ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

У.К. КОЙЛЫШОВ[1,2], М.А. САДЫБЕКОВ[1,2] [0000-0001-8450-8191]

[1]Институт Математики и Математического Моделирования, Алматы, Казахстан.

[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан.

e-mail: koylyshov@mail.ru

Аннотация. Задачи теплопроводности с разрывными коэффициентами давно и хорошо исследуются. Следует отметить работы [1-5] , наиболее близкие по тематике к нашей работе. В работе Самарского А.А. [1] методом функции Грина и тепловых потенциалов доказана корректность первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом. А в работе казахстанских математиков Е.И. Ким и Б.Б. Баймуханов [2] методом потенциалов, сведением к интегральному уравнению доказана корректность первой начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности с разрывным коэффициентом теплопроводности в полупространстве.

В работах [3-5] с помощью тепловых потенциалов доказано существование классических решений различных краевых задач для уравнений параболического типа.

В случае без разрыва спектральная теория этих задач построена практически полностью. Здесь можно отметить работы [6-16].

В данной работе обосновано решение методом разделения переменных начально-краевых задач для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом теплопроводности при общих нелокальных условиях и рассмотрены некоторые частные случаи.

Ключевые слова: задачи теплопроводности с разрывными коэффициентами, уравнения теплопроводности.

Постановка задачи.

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, требуется найти функцию $u(x,t)$ удовлетворяющее уравнению

$$\left.\begin{cases} u_t - k_1^2 u_{xx}, & 0 < x < x_0 \\ u_t - k_2^2 u_{xx}, & x_0 < x < l \end{cases}\right\} = f(x,t), \tag{1}$$

начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

граничным условиям

$$\begin{cases} a_{11}u_x(0,t) + a_{12}u_x(l,t) + a_{13}u(0,t) + a_{14}u(l,t) = 0, \\ a_{21}u_x(0,t) + a_{22}u_x(l,t) + a_{23}u(0,t) + a_{24}u(l,t) = 0, \end{cases} \quad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

и условиям сопряжения

$$u(x_0-0,t)=u(x_0+0,t), \quad 0\le t\le T, \tag{4}$$

$$k_1u_x(x_0-0,t)=k_2u_x(x_0+0,t), \quad 0\le t\le T, \tag{5}$$

Метод решения.

Решение задачи (1)-(5) ищем в виде $u(x,t)=Y(x)\cdot T(t)\ne 0$. Подставляя в уравнение (1) и условия (3)-(5), и разделяя переменные получаем следующую спектральную задачу (при $f(x,t)=0$)

$$Ly=\begin{Bmatrix} -k_1^2Y''(x), & 0<x<x_0 \\ -k_2^2Y''(x), & x_0<x<l \end{Bmatrix}=\lambda Y(x), \tag{6}$$

$$\begin{cases} a_{11}Y'(0)+a_{12}Y'(l)+a_{13}Y(0)+a_{14}Y(l)=0, \\ a_{21}Y'(0)+a_{22}Y'(l)+a_{23}Y(0)+a_{24}Y(l)=0, \end{cases} \tag{7}$$

$$Y(x_0-0)=Y(x_0+0), \qquad k_1Y'(x_0-0)=k_2Y'(x_0+0), \tag{8}$$

Функция $T(t)$ является решением уравнения $T'(t)+\lambda T(t)=0$.

Нетрудно убедиться, что задача (6)-(8) несамосопряженная. Сопряженная задача к задаче (6)-(8) имеет вид:

$$Lz=\begin{Bmatrix} k_1^2Z''(x), & 0<x<x_0 \\ k_2^2Z''(x), & x_0<x<l \end{Bmatrix}=\lambda Z(x) \tag{9}$$

$$\begin{cases} k_1^2A_{12}Z'(0)-k_1^2A_{23}Z(0)-k_2^2A_{13}Z(l)=0, \\ k_2^2A_{12}Z'(l)+k_2^2A_{14}Z(l)+k_1^2A_{24}Z(0)=0, \end{cases} \tag{10}$$

