ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ҒЫЛЫМДАРЫ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

ҒТАМР 27.29.197

ВАН ДЕР ПОЛ ТЕҢДЕУІ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПТІ Д.С. ДЖУМАБАЕВ ПАРАМЕТРЛЕУ ӘДІСІМЕН ШЕШУ

С.Т. МЫНБАЕВА[0000-0001-6266-9357]**, Н.С. АДИЛОВ**[0000-0002-0283-1401],*
Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан
*e-mail: adillov.n@mail.ru

Аңдатпа. Мақалада Ван дер Поль дифференциалдық теңдеуі үшін периодты шеттік есеп қарастырылады. Бұл теңдеу сызықты емес жай дифференциалдық теңдеу болғандықтан оның шешімін аналитикалық түрде дәл табу мүмкін емес. Осыған байланысты есепті шешуге Д.С. Джумабаев параметрлеу әдісі қолданылады. Есеп қарастырылатын аралық екі бөлікке бөлінеді, ізделінді шешімнің ішкі аралықтардың бастапқы нүктелеріндегі мәндері қосымша параметрлер ретінде енгізіледі. Ізделінді функция сәйкес ішкі аралықтарда жаңа белгісіз функциялар мен қосымша параметрлердің қосындыларымен алмастырылып, берілген есеп жай дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін параметрлі шеттік есепке келтіріледі. Жай дифференциалдық теңдеулер үшін параметрлі Коши есептерінің шешімдерін шекаралық шарт пен шешімнің бөліктеу нүктесіндегі үзіліссіздік шартына қойып енгізілген параметрлерге қатысты сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйесі құрылады. Бұл жүйе ерекше жағдайларда ғана айқын түрде анықталады. Сондықтан жүйедегі функциялардың мәндерін, олардың параметрлер бойынша туындылары жай дифференциалдық теңдеулер үшін ішкі аралықтарда векторлық және матрицалық Коши есептерін шешу арқылы табылады. Коши есептері төртінші ретті дәлдікті Рунге-Кутта әдісімен шешіледі. Алгебралық теңдеулер жүйесі Ньютон әдісімен шешіледі. Берілген есептің шешімін жуықтап табу алгоритмі ұсынылады.

Түйін сөздер. Ван дер Пол теңдеуі, сызықты емес шеттік есеп, Коши есебі, Ньютон әдісі, Д.С. Джумабаев параметрлеу әдісі, жуық шешім, Рунге-Кутта әдісі.

Кіріспе. Физикалық құбылыстарды егжей-тегжейлі және дәлірек зерттеу, әдетте, сызықты емес дифференциалдық теңдеулерге келтіріледі. Сызықты емес теңдеулердің шешімдері көбінесе өте күрделі және оларды қарапайым формулалармен өрнектеу қиын. Сызықты емес дифференциалдық теңдеулерді шешудің қазіргі теориясының едәуір бөлігі олардың қасиеттерін сапалы талдауға арналған. Теория теңдеулерді шешпей-ақ, олардың шешімдерінің табиғаты туралы мысалы, барлығы шенелген немесе периодты немесе белгілі бір дәрежеде коэффициенттерге тәуелді деген маңызды нәрселерді айтуға мүмкіндік беретін әдістерді жасауға бағытталған. Сызықты емес дифференциалдық теңдеулердің жуық шешімдерін сандық әдістермен табуға болады. Мұндай теңдеулерді шешуде итерациялық әдістер қолданылады.

Мақалада Ван дер Пол дифференциалдық теңдеуі үшін периодты шеттік есепті қарастырамыз:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon\left(1 - y^2\right)\frac{dy}{dt} - y - \varepsilon\rho\cos(\omega t + \alpha) + g(t), t \in (0,T), y \in R, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} y(0) &= y(T), \\ y'(0) &= y'(T), \end{aligned} \tag{2}$$

мұндағы $y-$ t уақытының функциясы болып табылатын қалып-күй координатасы; $\omega-$ бұрыштық жиілік; $\varepsilon-$ сызықты еместікті және демпфирлік беріктігін көрсететін скаляр параметр; $g(t)-$ $[0,T]$ кесіндісінде үзіліссіз функция.

