УДК 517.956

КРИТЕРИИ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ $l(\cdot)-A$ С ОПЕРАТОРОМ ТРИКОМИ A

Б.Д. КОШАНОВ[0000-0002-0784-5183]*, З. КАНАТБЕККЫЗЫ, Д. РАХЫМБЕКҰЛЫ, С. КУМАРБЕКОВ

Казахский национальный университет им. Аль-Фараби

*e-mail: koshanov@list.ru

Аннотация. В настоящей статье исследуется вопрос единственности решения регулярной по времени задачи для дифференциально-операторного уравнения $\mathrm{l}(\cdot)-A$ с оператором Трикоми A. Порядок дифференциального выражения $\mathrm{l}(\cdot)$ считается произвольным натуральным числом n. Для дифференциального выражения $\mathrm{l}(\cdot)$ задаются регулярные краевые условия по временной переменной t. Оператор A является порожденной уравнением Трикоми $Av = yv_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y)$. Граничные условия для оператора Трикоми задаются условием Дирихле на эллиптической части и дробными производными следами решения вдоль характеристик на гиперболической части. Указывается, что данный оператор является самосопряженным оператором в $L_2(\Omega)$. Самосопряженность оператора A гарантирует существование полной ортонормированной в $L_2(\Omega)$ системы собственных функций, если Ω -- область, ограниченной кривой Ляпунова и характеристиками волнового уравнения.

Ключевые слова: гиперболические операторы второго порядка, регулярные краевые задачи по времени, краевая задача со смещением, единственность решения, собственные функций, полные ортонормированные системы. **2010 Mathematics Subject Classification**: 35G05, 35G10, 35P05

1. В функциональном пространстве $L_2(0,T)$ рассмотрим оператор B, порожденный дифференциальным выражением

$$\mathrm{l(w)} \equiv \frac{d^n w}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}w}{dt^{n-1}} + \cdots + p_n(t)w(t), \qquad 0<t<T \tag{1}$$

с регулярными краевыми условиями

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\alpha_{kj}w^{(k)}(0) + \beta_{kj}w^{(k)}(T)\right] = 0\,,\ \ j=1,2,\dots,n. \tag{2}$$

где $p_j(t)\epsilon\, C^{(n-j)}[0,T],\ \ j=1,2,\dots,n.$

Требование I. Предположим, что область определения оператора B задается регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями [1]. Иначе говоря, в случае нечетного $\mathrm{n} = 2\mathrm{p}-1$ следующие два определителя θ_0, θ_1 отличны от нуля; в случае четного $\mathrm{n} = 2\mathrm{p}$ следующие два определителя θ_{-1}, θ_1 отличны от нуля.

Сопряженный оператор B^* задается дифференциальным выражением

$$B^*R(t) = l^+(R), \qquad 0 < t < T$$

и областью определения

$$D(B^*) = \{R \epsilon W_2^n[0,T] : V_1(R) = 0, \ldots, V_n(R) = 0\}.$$

В работе [1] доказано следующее утверждение.

Теорема 1 [1]. *Пусть область определения оператора B задается регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями. Тогда область определения оператора сопряженного* B^* *задается также регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями.*

Нам потребуется также следующее утверждение [3].

Теорема 2 [3]. *Пусть оператор B порожден регулярными в смысле Биркгофа краевыми условиями. Тогда система собственных и присоединенных функций оператора B является полной системой в пространстве* $L_2(0,T)$.

Применяя теорему 1 и теорему 2 к сопряженному оператору B^* , можем сформулировать утверждение.

Теорема 3. *Пусть выполнены требование I. Тогда система собственных и присоединенных функций оператора* B^* *полна в пространстве* $L_2(0,T)$.

2. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^2$ - конечная область, ограниченная при $y > 0$ кривой Ляпунова σ, оканчивающейся в окрестности точек $O(0{,}0)$ и $B(1{,}0)$ малыми дугами "нормальной кривой" σ_0, а при $y < 0$ – характеристиками OC: $\mathrm{x} - \frac{2}{3}(-\mathrm{y})^{\frac{3}{2}} = 0$, BC: $\mathrm{x} + \frac{2}{3}(-\mathrm{y})^{\frac{3}{2}} = 1$ уравнения

$$Av = yv_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y) = f(x,y). \qquad (3)$$

