УДК 517.518.45
МРНТИ 27.39.19

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ-ХААРА В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

А.Н. БАШИРОВА[1], Е.Д. НУРСУЛТАНОВ[2], Н.Т.ТЛЕУХАНОВА[1]
[1]Евразийский национальный университет имени Л,Н,Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
[2]Казахстанский филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова, Нур-Султан, Казахстан
E-mail: anar_bashirova@mail.ru; er-nurs@yandex.ru; tleukhanova@rambler.ru

Аннотация. Исследованы мультипликаторы двойных рядов Фурье-Хаара в анизотропных пространствах Лоренца. Получены необходимые и достаточные условия для того чтобы последовательность $\lambda = \{\lambda_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}\}$ принадлежала классу мультипликаторов $m\left(L_{\bar{p},\bar{r}} \to L_{\bar{q},\bar{s}}\right)$

Ключевые слова: ряд Фурье, система Хаара, мультипликаторы рядов Фурье, анизотропное пространство Лоренца

Пусть X, Y - пространства функций, определенных на отрезке $[0,1]$, таких, что $X \hookrightarrow L_1$. Пусть $\{\varphi_k\}$ - полная ортонормированная система. Пусть функции $f \in X$ соответствует ее ряд Фурье по данной системе $\{\varphi_k\}$

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k,$$

где a_k - коэффициенты Фурье функции f по системе $\{\varphi_k\}$. Будем говорить, что последовательность комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является мультипликатором рядов Фурье по системе $\{\varphi_k\}$ из пространства X в пространство Y, если для функции f ∈ X с рядом Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k$$

найдется функция $f_\lambda \in$ Y, ряд Фурье которой совпадает с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k \varphi_k$$

и оператор $\Lambda f = f_\lambda$ является ограниченным оператором из X в Y.

Множество $m(X \to Y)$ всех определенных таким образом мультипликаторов является линейным нормированным пространством с нормой

$$\|\lambda\|_{m(X\to Y)} = \|\Lambda\|_{X\to Y}.$$

Для тригонометрических рядов известна фундаментальная теорема Марцинкевича [1]:

Теорема. *Пусть* $1 < p < \infty$, $\lambda = \{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ *- последовательность вещественных чисел, удовлетворяющих условию*

$$F_0(\lambda) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\lambda_k - \lambda_{k+1}| + |\lambda_{-k} - \lambda_{-k-1}| \right) + \sup_{m\in\mathbb{Z}} |\lambda_m| < \infty,$$

тогда λ *- мультипликатор в* $L_p[0,2\pi)$ *и*

$$\|\lambda_m\| \le cF_0(\lambda).$$

Дальнейшее развитие теории мультипликаторов тригонометрических рядов Фурье можно найти в работах Лизоркина П.И. [2, 3], Нурсултанова Е.Д. и Тлеухановой Н.Т. [4-6], Смаилова Е.С. и Тлеухановой Н.Т. [7], Юдина В.А. [8].

Рассмотрим последовательность $\lambda = \{\lambda_k^j\}_{(k,j)\in\Omega}$. Всякая последовательность λ порождает оператор Λ, который на полиномах по системе Хаара определяется следующим образом:

$$\Lambda\left(\sum_{k=0}^{N} \sum_{j=1}^{2^k} a_k^j(f)\, \chi_k^j(x) \right) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=1}^{2^k} \lambda_k^j a_k^j\, \chi_k^j(x).$$

Согласно классической теореме Пэли-Марцинкевича [9], если $1 < p < \infty$ и $\sup\limits_{(k,j)\in\Omega} |\lambda_k^j| < \infty$, то

$$\|\Lambda f\|_{L_p} \le c_p \|f\|_{L_p}$$

для всех $f \in L_p$. Точное значение $c_p = \max(p, p') - 1$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ найдено Буркхолдером Д. [10]. Мультипликаторы по системе Хаара изучались в работах С. Яно [11], Новикова И.Я., Семенова Е.М. [12], Кротова В.Г. [13] и др.

Согласно [12, с.127, теорема 12.1], если $1 < p < q < \infty$, то

$$\|\Lambda\|_{m(L_p \to L_q)} \asymp \sup_{(k,j)\in\Omega} |\lambda_k^j| 2^{k\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)}, \tag{2}$$

где константы эквивалентности зависят только от p, q.

Исследованию мультипликаторов рядов Фурье по системе Хаара в более общих пространствах посвящены работы [14-18]. Вопрос о мультипликаторах кратных рядов Фурье-Хаара оставался открытым.

Целью нашей работы является исследование мультипликаторов двойных рядов Фурье-Хаара в анизотропных пространствах Лоренца.

