УДК 517.946
МРНТИ 27.33.19

ПОСТРОЕНИЕ МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Ж.А. САРТАБАНОВ[1], Г.М.АЙТЕНОВА[2], Г.А. АБДИКАЛИКОВА[1]

[1]*Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан*

[2]*Западно-Казахстанский университет имени М.Утемисова, Уральск, Казахстан*

E-mail: sartabanov42@mail.ru; gulsezim-88@mail.ru; agalliya@mail.ru

Аннотация. Исследуется система интегро-дифференциальных уравнений. Построен матрицант, приведены интегральные представления многопериодического решения, получены достаточные условия существования и единственности многопериодического решения рассматриваемой системы.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, матрицант, резольвента, ядро, многопериодичность.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение в частных производных

$$D_c u(\tau,t) = A(\tau,t)u(\tau,t) + \int_{\tau}^{\tau+\theta} K(\tau,t,s,\sigma)u(s,\sigma)ds + f(\tau,t), \tag{1}$$

где $u(\tau,t)$ – искомая вектор-функция переменных $(\tau,t)\in R\times R^m$; $D_c = \partial/\partial\tau + \langle c,\partial/\partial t\rangle$ – оператор дифференцирования, c – постоянный m-вектор, $\langle c,\partial/\partial t\rangle$ – скалярное произведение векторов c и $\partial/\partial t = (\partial/\partial t_1,\ldots,\partial/\partial t_m)$; $\sigma = \sigma_0 + cs = t - c\tau + cs$ – характеристика оператора дифференцирования D_c по направлениям векторного поля $dt/d\tau = c$, $s\in R = (-\infty;+\infty)$; $A(\tau,t)$ и $K(\tau,t,s,\sigma)$ – $n\times n$-матрицы, $f(\tau,t)$ – n - вектор-функция.

Исследованием теории интегро-дифференциальных уравнений занимались многие авторы. Как известно, В.Вольтерра использовал интегро-дифференциальные уравнения в задачах наследственной упругости [1], обосновал существование периодических флуктуаций в биологических ассоциациях, создал общую теорию функционалов [2]. В работе [3] рассмотрены распространение результатов М.Урабе на системы интегро-дифференциальных уравнений. Интегро-дифференциальные уравнения находят применения в задачах теории наследственности [4]. Исследованию почти периодических решений систем уравнений с квазипериодическими правыми частями посвящена [5]. В [6, 7] исследованы почти периодические решения интегро-дифференциальных уравнений типа переноса. Вопросы существования и построения многопериодических и псевдопериодических решений систем интегро-дифференциальных уравнений, содержащих пространственную переменную рассмотрены в [8]. По различным проблемам теории периодических и почти периодических колебаний были изложены в [9].

Цель работы – установить достаточные условия существования и единственности многопериодического решения интегро-дифференциального уравнения (1) с оператором дифференцирования по направлению векторного поля.

Предположим выполненными условия (θ,ω)-периодичности, непрерывности по $\tau\in R$ и непрерывной дифференцируемости по $t\in R^m$:

$$A(\tau+\theta,t+q\omega)=A(\tau,t)\in C_{\tau,t}^{(0,e)}\left(R\times R^m\right),\ q\in Z^m, \qquad (2)$$

$$K(\tau+\theta,t+q\omega,s,\sigma)=K(\tau,t,s,\sigma)\in C_{\tau,t,s,\sigma}^{(0,e,0,e)}\left(R\times R^m\times R\times R^m\right),\ q\in Z^m, \qquad (3)$$

$$K(\tau+\theta,t+q\omega,s+\theta,t+q\omega-c(\tau+\theta)+c(s+\theta))=K(\tau,t,s,t-c\tau+cs),\ q\in Z^m,$$

$$f(\tau+\theta,t+q\omega)=f(\tau,t)\in C_{\tau,t}^{(0,e)}\left(R\times R^m\right),\ q\in Z^m. \qquad (4)$$

Здесь $e=(1,...,1)$ – m-вектор, показатель степени гладкости по $t=(t_1,...,t_m)$; Z^m – множество целочисленных векторов $q=(q_1,...,q_m)$, $q\omega=(q_1\omega_1,...,q_m\omega_m)$ – кратный период с кратностью q периода $\omega=(\omega_1,...,\omega_m)$, периоды $\omega_0=\theta$, $\omega_1,...,\omega_m$ – рационально несоизмеримые положительные постоянные.