Задача T. Найти в Ω решение уравнения (17), удовлетворяющие условию

$$u(x,y;t)|_{\sigma_0} = 0, \quad \sigma_0: (x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{4}{9}y^3 = \tfrac{1}{4}\ , \qquad (4)$$

$$\mathrm{x}^{5/6}\mathrm{D}_{0+}^{1/6}(u(\chi_0(\mathrm{x}))\mathrm{x}^{-2/3}) + (1-\mathrm{x})^{5/6}\mathrm{D}_{1-}^{1/6}(\mathrm{u}(\chi_1(\mathrm{x}))(1-\mathrm{x})^{-2/3}) = 0, \qquad (5)$$

где

$$\mathrm{u}(\chi_0(\mathrm{x})) = \mathrm{u}\left(\mathrm{x}, -\left[\frac{3\mathrm{x}}{2}\right]^{2/3}\right), \qquad 0 \le \mathrm{x} \le \frac{1}{2},$$

$$\mathrm{u}(\chi_1(\mathrm{x})) = \mathrm{u}\left(\mathrm{x}, -\left[\frac{3(1-\mathrm{x})}{2}\right]^{2/3}\right), \qquad \frac{1}{2} \le \mathrm{x} \le 1.$$

Здесь граничные условия задаются с помощью дробных производных Римана-Лиувилля [2]

$$\mathrm{D}_{0+}^{1/6}\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\int_{\mathrm{o}}^{\mathrm{x}} \frac{\mathrm{g}(\mathrm{t})}{(\mathrm{x}-\mathrm{t})^{1/6}}\,\mathrm{dt}\,,$$

$$D_{1-}^{1/6}g(x) = -\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{g(t)}{(t-x)^{\frac{1}{6}}}dt.$$

Оператор, соответствующий краевой задаче T обозначим через A. Собственные значения оператора A будем нумеровать парой целочисленных индексов η_m. Собственные функции оператора A обозначим через $v_m(x,y)$ соответствующих собственным значением η_m.

В работе [4] доказано следующее утверждение.

Теорема 4 [4]. Оператор A является самосопряженным в пространстве $L_2(\Omega)$.

Как следствие данной теоремы К заключаем, что собственные функций $\{v_m(x,y), m = 1,2,\ldots,\}$ оператора A образуют полную систему функций в $L_2(\Omega)$.

3. Пусть Ω - конечная область из предыдущего пункта. В области $Q = \Omega \times (0,T)$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^n u(x,y;t)}{\partial t^n} + \sum_{j=1}^{n} p_j(t)\frac{\partial^{n-j}u(x,y;t)}{\partial t^{n-j}} == y\frac{\partial^2 u(x,y;t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y;t)}{\partial y^2} + f(x,y;t), (x,y) \in \Omega,\ 0 < t < T \quad (6)$$

с краевыми условиями по t

$$U_v\big(u(x,y;\cdot)\big) = 0, \qquad v = 1,2,\ldots,n,\ (x,y) \in \Omega \qquad (7)$$

и с условиями по (x,y)

$$u(x,y;t)|_{\sigma_0} = 0, \quad \sigma_0: (x-\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{4}{9}y^3 = \tfrac{1}{4}, \qquad (8)$$

$$x^{5/6}D_{0+}^{5/6}(u(\chi_0(x);t)x^{-2/3}) + (1-x)^{5/6}D_{1-}^{1/6}(u(\chi_1(x);t)(1-x)^{-2/3}) = 0, \qquad (9)$$

где

$$u(\chi_0(x);t) = u\left(x, -\left[\frac{3x}{2}\right]^{\frac{2}{3}};t\right), 0 \le x \le \frac{1}{2},$$

$$u(\chi_1(x);t) = u\left(x, -\left[\frac{3(1-x)}{2}\right]^{\frac{2}{3}};t\right), \qquad \frac{1}{2} \le x \le 1, \qquad 0 < t < T.$$

Операторная запись вышеприведенной задачи (6)-(9) имеет вид

$$Bu = Au(x,y;t) + f(x,y;t), \quad (x,y;t) \in Q. \qquad (10)$$

Здесь оператор B действует по переменной t и его свойства приведены в пункте 1. Оператор A действует по переменным (x,y) и его спектральные свойства приведены в пункте 2.

В данном пункте докажем критерий единственности решения однородного операторного уравнения (10).

Теорема 5. Пусть выполнено требование I. Тогда однородное операторное уравнение

$$Bu = Au \tag{11}$$

имеет только тривиальное решение $u \in D(B) \cap D(A)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sigma(B) \cap \sigma(A) \neq \emptyset , \tag{12}$$

где $\sigma(B)$ *и* $\sigma(A)$ *- спектры операторов В и А соответственно.*

Funding: Авторы были поддержаны грантом AP 08857604 МОН РК.