(1) -дифференциалдық теңдеу 1920 жылы электр тізбегінің триодының тербелістерін сипаттау үшін енгізілді. Ван дер Пол теңдеуі робототехника, физика, биология, электроника, әлеуметтану, неврология және экономика сияқты көптеген салалардағы тербелмелі процестердің негізгі моделі ретінде қарастырылады [1] - [5]. Жай дифференциалдық теңдеулерге арналған шеттік есептерді көптеген авторлар әр түрлі әдістермен зерттеді [6] – [16].

$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ белгісіз векторлық функцияны енгізу арқылы екінші ретті сызықты емес дифференциалдық теңдеуді $x_1(t) = y(t), x_2(t) = y'(t)$ алмастыруы арқылы

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, t \in (0,T), \tag{3}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \varepsilon\left(1 - x_1^2\right)x_2 - \varepsilon\rho\cos(\omega t + \alpha) + g(t), t \in (0,T), \tag{4}$$

сызықтық емес жай дифференциалдық теңдеулер жүйесіне келтіреміз және

$$x_1(0) = x_1(T), \tag{5}$$

$$x_2(0) = x_2(T) \tag{6}$$

шекаралық шарттарын аламыз.

$f_1(t, x_1, x_2) = x_2,\ f_2(t, x_1, x_2) = -x_1 + \varepsilon\left(1 - x_1^2\right)x_2 - \varepsilon\rho\cos(\omega t + \alpha) + g(t)$ деп алып, (3), (4) теңдеулерін келесідей сызықтық емес дифференциалдық теңдеу түрінде жазамыз:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),\ \ t \in (0,T),\ \ x \in R^2,\ \ \|x\| = \max_{i=1,2}|x_i|.$$

$C([0,T],R^2)$– барлық $x:[0,T]\to R^2$ үзіліссіз функциялар кеңістігі болсын, $\|x\|_1=\max_{t\in(0,T)}\|x(t)\|$. $(0,T)$ аралығында үзіліссіз дифференциалданатын, (3), (4) сызықтық емес дифференциалдық теңдеулерін және (5) ,(6) шекаралық шарттарын қанағаттандыратын $x(t)\in C([0,T],R^2)$ функциясы (3) - (6) есептің шешімі болады.

Д.С. Джумабаев параметрлеу әдісінің жалпы схемасы және қолданылуы. (1), (2) Ван дер Пол теңдеуі үшін периодтты шеттік есеп [17] жұмыста ұсынылған профессор Д.С. Джумабаев параметрлеу әдісімен шешеміз. Ол үшін Δ_2 деп $[0,T]$ интервалының $0=\theta_0<\theta_1<\theta_2=T$ нүктелері арқылы бөлінуін белгілейміз.

$x[t]=(x_{(1)}(t),x_{(2)}(t))$ функциялар жүйесінің кеңістігін $C([0,T],\Delta_2,R^4)$ арқылы белгілейміз, мұндағы $x_{(r)}:[\theta_{r-1},\theta_r)\to R^2$ үзіліссіз және $\lim_{t\to\theta_r-0}x_{(r)}(t), r=\overline{1,2}$ сол жақты ақырлы шегі бар функция, $\|x[\cdot]\|_2=\max_{r=\overline{1,2}}\sup_{t\in[\theta_{r-1},\theta_r)}\|x_{(r)}(t)\|$.