Рассмотрим однородное интегро-дифференциальное уравнение

$$D_c u(\tau,t)=A(\tau,t)u(\tau,t)+\int_{\tau}^{\tau+\theta}K(\tau,t,s,\sigma)u(s,\sigma)ds, \qquad (5)$$

соответствующее неоднородному уравнению (1). Учитывая $\sigma=\sigma_0+cs$ по известной методике [6] построения матрицанта уравнения $D_c w=A(\tau,t)w$ определим матрицу $W(\tau_0,\tau,t)$ на основе интегрального матричного уравнения

$$W(\tau_0,\tau,t)=E+\int_{\tau_0}^{\tau}A(s,t-c(\tau-s))W(\tau_0,s,t-c(\tau-s))ds \qquad (6)$$

с единичной n-матрицей E. Заметим, что в силу условий (2)-(4) матрица $W(s,\tau,t)$ является (θ,θ,ω)-периодической по s,τ,t:

$$W(s+\theta,\tau+\theta,t+q\omega)=W(s,\tau,t)\in C_{s,\tau,t}^{(0,0,e)}\left(R\times R\times R^m\right),\ q\in Z^m.$$

Решение интегрального уравнения (6) ищем в виде ряда

$$W(\tau_0,\tau,t)=\sum_{m=0}^{\infty}W_m(\tau_0,\tau,t), \qquad (7)$$

члены которого находим из рекуррентных соотношений:

$$W_0(\tau_0,\tau,t)=E,\ W_1(\tau_0,\tau,t)=\int_{\tau_0}^{\tau}A(s,t-c(\tau-s))ds\,,\ \dots\,,$$

$$W_m(\tau_0,\tau,t)=\int_{\tau_0}^{\tau}A(s,t-c(\tau-s))W_{m-1}(\tau_0,s,t-c(\tau-s))ds\,,\ m=1,2,...,.$$

Непосредственно можно убедиться, что ряд (7) сходится абсолютно и равномерно.

Положим, что матрицант $W(\tau_0,\tau,t)$ уравнения (5) для всех $\tau\geq\tau_0$ и $t\in R^m$ удовлетворяет условию $\|W(\tau_0,\tau,t)\|\leq\Gamma e^{-\rho(\tau-\tau_0)}$ с постоянными $\Gamma\geq1,\ \rho>0$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что матрицант $W(\tau_0,\tau,t)$ обладает свойством многопериодичности по τ_0,τ и t:

$$W(\tau_0+\theta,\tau+\theta,t+q\omega)-W(\tau_0,\tau,t)=0\,,\ q\in Z^m\,.$$

Используя замену

$$u(\tau,t)=W(\tau_0,\tau,t)v(\tau,t), \tag{8}$$

однородное уравнение (5) приводится к виду

$$D_c v(\tau,t)=\int_{\tau}^{\tau+\theta}Q(\tau_0,\tau,t,s,t-c(\tau-s))v(s,t-c(\tau-s))ds \tag{9}$$

с ядром $Q(\tau_0,\tau,t,s,\sigma)=W^{-1}(\tau_0,\tau,t)K(\tau,t,s,\sigma)W(\tau_0,s,\sigma)$. Отметим, что на основе условий (2)-(4) ядро $Q(\tau_0,\tau,t,s,t-c(\tau-s))$ обладает свойством:

$$Q(\tau_0+\theta,\tau+\theta,t+q\omega,s+\theta,t+q\omega-c(\tau+\theta)+c(s+\theta))=Q(\tau_0,\tau,t,s,t-c(\tau-s)),\ q\in Z^m\,.$$

Для матрицанта $V(\tau_0,\tau,t)$ уравнения (9) имеем матричное интегральное уравнение

$$V(\tau_0,\tau,t)=E+\int_{\tau_0}^{\tau}\int_{\eta}^{\eta+\theta}Q(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))V(\tau_0,s,t-c(\tau-s))dsd\eta\,. \tag{10}$$

Решение интегрального уравнения (10) ищем в виде:

$$V(\tau_0,\tau,t)=\sum_{m=0}^{\infty}V_m(\tau_0,\tau,t) \tag{11}$$

с начальным приближением $V_0(\tau_0,\tau_0,t)=E$. $V_m(\tau_0,\tau,t)$ находим из соотношения

$$V_m(\tau_0,\tau,t)=\int_{\tau_0}^{\tau}\int_{\eta}^{\eta+\theta}Q(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))V_{m-1}(\tau_0,s,t-c(\tau-s))dsd\eta,\ m=1,2,\dots.$$

Тогда

$$V_m(\tau_0,\tau,t)=\int_{\tau_0}^{\tau}\int_{\eta}^{\eta+\theta}Q_m(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))dsd\eta\,. \qquad (12)$$

Ядро интегро-дифференциального уравнения определяется через рекуррентные соотношения. Установлены справедливость следующих оценок

$$\|Q_m(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))\|\le Q_0^m\,\frac{\theta^{m-1}(\tau-\eta)^{m-1}}{(m-1)!}\,,\ \|V_m(\tau_0,\tau,t)\|\le Q_0^m\,\frac{\theta^m(\tau-\tau_0)^m}{m!}\,,m=1,2,...,\,.$$