Пусть f измеримая функция, принимающая почти всюду конечные значения:

$$m(\sigma, f) = \mu(\{x: x \in [0,1], |f| > \sigma\})$$

её функция распределения. Функция:

$$f^*(t) = \inf\{\sigma: m(\sigma, f) \le t\}, \quad t > 0$$

называется невозрастающей перестановкой функции f.

Пусть $f(x_1, x_2)$ - измеримая на $[0,1]^2$ функция, через $f^{*_1*_2}(t_1, t_2)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки к функции $f(x_1, x_2)$ последовательно по переменным x_1, x_2.

Пусть $\bar{p} = (p_1, p_2)$, $\bar{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ такие, что если $0 < p_i < \infty$, то $0 \le \tau_i \le \infty$, если $p_i = \infty$, то и $\tau_i = \infty$, $i = 1, 2$. Анизотропным пространством Лоренца $L_{\bar{p},\bar{\tau}}[0,1]^2$ [19] назовем множество функций, для которых конечна величина:

$$\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{\tau}}[0,1]^2} = \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_2^{\frac{1}{p_2}} t_1^{\frac{1}{p_1}} f^{*_1*_2}(t_1, t_2)\right)^{\tau_1} \frac{dt_1}{t_1}\right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \frac{dt_2}{t_2}\right)^{\frac{1}{\tau_2}}.$$

Здесь и далее, когда $\tau = \infty$, интеграл $\left(\int_0^1 (\varphi(t))^\tau \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{\tau}}$ понимается как $\sup\limits_{t>0} \varphi(t)$.

Тогда верна следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $1 < \bar{p} < \bar{q} < \infty$, $0 < \bar{r}, \bar{s} \le \infty$, $\frac{1}{\xi_i} = \left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{r_i}\right)_+ = max\left\{\frac{1}{s_i} - \frac{1}{r_i}, 0\right\}$, $i = 1, 2$. *Тогда последовательность комплексных чисел* $\lambda = \left\{\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right\}_{(k_i,j_i)\in\Omega}$ *является мультипликатором из* $L_{\bar{p},\bar{r}}[0,1]^2$ *в* $L_{\bar{q},\bar{s}}[0,1]^2$ *тогда и только тогда, когда*

$$\left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)} \sup_{\substack{1\le j_i\le 2^{k_i}\\ i=1,2}} \left|\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|\right)^{\xi_1}\right)^{\frac{\xi_2}{\xi_1}}\right)^{\frac{1}{\xi_2}} < \infty$$

и верно

$$\|\lambda\|_{m\left(L_{\overline{p},\overline{r}}[0,1]^2\to\ L_{\overline{q},\overline{s}}[0,1]^2\right)} \asymp \left(\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(2^{k_1\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1}\right)+k_2\left(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{q_2}\right)}\sup_{\substack{1\le j_i\le 2^{k_i}\\ i=1,2}}\left|\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\right|\right)^{\xi_1}\right)^{\frac{\xi_2}{\xi_1}}\right)^{\frac{1}{\xi_2}}.$$

Здесь и далее в случае, когда $\xi_i=+\infty$, *соответствующая сумма в выражении справа заменяется на супремум.*

Следствие 1. *Пусть* $1<p<q<\infty$, $0<r,s\le\infty$, $\frac{1}{\xi}=\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{r}\right)_+=max\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{r},0\right\}$. *Тогда последовательность комплексных чисел* $\lambda=\left\{\lambda_k^j\right\}_{(k,j)\in\Omega}$ *является мультипликатором из* $L_{p,r}\,[0,1]$ *в* $L_{q,s}[0,1]$ *тогда и только тогда, когда*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)k}\sup_{1\le j\le 2^k}\left|\lambda_k^j\right|\right)^{\xi}\right)^{\frac{1}{\xi}}\le K,$$

причем

$$\|\lambda\|_{m(L_{p,r}\,[0,1]\to\ L_{q,s}[0,1])}\asymp\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(2^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)k}\sup_{1\le j\le 2^k}\left|\lambda_k^j\right|\right)^{\xi}\right)^{\frac{1}{\xi}}.$$

Замечание 1. *В отличие от результатов работ* [14, 16], *утверждение следствия 1 охватывает случай, когда* $r>s$, *а так же случай* $0<r,s<1$

Список использованной литературы

1 Marcinkiewicz J. Sur les multiplicateurs des series de Fourier // Studia Math. – 1939. – Vol. 8. – P. 78-91.

2 Лизоркин П.И. О мультипликаторах интегралов Фурье в пространствах $L_{p,\theta}$ // Тр. МИАН СССР. – 1967. – Т. 89. – С. 231-248.

3 Лизоркин П.И. К теории мультипликаторов Фурье // Тр. МИАН СССР. – 1986. – Т. 173. – С. 149-163.

4 Нурсултанов Е.Д. О мультипликаторах рядов Фурье по тригонометрической системе // Матем. заметки. – 1998. – Т. 63, №2. – С. 235-247.

