УДК 517.927.25
МРНТИ 27.29.19

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ БЕЗУСЛОВНОЙ БАЗИСНОСТИ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Ә.М. СӘРСЕНБІ[0000-0003-4709-2777]

Южно-Казахстанский университет им М. Ауэзова, г. Шымкент, Казахстан

E-mail: abzhahan@gmail.com

Аннотация. В натоящей заметке установлены новые достаточные условия безусловной базисности корневых функций дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией.

Ключевые слова: Собственные значения, собственные функции, базис, дифференциальные операторы порядка с инволюцией.

Одним из сложных вопросов спектральной теории дифференциальных операторов остаются вопросы базисности корневых функций таких операторов с бесконечным числом кратных собственных значений. В таких случаях пока нет результатов, позволяющих судить о базисности корневых функций в терминах краевых условий. Для дифференциальных операторов с кратным спектром В.А.Ильиным разработан метод [1], позволяющий изучать вопросы базисности корневых векторов в терминах произведения L_2 -норм корневых корневых функций взаимно сопряженных операторов. В работе [2] указанная теория базисности В.А. Ильина развита на случай дифференциальных операторов с инволюцией следующего вида

$$Lu \equiv -u''(x)+\alpha u''(-x)+q(x)u(x)+q_v(x)u(v(x)), \qquad -1<x<1. \qquad (1)$$

Здесь $-1<\alpha<1$, коэффициенты $q(x)$ и $q_v(x)$ - произвольные (вообще говоря, комлпексозначные) функции из класса $L_1(-1,1)$, а инволюция $v(x)-$ абсолютно непрерывная функция, производная которой существенно ограничена на $[-1;1]$. Область определения $D(L)$ оператора (1) всюду плотна в $L_2(-1,1)$, причем конкретный вид области определения $D(L)$ для наших рассммотрений не понадобится. Будем считать, что $D(L)$ содержит только функции, абсолютно непрерывные вместе со своими первыми производными на (-1;1).

В натоящей заметке установлены новые достаточные условия безусловной базисности корневых функций оператора L.

Следуя В.А. Ильину [1], собственной функцией (или корневой функцией нулевого порядка) $u_{k0}(x)$ оператора (1), отвечающей комплексному собственному значению λ_k будем называть любое нетривиальное регулярное решение уравнения $Lu = \lambda u$. Т.е., собственной функцией оператора (1) является любая функция $u(x) \in D(L)$, удовлетворяющая уравнению (1) почти всюду на интервале (-1,1). Функцию $u_{k1}(x) \in D(L)$ будем называть присоединенной функцией первого порядка, соответствующей собственной функции $u_{k0}(x)$ и тому же комплексному собственному значению λ_k, если

$$Lu_{k1}(x) = \lambda u_{k1}(x) - u_{k0}(x).$$

Присоединенная функция j-го порядка определяется равенством

$$Lu_{ki}(x) = \lambda u_{ki}(x) - u_{k,i-1}(x).$$

Предположим выполнение следующих условий.

1) Пусть $\{u_k(x)\} = \{u_{ki}(x)\}$ система собственных и присоединенных функций оператора L полна и минимальна в $L_2(-1,1)$. Пусть биортогонально сопряженная система $\{\upsilon_k(x)\}$ (также полная) состоит из собственных и присоединенных функций (в вышеуказанном смысле) формально сопряженного к L оператора

$$L^*\upsilon = -\upsilon''(x) + \alpha\upsilon''(-x) + \overline{q(x)}\upsilon(x) - v'(x)\overline{q_v(v(x))}\upsilon(v(x)), \qquad (2)$$

и выполняется условие $(u_k(x), \upsilon_j(x)) = \delta_k^j$.

2) Кратность всех собственных значений равномерно ограничено.

3) Собственные значения принадлежат параболе Карлемана, т.е.,

$$\operatorname{Im}\sqrt{\lambda_k} \le const.$$

для всех номеров k.