$$k_1Z(x_0-0)=k_2Z(x_0+0), \qquad k_1^2Z'(x_0-0)=k_2^2Z'(x_0+0), \tag{11}$$

где A_{ij} миноры матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$,

$$A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}, \ 1\le i<j\le 4,$$

Собственные значения задачи (6)-(8) и сопряженной задачи (9)-(11) совпадают.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Для любых функций $\varphi(x) \in C[0,l] \cap C^2[0,x_0] \cap C^2[x_0,l]$ и $f(x,t) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\overline{\Omega_0}) \cap C^2(\overline{\Omega_l})$, удовлетворяющих краевым условиям (3) и условиям сопряжения (4)-(5), существует единственное классическое решение $u(x,t) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega_0}) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega_l})$ задачи (1)-(5).

Теорема 2. Для любой функции $\varphi(x) \in W_2^1(0,l) \cap W_2^2(0,x_0) \cap W_2^2(x_0,l)$, удовлетворяющей краевым условиям (3) и условиям сопряжения (4)-(5), и любой $f(x,t) \in L_2(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение $u(x,t) \in W_2^{2,1}(\Omega)$ задачи (1)-(5). Это решение является сильным решением задачи (1)-(5) и удовлетворяет оценке

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \|u\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega_0)} + \|u\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega_l)} \leq C\left\{\|f\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\varphi\|^2_{W_2^2(0,x_0)} + \|\varphi\|^2_{W_2^2(x_0,l)}\right\}.$$

Далее детально изучим некоторые частные случаи.

1)
$$Ly = \left\{ \begin{matrix} -k_1^2 Y''(x), & 0 < x < x_0 \\ -k_2^2 Y''(x), & x_0 < x < l \end{matrix} \right\} = \lambda Y(x), \tag{12}$$

$$\begin{cases} k_1 Y'(0) + k_2 Y'(l) = 0, \\ Y(0) + Y(l) = 0, \end{cases} \tag{13}$$

$$Y(x_0 - 0) = Y(x_0 + 0), \quad k_1 Y'(x_0 - 0) = k_2 Y'(x_0 + 0), \tag{14}$$

В этом случае собственные значения и собственные функции будут равны

$$\lambda_n = \left((2n+1)\pi r\right)^2, \quad Y_n(x) = C\begin{cases} \sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi r x}{k_1}\right), & 0 < x < x_0, \\ \sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi r(l-x)}{k_2}\right), & x_0 < x < l, \end{cases}$$

$$r = \frac{k_1 k_2}{k_2 x_0 + k_1(l - x_0)}$$

Известно, что задача (12)-(14) несамосопряженная. Сопряженная задача имеет вид:

$$Lz = \left\{ \begin{matrix} -k_1^2 Z''(x), & 0 < x < x_0 \\ -k_2^2 Z''(x), & x_0 < x < l \end{matrix} \right\} = \lambda Z(x),$$

$$\begin{cases} k_1^2 Z'(0) + k_2^2 Z'(l) = 0, \\ k_1 Z(0) + k_2 Z(l) = 0, \end{cases}$$

$$k_1 Z(x_0 - 0) = k_2 Z(x_0 + 0), \quad k_1^2 Z'(x_0 - 0) = k_2^2 Z'(x_0 + 0),$$

В этом случае собственные значения и собственные функции будут равны

$$\lambda_n = \left((2n+1)\pi r\right)^2, \quad Z_n(x) = C\begin{cases} \dfrac{1}{k_1}\sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi r x}{k_1}\right), & 0 < x < x_0, \\ \dfrac{1}{k_2}\sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi r(l-x)}{k_2}\right), & x_0 < x < l, \end{cases}$$