$x(t)$ функциясы (3) - (6) есептің шешімі, ал $x_{(1)}(t)$, $x_{(2)}(t)$ сәйкесінше оның $[\theta_0;\theta_1)$, $[\theta_1;\theta_2)$ интервалдарындағы сығылулары болсын. Олай болса $x[t]=(x_{(1)}(t),x_{(2)}(t))$ функиялар жүйесі $C([0,T],\Delta_2,R^4)$ кеңістігіне тиісті және оның $x_{(1)}(t)$, $x_{(2)}(t)$ элементтері

$$\frac{dx_{(1)}}{dt}=f(t,x_{(1)}),t\in[\theta_0,\theta_1),x_{(1)}\in R^2, \tag{7}$$

$$\frac{dx_{(2)}}{dt}=f(t,x_{(2)}),t\in[\theta_1,\theta_2),x_{(2)}\in R^2, \tag{8}$$

сызықтық емес жай дифференциалдық теңдеулер жүйесін,

$$x_{(1)}(\theta_0)=\lim_{t\to\theta_2-0}x_{(2)}(t), \tag{9}$$

шекаралық шартын,

$$\lim_{t\to\theta_1-0}x_{(1)}(t)=x_{(2)}(\theta_1) \tag{10}$$

үзіліссіздік шартын қанағаттандырады.

(7) - (10) өрнектерде $\lambda_{(1)}=x_{(1)}(\theta_0)$, $\lambda_{(2)}=x_{(2)}(\theta_1)$ параметрлерін еңгізіп, $u_{(1)}(t)=x_{(1)}(t)-\lambda_{(1)}$, $u_{(2)}(t)=x_{(2)}(t)-\lambda_{(2)}$ ауыстыруларын жасап,

$$\frac{du_{(1)}}{dt}=f(t,u_{(1)}+\lambda_{(1)}),t\in[\theta_0,\theta_1), \tag{11}$$

$$\frac{du_{(2)}}{dt}=f(t,u_{(2)}+\lambda_{(2)}),t\in[\theta_1,\theta_2), \tag{12}$$

жаңа сызықтық емес параметрлік дифференциалдық теңдеулер жүйесін,

$$u_{(1)}(\theta_0)=0, \tag{13}$$

$$u_{(2)}(\theta_1)=0, \tag{14}$$

интервалдардың сол жақ шеттерінде бастапқы шарттарды,

$$\lambda_{(1)}-\lambda_{(2)}-\lim_{t\to\theta_2-0}u_{(2)}(t)=0, \tag{15}$$

шекаралық шартын және

$$\lambda_{(1)}+\lim_{t\to\theta_1-0}u_{(1)}(t)-\lambda_{(2)}=0 \tag{16}$$

үзіліссіздік шарты аламыз.

(11) - (16) шеттік есептің шешімі элементтері $\lambda^*=(\lambda^*_{(1)},\lambda^*_{(2)})\in R^4$ және $u^*[t]=\left(u^*_{(1)}(t),u^*_{(2)}(t)\right)\in C\left([0,T],\Delta_2,R^4\right)$ болатын $\left(\lambda^*,u^*[t]\right)$ жұбы болып табылады. Мұндағы $u^*_{(1)}(t),u^*_{(2)}(t)$ функциялары $\lambda_{(1)}=\lambda^*_{(1)},\lambda_{(2)}=\lambda^*_{(2)}$ болғанда сызықты емес (11), (12) дифференциалдық теңдеулер жүйесін, (13), (14) бастапқы шарттарттарын және (15), (16) қосымша шарттарын қанағаттандырады.

(11), (13) және (12), (14) параметрлі Коши есептерінің жалғыз шешімдері сәйкесінше $u_{(1)}(t,\lambda_{(1)})$ және $u_{(2)}(t,\lambda_{(2)})$ деп ұйғарамыз. Коши есептерінің сәйкес шешімдерін шекаралық және үзіліссіздік шарттарына қойып, енгізілген $\lambda_{(1)},\lambda_{(2)}$ параметрлеріне қатысты сызықты емес алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\lambda_{(1)}-\lambda_{(2)}-\lim_{t\to\theta_2-0}u_{(2)}\left(t,\lambda_{(2)}\right)=0, \tag{17}$$

$$\lambda_{(1)}+\lim_{t\to\theta_1-0}u_{(1)}\left(t,\lambda_{(1)}\right)-\lambda_{(2)}=0. \tag{18}$$