5 Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. О мультипликаторах кратных рядов Фурье // Тр. МИАН. – 1999. – Т. 227. – С. 237-242.

6 Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. Нижние и верхние оценки нормы мультипликаторов кратных тригонометрических рядов Фурье в пространствах Лебега // Функц. анализ и его прил. – 2000. – Т. 34, №2. – С. 86-88.

7 Smailov E.S., Tleukhanova N.T. Estimation of error of cubature formula in Besov space // Eurasian Math. J. – 2010. – Vol. 1, №1. – P. 147-156.

8 Юдин В.А. Сферические суммы рядов Фурье в L_p // Мат. Заметки. – 1989. – Т. 46, №2. – С. 145-146.

9 Кашин Б.С., Саакян А.Л. Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 496 с.

10 Burkholder D.L. A nonlinear partial differential equation and unconditional constant of the Haar system in L_p // Bull. Amer. Math. Soc. – 1982. – Vol. 7. – P. 591-595.

11 Yano S. On a lemma of Marcinkiewicz and its applications to Fourier series // Tohoku Math. J. – 1959. – Vol. 11. – P. 195-215.

12 Novikov I., Semenov E. Haar series and linear operators. – Dordrecht: Cluver Acad. Publ. – 1997. – 218 p.

13 Кротов В.Г. О безусловной сходимости рядов Хаара в Λ_ω^p // Мат. заметки. – 1978. – Т. 23, №5. – С. 685-695.

14 Брыскин И.Б., Лелонд О.В., Семенов Е.М. Мультипликаторы рядов Фурье – Хаара // Сиб. мат. журнал. – 2000. – Т. 41, №4. – С. 758-766.

15 Girardi M., Operator-valued Fourier Haar multipliers // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – Vol. 325. – P. 1314-1326.

16 Лелонд О.В., Семенов Е.М., Уксусов С.Н. Пространство мультипликаторов Фурье-Хаара // Сиб. мат. журнал. – 2005. – Т. 46, №1. – С. 130-138.

17 Семенов Е.М., Уксусов С.Н. Мультипликаторы рядов по системе Хаара // Сиб. матем. журнал. – 2012. – Т. 53, №2. – С. 388-395.

18 Wark H.M. Operator-valued Fourier Haar multipliers on vector-valued L_1 spaces // J. Math. Anal. Appl. – 2017. – Vol. 450. – P. 1148-1156.

19 Нурсултанов Е.Д. Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Докл. РАН. – 2004. – Т. 394(1). – С. 1-4.

ҚОС ФУРЬЕ-ХААР ҚАТАРЛАРЫНЫҢ АНИЗОТРОПТЫ ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІКТЕРІНДЕГІ МУЛЬТИПЛИКАТОРЛАРЫ

А.Н.БАШИРОВА[1], Е.Д.НУРСУЛТАНОВ[2], Н.Т.ТЛЕУХАНОВА[1]

[1]Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұрсұлтан, Қазақстан

[2]М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университетінің Қазақстан филиалы, Нұрсұлтан, Қазақстан

E-mail: anar_bashirova@mail.ru; er-nurs@yandex.ru; tleukhanova@rambler.ru

Аңдатпа. Қос Фурье-Хаар қатарларының анизотропты Лоренц кеңістіктеріндегі мультипликаторлары зерттелді. $\lambda = \{\lambda_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}\}$ тізбегі $m\left(L_{\bar{p},\bar{r}} \rightarrow L_{\bar{q},\bar{s}}\right)$ мультипликаторлар класына тиісті болуы үшін қажетті және жеткілікті шарттар анықталды.

Түйінді сөздер: Фурье қатары, Хаар жүйесі, Фурье қатарларының мультипликаторлары, анизотропты Лоренц кеңістігі

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ-ХААРА В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

А.Н.БАШИРОВА[1], Е.Д.НУРСУЛТАНОВ[2], Н.Т.ТЛЕУХАНОВА[1]
[1]Л. Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Нұрсұлтан, Қазақстан
[2]М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік университетінің Қазақстан филиалы, Нұр-Сұлтан, Қазақстан
E-mail: anar_bashirova@mail.ru; er-nurs@yandex.ru; tleukhanova@rambler.ru

Аннотация. Исследованы мультипликаторы двойных рядов Фурье-Хаара в анизотропных пространствах Лоренца. Получены необходимые и достаточные условия для того чтобы последовательность $\lambda = \{\lambda_{k_1 k_2}^{j_1 j_2}\}$ принадлежала классу мультипликаторов $m\left(L_{\bar{p},\bar{r}} \rightarrow L_{\bar{q},\bar{s}}\right)$

Ключевые слова: Ряд Фурье, система Хаара, мультипликаторы рядов Фурье, анизотропное пространство Лоренца