т.е. собственные значения совпадают, а собственные функции отличаются на
кусочно-постоянный множитель. Оказывается, следующая задача самосопряженная:

$$Lv = \left\{\begin{matrix} -k_1^2 v''(x), & 0 < x < x_0 \\ -k_2^2 v''(x), & x_0 < x < l \end{matrix}\right\} = \lambda v(x), \tag{15}$$

$$\begin{cases} k_1^{\frac{3}{2}} v'(0) + k_2^{\frac{3}{2}} v'(l) = 0, \\ \sqrt{k_1}\, v(0) + \sqrt{k_2}\, v(l) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

$$\sqrt{k_1}\, v(x_0 - 0) = \sqrt{k_2}\, v(x_0 + 0), \quad k_1^{\frac{3}{2}} v'(x_0 - 0) = k_2^{\frac{3}{2}} v'(x_0 + 0), \tag{17}$$

В этом случае нетрудно убедиться,что собственные значения и собственные функции будут равны

$$\lambda_n = \left((2n+1)\pi r\right)^2, \quad v_n(x) = C\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{k_1}}\sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi r x}{k_1}\right), & 0 < x < x_0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{k_2}}\sin\left(\dfrac{(2n+1)\pi r(l-x)}{k_2}\right), & x_0 < x < l, \end{cases} \tag{18}$$

Собственные функции задачи (12)-(14) и (15)-(17) отличаются на кусочно-постоянный множитель. Так как задача (15)-(17) самосопряженная, то собственные функции (18) образует базис Рисса. Тогда по известной теории, собственные функции задачи (12)-(14) также образует базис Рисса.

$$Ly = \left\{\begin{matrix} -k_1^2 Y''(x), & 0 < x < x_0 \\ -k_2^2 Y''(x), & x_0 < x < l \end{matrix}\right\} = \lambda Y(x), \tag{19}$$

$$\begin{cases} k_1 Y'(0) - k_2 Y'(l) = 0, \\ Y(0) = 0, \end{cases} \tag{20}$$

$$Y(x_0 - 0) = Y(x_0 + 0), \quad k_1 Y'(x_0 - 0) = k_2 Y'(x_0 + 0), \tag{21}$$

Собственные значения и собственные функции задачи (19)-(21) будут равны

$$\lambda_n = (2n\pi r)^2, \qquad Y_n(x) = C\begin{cases} \sin\left(\dfrac{2n\pi rx}{k_1}\right), & 0 < x < x_0, \\ -\sin\left(\dfrac{2n\pi r(l-x)}{k_2}\right), & x_0 < x < l, \end{cases}$$

Сопряженная задача к задаче (19)-(21) имеет вид:

$$Lz = \left\{\begin{matrix} -k_1^2 Z''(x), & 0 < x < x_0 \\ -k_2^2 Z''(x), & x_0 < x < l \end{matrix}\right\} = \lambda Z(x), \tag{22}$$

$$\begin{cases} k_1 Z(0) - k_2 Z(l) = 0, \\ Z'(l) = 0, \end{cases} \tag{23}$$

$$k_1 Z(x_0 - 0) = k_2 Z(x_0 + 0), \qquad k_1^2 Z'(x_0 - 0) = k_2^2 Z'(x_0 + 0), \tag{24}$$

Собственные значения и собственные функции сопряженной задачи (22)-(24) будут равны

$$\lambda_n = (2n\pi r)^2, \qquad Z_n(x) = C\begin{cases} \dfrac{1}{k_1}\cos\left(\dfrac{2n\pi rx}{k_1}\right), & 0 < x < x_0, \\ \dfrac{1}{k_2}\cos\left(\dfrac{2n\pi r(l-x)}{k_2}\right), & x_0 < x < l, \end{cases}$$

Итак, собственные значения задачи (19)-(21) и сопряженной задачи (22)-(24) совпадают, но собственные функции разные. Далее, необходимо построить присоединенные функции. Нетрудно доказать, что система собственных и присоединенных функций образует безусловный базис.