4) $$\sup_{\lambda\ge1}\sum_{|\lambda_k-\lambda|\le1} 1<\infty.$$

Теорема 1 [2]. Пусть выполнены условия 1) - 4) и инволюция $\nu(x)$ в (1) - произвольная абсолютно непрерывная функция, производная которой существенно ограничена на $[-1,1]$. Тогда каждая из систем $\{u_k(x)\}=\{u_{ki}(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ образует бесусловной базис в $L_2(-1,1)$ в том и только том случае, если справедлива равномерная оценка произведения норм

$$\|u_k\|_2\cdot\|\upsilon_k\|_2 \le M . \qquad (3)$$

для всех номеров k.

Заметим, что собственные и присоединенные функции операторов L и L^* с двухточечными краевыми условиями всегда образуют биортогонально сопряженную пару систем. Требование полноты систем собственных и присоединенных функций также не является огрничением, так как без полноты не может быть базисности тех систем.

Сформулируем достаточные условия безусловной базисности систем собственных и присоединенных функций операторов L и L^*.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1) - 4) и инволюция $\nu(x)$ в (1)- произвольная абсолютно непрерывная функция, производная которой существенно ограничена на $[-1,1]$. Тогда каждая из систем $\{u_k(x)\}=\{u_{ki}(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ образует бесусловной базис в $L_2(-1,1)$, если выполнено условие

$$\sup_{-1<x<1}|u_k(x)|\sup_{-1<x<1}|\upsilon_k(x)| \le M,\ \forall k. \qquad (4)$$

Справедлива также следующая теорема о безусловной базисности.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1) - 4) и инволюция $\nu(x)$ в (1)- произвольная абсолютно непрерывная функция, производная которой существенно ограничена на $[-1,1]$.

Для бесусловной базисности в $L_2(-1,1)$ каждой из систем $\{u_k(x)\}=\{u_{ki}(x)\}$ и $\{\upsilon_k(x)\}$ достаточно, чтобы элементы этих систем были равномерно ограниченными, т.е. достаточно выполнение неравенств

$$\sup_{-1<x<1}\left|u_k(x)\right|\le M_1,\ \sup_{-1<x<1}\left|\upsilon_k(x)\right|\le M_2,\ \forall k. \qquad (5)$$

Справедливость утверждений теорем 1 и 2 непосредственно следуют из теоремы 1, так как каждое из условий (4), (5) влекут соотношение (3).

Список использованной литературы

1. Il'in V. A. and Kritskov L. V.. Properties of spectral expansions corresponding to nonself-adjoint differential operators. J. Math. Sci. (NY), 116:5 (2003), 3489_3550.

2. Kritskov L. V., Sarsenbi A. M. Riesz basis property of system of root functions of second-order differential operator with involution //Differential Equations. – 2017. – Т. 53. – №. 1. – С. 33-46. http://dx.doi.org/10.1134/S0012266117010049

ИНВОЛЮЦИЯМЕН ЕКІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН ШЕКТІ ЕСЕПТЕРДІҢ МЕНШІКТІ ЖӘНЕ ҚОСЫЛҒАН ФУНКЦИЯЛАРЫНЫҢ ШАРТСЫЗ НЕГІЗДЕМЕСІНІҢ ЖЕТКІЛІКТІ ШАРТТАРЫ

Ә.М. СӘРСЕНБІ

М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Шымкент қ., Қазақстан

e-mail: abzhahan@gmail.com

Аннотация. Бұл жазбада инволюциямен екінші ретті дифференциалдық операторлардың түбірлік функцияларының шартсыз негізділігінің жаңа жеткілікті шарттары белгіленген.

Түйінді сөздер: меншікті мәндер, меншікті функциялар, негіз, инволюциясы бар ретті дифференциалдық операторлар.

SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE UNCONDITIONAL BASICITY OF EIGENFUNCTIONS AND ATTACHED FUNCTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATION WITH INVOLUTION

A.M. SARSENBI
M. Auezov South Kazakhstan University, Shymkent, Kazakhstan
e-mail: abzhahan@gmail.com

Annotation. In this note, new sufficient conditions for the unconditional basicity of root functions of second-order differential operators with involution are established.

Keywords: eigenvalues, eigenfunctions, basis, differential operators of order with involution.