Отметим, что все итерированные ядра $Q_m(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))$ обладают свойством:

$$Q_m(\tau_0+\theta,\eta,t+q\omega-c((\tau+\theta)-\eta),s,t+q\omega-c((\tau+\theta)-s))=Q_m(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s)).$$

На оснований условий (2)-(4) можно показать, что матрицант $V(\tau_0,\tau,t)$ (θ,θ,ω)-периодична по $\tau_0,\tau,t: V(\tau_0+\theta,\tau+\theta,t+q\omega)=V(\tau_0,\tau,t)\in C_{\tau_0,\tau,\ t}^{(0,0,e)}(R\times R\times R^m),\ q\in Z^m$.

К ряду (11) воспользовавшись (12) имеем:

$$V(\tau_0,\tau,t)=E+\int_{\tau_0}^{\tau}\int_{\eta}^{\eta+\theta}\sum_{m=1}^{\infty}Q_m(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))dsd\eta\,. \qquad (13)$$

Ряд $\sum_{m=1}^{\infty}Q_m(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))$ сходится абсолютно и равномерно к непрерывной функции $R(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))$, называемое резольвентой ядра. Разрещающее ядро удовлетворяет интегральному уравнению

$$R(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))=Q(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))+$$

$$+\int_{\eta}^{\tau}\int_{\eta}^{\eta+\theta}Q(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))R(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))dsd\eta\,. \qquad (14)$$

Решение уравнения (14) находим методом последовательных приближений и ищем в виде ряда

$$R(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))=\sum_{m=1}^{\infty}Q_m(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s)). \qquad (15)$$

Применив резольвенту (15) к (13) имеем

$$V(\tau_0,\tau,t)=E+\int_{\tau_0}^{\tau}\int_{\eta}^{\eta+\theta}R(\tau_0,\eta,t-c(\tau-\eta),s,t-c(\tau-s))dsd\eta\,.$$

Далее с учетом (8) имеем $U(\tau_0,\tau,t)=W(\tau_0,\tau,t)V(\tau_0,\tau,t)$. Оценим $U(\tau_0,\tau,t)$

$$\|U(\tau_0,\tau,t)\|\le\|W(\tau_0,\tau,t)\|\|V(\tau_0,\tau,t)\|\le\Gamma e^{\chi(\tau-\tau_0)},\ \chi=Q_0\theta-\rho<0\,. \qquad (16)$$

Задача. Найти функцию $u(\tau,t)$, удовлетворяющей для всех $\tau>\tau_0$ и $t\in R^m$ интегро-дифференциальному уравнению (1) и начальному условию

$$u(\tau_0,t)=\varphi(t)\in C_t^e\left(R^m\right). \tag{17}$$

Теорема. Если выполнены условия (2)-(4), (16) и $\varphi(t)\in C_t^e\left(R^m\right)$, то существует единственное многопериодическое решение $u^*(\tau,t)$ задачи (1), (17), определяемое в виде $u^*(\tau,t)=\int\limits_{-\infty}^{\tau}U(\tau_0,s,t-c(\tau-s))f(s,t-c(\tau-s))ds$ и удовлетворяющее условию $\left\|u^*(\tau,t)\right\|\le\Gamma\chi^{-1}f_0$.

Доказательство. Решение задачи Коши (1), (17) ищем в виде

$$u(\tau,t)=U(\tau_0,\tau,t)\varphi(t-c(\tau-\tau_0))+\int\limits_{\tau_0}^{\tau}U(s,\tau,t-c(\tau-s))f(s,t-c(\tau-s))ds. \tag{18}$$

В (18) предполагая, что вектор-функция $\varphi(t)$ любая из $C_t^e\left(R^m\right)$, используя необходимое и достаточное условие многопериодичности Умбетжанова-Сартабанова

$$u(\tau_0+\theta,t)=u(\tau_0,t)\in C_{\tau_0,t}^{(0,e)}\left(R\times R^m\right) \tag{19}$$

ищем среди решений (18) многопериодическое решение системы (1). Воспользовавшись условием периодичности (19) для решения (18) имеем

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=U(\tau_0,\tau_0+\theta,t)\varphi(t-c((\tau_0+\theta)-s))+\\&+\int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\theta}U(\tau_0,s,t-c((\tau_0+\theta)-s))f(s,t-c((\tau_0+\theta)-s))ds.\end{aligned} \tag{20}$$