2) Далее рассмотрим следующую задачу

$$Ly = \left\{\begin{matrix} -k_1^2 Y''(x), & 0 < x < x_0 \\ -k_2^2 Y''(x), & x_0 < x < l \end{matrix}\right\} = \lambda Y(x), \tag{25}$$

$$\begin{cases} k_1 Y'(0) + k_2 Y'(l) + \alpha Y(l) = 0, \\ Y(0) = 0, \end{cases} \tag{26}$$

$$Y(x_0 - 0) = Y(x_0 + 0), \qquad k_1 Y'(x_0 - 0) = k_2 Y'(x_0 + 0), \tag{27}$$

Спектральная задача (25)-(27) имеет две серии собственных значений:

$$\lambda_n^{(1)} = \left((2n+1)\pi r\right)^2, \quad (n = 0,1,2,\ldots) \qquad \lambda_n^{(2)} = (2r\mu_n)^2,$$

где μ_n - корни уравнения $ctg\mu = -\frac{\alpha}{2r\mu}$, (можно построить график).

Собственные функции имеют вид:

$$Y_n(x) = C\begin{cases} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi k_2(x+1)}{k_1+k_2}\right) + \\ + \frac{(2n+1)\pi(k_1-k_2)}{a(k_1+k_2)}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi k_2(x+1)}{k_1+k_2}\right), \quad -1 < x < 0, \\ -\sin\left(\frac{(2n+1)\pi k_1(x-1)}{k_1+k_2}\right) - \\ -\frac{(2n+1)\pi(k_1-k_2)}{a(k_1+k_2)}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi k_1(x-1)}{k_1+k_2}\right), \quad 0 < x < 1, \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что собственные функции удовлетворяют граничным условиям (26) и условиям сопряжения (27).

Используем теорему Руше. Известно, что

$$ctgx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n,$$

тогда

$$\mu_n = \frac{\pi}{2} + \pi n + \delta_n, \quad |\delta_n| < \infty .$$

Отсюда

$$ctg\mu_n = -\frac{\alpha}{2r\mu_n} = -\frac{\alpha}{2r\left(\frac{\pi}{2} + \pi n + \delta_n\right)} = -\frac{\alpha}{r\left((2n+1)\pi + 2\delta_n\right)} \to 0,$$

при $n \to \infty$. Значит $\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

$$\lambda_n^{(2)} = (2r\mu_n)^2 = \left((2n+1)\pi + \delta_n\right)^2 r^2,$$

$$\lambda_n^{(1)} = \left((2n+1)\pi r\right)^2,$$

Итак

$$\left|\lambda_n^{(1)} - \lambda_n^{(2)}\right| \le \frac{C}{n} \to 0, \quad при \quad n \to \infty$$ (неусиленно регулярные)

Отсюда можно утверждать, что система собственных функций не образует безусловного базиса.

Список использованных источников

1. Самарский А.А. Параболические уравнения с разрывными коэффициентами //ДАН СССР, 1958, Т.121, №2, -С.225-228.

2. Ким Е.И., Баймуханов Б.Б. О распределении температуры в кусочно-однородной полубесконечной пластинке //ДАН СССР,1961 ,Т. 140, №2, -С.333-336.

3. Камынин Л.И. О решении краевых задач для параболического уравнения с разрывными коэффициентами //ДАН СССР, 1961, Т.139, №5, -С.1048-1051.

4. Камынин Л.И. О решении IV и V краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка в криволинейной области //Журн.вычисл.математики и мат.физики.-1969.-Т.9.-№3.-С.558-572.

5. Камынин Л.И. О методе потенциалов для параболического уравнения с разрывными коэффициентами.//ДАН СССР, 1962, Т.145,№6, -С.1213-1216.

6. Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциямнекоторых дифференциальных операторов.//Известия вузов. Математика – 1964. – №2. – С. 82-93.

7. Михайлов В.П. О базисах Рисса в $L_2(0,1)$. //Доклады АН СССР – 1962. – Т. 144, №5. – С. 981-984.

8. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы. часть III, Спектральные операторы. – Нью Йорк. – 1974, 662 с.

9. Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями. //Дифференциальные уравнения, 1979. – Т.15.-№7. -С. 1284–1295.

10. Ионкин Н.И. Решение одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием.//Дифференциальные уравнения, 1977.-Т.13.-№2. -С. 294-304.

11. Ионкин Н.И., Морозова В.А. Двумерное уравнение теплопроводности с нелокальными краевыми условиями. //Дифференциальные уравнения, 2000. – Т.36.-№7. -С. 884–888.

12. Оразов И., Садыбеков М.А. Об одном классе задач определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам //Сибирский математический журнал. – 2012. – Т. 53, №1. – С. 180-186.

13. Оразов И., Садыбеков М.А. Об одной нелокальной задаче определения температуры и плотности источников тепла. //Известия вузов. Математика. – 2012. – №2. – С. 70–75.

14. Sadybekov M.A. Initial-Boundary Value Problem for a Heat Equation with not Strongly Regular Boundary Conditions // Functional Analysis in Interdisciplinary Applications. – Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. – 2017. – Vol. 216. – P. 330–348.

15. Orazov I., Sadybekov M.A. On an inverse problem of mathematical modeling of the extraction process of polydisperse porous materials. – AIP Conference Proceedings. – 2015. – Vol. 1676, 020005. – 4 pp.

16. Orazov I., Sadybekov M.A. One-dimensional Diffusion Problem with not Strengthened Regular Boundary Conditions //AIP Conference Proceedings. – 2015. – Vol. 1690, 040007. – 6pp.

КОЭФФИЦИЕНТІ БӨЛІКТІ-ТҰРАҚТЫ ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУ ҮШІН БІР ЛОКАЛДЫ ЕМЕС ЕСЕП ТУРАЛЫ

У.К. КОЙЛЫШОВ[1,2], М.А. САДЫБЕКОВ[1,2] [0000-0001-8450-8191]

[1] Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан.

[2] Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті., Алматы, Қазақстан.

e-mail: koylyshov@mail.ru

Аңдатпа. Коэффициенттері үзілісті параболалық типті теңдеулерді көптеген авторлар бұрыннан жақсы зерттеген. Бұл еңбектерде есептер потенциалдар әдісімен интегралдық теңдеулерге келтіріліп, коэффициенттері үзілісті параболалық типті теңдеулер үшін әртүрлі бастапқы-шеттік есептердің қисынды шығарылуы дәлелденген. Үзіліссіз жағдайда бұл есептердің спектрлік теориясы толығымен құрылған. Бұл жұмыста жалпы локальды емес жағдайларда жылуөткізгіштік коэффициенті бөлікті- тұрақты жылуөткізгіштік теңдеуі үшін бастапқы-шеттік есептерді айнымалыларды бөлу әдісімен шешу негізделіп, кейбір дербес жағдайлар қарастырылған.

Түйін сөздер: Жылуөткізгіштік теңдеу, үзілісті коэффициенттер, спектрлік теория, локалды емес шарттар, айнымалыларды бөлу әдісі.

ON ONE NONLOCAL PROBLEM FOR THE EQUATION THERMAL CONDUCTIVITY WITH A PIECEWISE CONSTANT COEFFICIENT

U.K. KOLYSHKOV[1,2], M.A. SADYBEKOV[1,2]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.

[2]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.

e-mail: koylyshov@mail.ru

Abstract. Parabolic type equations with discontinuous coefficients have long been well studied by many authors. In these papers, the problems are reduced to integral equations by the method of potentials and the well-posedness of various initial-boundary value problems for equations of parabolic type with discontinuous coefficients is proved. In the case without a discontinuity, the spectral theory of these problems is constructed almost completely. In this paper, we substantiate the solution by the method of separation of variables of initial-boundary value problems for the heat equation with a piecewise constant heat conduction coefficient under general non-local conditions and consider some special cases.

Keywords: Heat equation, discontinuous coefficients, spectral theory, nonlocal conditions, separation of variables method.