіруге негізделген. Алынған интегралдық теңдеудің өзегі арнайы функцияны - Райт типті функцияны қамтиды. Мақалада интегралдық теңдеудің шешімділік шарттары алынды және интегралдық теңдеудің шешімдерінің бар болуы мен бірегейлігі бастапқы-шеттік есептің жүктелген қосылғышының бөлшек туындысының ретіне де, жүктеме қозғалысының заңына да тәуелді екендігі көрсетілді.

Кілттік сөздер: бөлшек туынды, жылуөткізгіштіктің жүктелген теңдеуі, интегралдық теңдеу, Райт типті функция.

CONDITIONS FOR THE SOLVABILITY OF A FRACTIONAL-LOADED BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THERMAL CONDUCTIVITY

M.T.KOSMAKOVA, D.M. AKHMANOVA, E.K. SHUMAGULOVA
Karaganda University named after Academician E.A. Buketov, Karaganda, Kazakhstan
e-mail: svetlanamir578@gmail.com, danna.67@mail.ru, elmira09@inbox.ru

Abstract. The article considers a boundary value problem for a fractional-loaded heat equation in the first quadrant. The loaded term has the form of a fractional derivative in the sense of Riemann-Liouville in a spatial variable, and the order of the derivative in the loaded term is less than the order of the differential part. The study is based on the reduction of the boundary value problem to the Volterra integral equation of the second kind. The kernel of the resulting integral equation contains a special function — a Wright type function. In the article, the conditions for the solvability of the integral equation are obtained and it is shown that the existence and uniqueness of solutions to the integral equation depends both on the order of the fractional derivative in the loaded term of the initial-boundary value problem and on the law of motion of the load.

Keywords: fractional derivative, loaded heat equation, integral equation, Wright type function.