Затем во втором члене правой части (20) совершая сдвиг интегрирования на период θ и учитывая θ -периодичность матрицанта $U(\tau_0,\tau,t-c(\tau-s))$ и вектор-функций $f(\tau,t-c(\tau-s))$, решая ее методом последовательных приближений, по ходу используя формулу типа свертки и применяя метод полной математической индукции, имеем $\varphi_m(t)=\int\limits_{\tau_0-m\theta}^{\tau_0}U(\tau_0,s,t-c(\tau_0-s))f(s,t-c(\tau_0-s))ds$. Тем самым

$$\begin{aligned}\varphi^*(t)&=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\tau_0-k\theta}^{\tau_0}U(\tau_0,s,t-c(\tau_0-s))f(s,t-c(\tau_0-s))ds=\\&=\int\limits_{-\infty}^{\tau_0}U(\tau_0,s,t-c(\tau_0-s))f(s,t-c(\tau_0-s))ds.\end{aligned} \tag{21}$$

Подставляя (21) в (18), используя групповое свойство, получим:

$$u^*(\tau,t)=\int_{-\infty}^{\tau}U(\tau_0,s,t-c(\tau-s))f(s,t-c(\tau-s))ds\,. \qquad (22)$$

Сходимость несобственного интеграла в правой части (22) обеспечивается ограниченностью вектор-функции $f(\tau,t-c(\tau-s))$.

Отметим некоторые свойства вектор-функции $u^*(\tau,t)$:

1) функция $u^*(\tau,t)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению (1) и при $\tau\to\tau_0+0$ обращается в $\varphi^*(t)$;

2) она является многопериодической функцией по τ и t с вектором-периодом (θ,ω);

3) $\left\|u^*(\tau,t)\right\|\le\Gamma\chi^{-1}f_0$, где $\left\|f(\tau,t-c(\tau-s))\right\|=\sup\limits_{(\tau,t)\in R\times R^m}\left|f(\tau,t-c(\tau-s))\right|\le f_0$, $f_0=const$.

4) Решение $u^*(\tau,t)$ единственно.

Что и требовалось доказать.

Список использованной литературы

1. Volterra V. Lecons sur les equations integrals et les equations integro-differentielles. – Paris. – 1913. – 165 p.

2. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 303 с.

3. Самойленко А.М., Нуржанов О.Д. Метод Бубнова-Галеркина построения периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтера //Диффренц. уравнения. – 1979. – Vol. 15, №8. – С. 1503-1517.

4. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.

5. Харасахал В.Х. Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1970. – 200 с.

6. Умбетжанов Д.У. Почти периодические решения эволюционных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1990. – 184 с.

7. Умбетжанов Д.У., Бержанов А.Б. О существовании почти многопериодического решения одной системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных //Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1983. №5. – С. 11-15.

8. Сартабанов Ж.А. Псевдопериодические решения одной системы интегро-дифференциальных уравнений //Укр.мат. жур. – 1989. – Vol. 41, №1. – С. 125-130.

9. Абдикаликова Г.А. Построение почти периодического решения одной квазилинейной параболической системы //Изв. МОН НАН РК. Сер.физ.-мат. – 2001. №3. – С. 3-8.

ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ИНТЕГРАЛДЫ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ БІР ЖҮЙЕСІНІҢ КӨППЕРИОДТЫ ШЕШІМІН ҚҰРУ

Ж.А.САРТАБАНОВ[1], Г.М.АЙТЕНОВА[2], Г.А.АБДИКАЛИКОВА[1]

[1] *Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан*

[2] *М. Өтемісов атындағы Батыс Қазақстан университеті, Орал, Қазақстан*

e-mail: sartabanov42@mail.ru; gulsezim-88@mail.ru; agalliya@mail.ru

Аңдатпа. Интегралды-дифференциалдық теңдеулер жүйесі зерттеледі. Матрицант құрылып, көппериодты шешімнің интегралды көріністері келтірілді, қарастырылып отырған жүйенің көппериодты шешімінің бар және жалғыз болуының жеткілікті шарттары алынды.

Түйін сөздер: интегралды-дифференциалдық теңдеу, матрицант, резолвента, ядро, көппериодтылық.

CONSTRUCTION OF A MULTIPERIODIC SOLUTION OF ONE SYSTEM OF INTEGRO-DIFFERENTIAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Zh.A.SARTABANOV[1], G.M.ANTONOVA[2], G.A.ABDIKALIKOVA[1]

[1] *Aktobe Regional University named after K.Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan*

[2] *M.Utemisov West Kazakhstan University, Uralsk, Kazakhstan*

e-mail: sartabanov42@mail.ru; gulsezim-88@mail.ru; agalliya@mail.ru

Annotation. A system of integro-differential equations is investigated. A matricant is constructed, integral representations of a multiperiodic solution are given, sufficient conditions for the existence and uniqueness of a multiperiodic solution of the system under consideration are obtained.

Keywords: integro-differential equation, matricant, resolvent, kernel, multiperiodicity.