(17), (18) теңдеулер жүйесін келесі түрде жазамыз:

$$Q_*\left(\Delta_2,\lambda\right)=0, \lambda\in R^4. \tag{19}$$

(19) теңдеуді қанағаттандыратын λ мәнін табу үшін Ньютон әдісін қолданамыз. Ньютон әдісі итерациялық әдіс және $\lambda^{(0)}\in R^4$ бастапқы жуықтауын қажет етеді. Бастапқы жуықтауды келесі сызықты шеттік есепті шешу арқылы табамыз:

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2, \tag{20}$$

$$\frac{dx_1}{dt}=-x_1-\varepsilon p\cos(\omega t+a)+g(t), \tag{21}$$

$$x_1(0)=x_1(T), \tag{22}$$

$$x_2(0)=x_2(T). \tag{23}$$

(20) - (23) сызықты периодты шеттік есепті Д.С. Джумабаев параметрлеу әдісімен шешіп $x^{(0)}(t)=\begin{pmatrix} x_1^{(0)}t \\ x_2^{(0)}(t)\end{pmatrix}$ вектор-функциясын табамыз. Ал $\lambda^{(0)}=\begin{pmatrix}\lambda_{(1)}^{(0)} \\ \lambda_{(2)}^{(0)}\end{pmatrix}\in R^4$ векторы $\lambda_{(1)}^{(0)}=\begin{pmatrix} x_1^{(0)}(\theta_0) \\ x_2^{(0)}(\theta_0)\end{pmatrix}$ және $\lambda_{(2)}^{(0)}=\begin{pmatrix} x_1^{(0)}(\theta_1) \\ x_2^{(0)}(\theta_1)\end{pmatrix}$ теңдіктерімен анықталады.

Ньютон әдісінің итерациялық формауласы келесідей болады:

$$\lambda^{(k+1)}=\lambda^{(k)}+\Delta\lambda^{(k)}, k=0,1,...,$$

мұндағы $\Delta\lambda^{(k)}$ Якоби матрицасы

$$\frac{\partial Q_*\left(\Delta_2,\lambda^{(k)}\right)}{\partial\lambda}=\begin{pmatrix} I & -I-\dfrac{\partial u_{(2)}\left(\theta_2,\lambda_{(2)}^{(k)}\right)}{\partial\lambda_{(2)}} \\ I+\dfrac{\partial u_{(1)}\left(\theta_1,\lambda_{(1)}^{(k)}\right)}{\partial\lambda_{(1)}} & -I\end{pmatrix}, \tag{24}$$

болатын келесі сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің шешімі:

$$\frac{\partial Q_*\left(\Delta_2,\lambda^{(k)}\right)}{\partial\lambda}\Delta\lambda^{(k)}=-Q_*\left(\Delta_2,\lambda^{(k)}\right). \tag{25}$$

Берілген $\lambda=\lambda^{(k)}$ болғанда $Q_*(\Delta_2,\lambda)$ мәнін табу үшін параметрлердің $\lambda_{(1)}=\lambda_{(1)}^{(k)}$, $\lambda_{(2)}=\lambda_{(2)}^{(k)}$ мәндерінде (11), (13) және (12), (14) Коши есептерін шешеміз. Егер (11), (13) және (12), (14) есептердің шешімдерін $u_{(1)}\left(t,\lambda_{(1)}^{(k)}\right)$ және $u_{(2)}\left(t,\lambda_{(2)}^{(k)}\right)$ арқылы белгілесек, онда бұл функциялар келесі теңдеулер мен бастапқы шарттарды қанағаттандырады:

$$\frac{\partial u_{(1)}\left(t,\lambda_{(1)}^{(k)}\right)}{dt}=f\left(t,u_{(1)}\left(t,\lambda_{(1)}^{(k)}\right)+\lambda_{(1)}^{(k)}\right), t\in[\theta_0,\theta_1), \tag{26}$$

$$u_{(1)}\left(\theta_0,\lambda_{(1)}^{(k)}\right)=0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial u_{(2)}\left(t,\lambda_{(2)}^{(k)}\right)}{dt}=f\left(t,u_{(2)}\left(t,\lambda_{(2)}^{(k)}\right)+\lambda_{(2)}^{(k)}\right), t\in[\theta_1,\theta_2), \tag{28}$$