Ключевые слова: гиперболические операторы второго порядка, регулярные краевые задачи по времени, краевая задача со смещением, единственность решения, собственные функций, полные ортонормированные системы.

2010 Mathematics Subject Classification: 35G05, 35G10, 35P05

Литература

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. 1969. Наука, Москва. 528 с.

2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of fractional differential equations. 2006. Elsevier. 541 p.

3. Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Матем. 1964. № 2. С. 82-93.

4. Кальменов Т.Ш. О самосопряженных краевых задачах для уравнения Трикоми //Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, №1. С. 66-75.

ТРИКОМИ A ОПЕРАТОРЫ БАР $l(\cdot) - A$ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫ ОПЕРАТОРЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН УАҚЫТ БОЙЫНША ЛОКАЛЬДЫ ЕМЕС ЕСЕПТІҢ ШЕШІМІНІҢ ЖАЛҒЫЗДЫҒЫНЫҢ КРИТЕРИІ

Б.Д. КОШАНОВ[0000-0002-0784-5183]*, З. КАНАТБЕККЫЗЫ, Д. РАХЫМБЕКҰЛЫ, С. КУМАРБЕКОВ

Казахский национальный университет им. Аль-Фараби

*e-mail: koshanov@list.ru

Аңдатпа. Бұл мақалада Трикоми A операторы бар $l(\cdot) - A$ дифференциалды операторлық теңдеу үшін уақыт бойынша локальды емес есептің шешімінің жалғыздығы туралы мәселе зерттеледі. Мұндағы $l(\cdot)$ -- дифференциалдық өрнегінің кез келген натурал n санына тең. Осы $l(\cdot)$ -- дифференциалдық өрнегіне уақыт айнымалысы t бойынша регулярлы шеттік шарт қойылады. Ал A операторы $Av = yv_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y)$ Трикоми теңдеуінен туындайды. Осы Трикоми теңдеуіне шекаралық шарттар эллиптикалық бөлігінде Дирихле шарты беріледі, ал гиперболалық бөлігінде характеристиканың бойында шешімнің ізіне бөлшек туындылы шарттар қойылады. Осы Трикоми A операторының $L_2(\Omega)$ кеңістігінде өз-өзіне түйіндес екендігі көрсетілдеді. Өз-өзіне түйіндес A операторы $L_2(\Omega)$ кеңістігінде толық ортонормаланған меншікті функиялар жүйесінің бар болуын қамтамасыз етеді. Мұндағы Ω -- обылысы, жоғары жағынан, эллиптикалық бөлігі Ляпунов қисығымен шектелген, ал төменгі жағы тербеліс теңдеудің характеристикаларымен шектелген.

Түйін сөздер: екінші ретті гиперболалық операторлар, уақыт бойынша регулярлы шеттік есептер, жылжымалы шеттік есеп, шешімнің жалғыздығы, меншікті функиялар, толық ортонормаланған жүйелер.
2010 Mathematics Subject Classification: 35G05, 35G10, 35P05

CRITERIA FOR THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF A TIME-NONLOCAL PROBLEM FOR THE OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION $l(\cdot) - A$ WITH THE TRICOMI OPERATOR A

B.D. KOSHANOV, Z. KANATBEKKYZY, D. RAKHYMBEKULY, N.M. SHYNYBAEVA
Al-Farabi Kazakh National University
*e-mail: koshanov@list.ru

Annotation. In this article, the question of the uniqueness of the solution of a time-regular problem for the differential operator equation $l(\cdot) - A$ with the operator is investigated Tricomi A. The order of the differential expression $l(\cdot)$ is considered an arbitrary natural number n. For the differential expression $l(\cdot)$, regular boundary conditions are given for the time variable t. The operator A is generated by the Tricomi equation $Av = yv_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y)$. The boundary conditions for the Tricomi operator are given by the Dirichlet condition on the elliptic part and the fractional derivatives of the solution along the characteristics on the hyperbolic part. It is indicated that this operator is a self-adjoint operator in $L_2(\Omega)$. The self-adjoint of the operator A guarantees the existence of a complete orthonormal system of eigenfunctions in $L_2(\Omega)$ if Ω is a domain bounded by the Lyapunov curve and the characteristics of the wave equation.

Ключевые слова: second-order hyperbolic operators, regular boundary value problems in time, boundary value problem with fractional derivatives, uniqueness of the solution, eigenfunctions, complete orthonormal systems.
2010 Mathematics Subject Classification: 35G05, 35G10, 35P05