$$u_{(2)}\left(\theta_1,\lambda_{(2)}^{(k)}\right)=0. \tag{29}$$

$\dfrac{\partial u_{(1)}\left(\theta_1,\lambda_{(1)}^{(k)}\right)}{\partial\lambda_1}$ анықтау үшін (26), (27) өрнектерін $\lambda_{(1)}$ бойынша дифференциалдаймыз:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_{(1)}}\left(\frac{du_{(1)}\left(t,\lambda_{(1)}^{(k)}\right)}{dt}\right)=f_x'\left(t,u_{(1)}\left(t,\lambda_{(1)}^{(k)}\right)+\lambda_{(1)}^{(k)}\right)\cdot\left[\frac{\partial u_{(1)}\left(t,\lambda_{(1)}^{(k)}\right)}{\partial\lambda_{(1)}}+I\right], t\in[\theta_0,\theta_1),$$

$$\frac{\partial u_{(1)}\left(\theta_0,\lambda_{(1)}^{(k)}\right)}{\partial\lambda_{(1)}}=0.$$

Сол сияқты (28), (29) өрнектерді $\lambda_{(2)}$ бойынша дифференциалдасақ, келесі есепті аламыз:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_{(2)}}\left(\frac{du_{(2)}\left(t,\lambda_{(2)}^{(k)}\right)}{dt}\right)=f_x'\left(t,u_{(2)}\left(t,\lambda_{(2)}^{(k)}\right)+\lambda_{(2)}^{(k)}\right)\cdot\left[\frac{\partial u_{(2)}\left(t,\lambda_{(2)}^{(k)}\right)}{\partial \lambda_{(2)}}+I\right],\ t\in[\theta_1,\theta_2)$$

$$\frac{\partial u_{(2)}\left(\theta_1,\lambda_{(2)}^{(k)}\right)}{\partial \lambda_{(2)}}=0.$$

Келесі белгілеулерді енгізсек:

$$z_{(1)}(t)=\frac{\partial u_{(1)}\left(t,\lambda_{(1)}^{(k)}\right)}{\partial \lambda_{(1)}},\quad \mathrm{A}_{(1)}^{(k)}(t)=f_x'\left(t,u_{(1)}\left(t,\lambda_{(1)}^{(k)}\right)+\lambda_{(1)}^{(k)}\right),\quad t\in[\theta_0,\theta_1),$$

$$z_{(2)}(t)=\frac{\partial u_{(2)}\left(t,\lambda_{(2)}^{(k)}\right)}{\partial \lambda_{(2)}},\quad \mathrm{A}_{(2)}^{(k)}(t)=f_x'\left(t,u_{(2)}\left(t,\lambda_{(2)}^{(k)}\right)+\lambda_{(2)}^{(k)}\right),\quad t\in[\theta_1,\theta_2),$$

онда $z_{(1)}(t)$ және $z_{(2)}(t)$ матрица-функциялары келесі сызықты жай дифференциалдық теңдеулер үшін ішкі интервалдардағы матрицалық Коши есептерінің шешімдері болып табылады:

$$\frac{dz_{(1)}}{dt}=A_{(1)}^{(k)}(t)z_{(1)}(t)+A_{(1)}^{(k)}(t),\quad t\in[\theta_0,\theta_1], \tag{30}$$

$$z_{(1)}(\theta_0)=0, \tag{31}$$

$$\frac{dz_{(2)}}{dt}=A_{(2)}^{(k)}(t)z_{(2)}(t)+A_{(2)}^{(k)}(t),\quad t\in[\theta_1,\theta_2], \tag{32}$$

$$z_{(2)}(\theta_1)=0, \tag{33}$$

мұндағы

$$A_{(1)}^{(k)}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1-2\varepsilon x_{(1)1}^{(k)}(t)x_{(1)2}^{(k)}(t) & \varepsilon\left(1-\left(x_{(1)1}^{(k)}(t)\right)^2\right)\end{pmatrix},\quad t\in[\theta_0,\theta_1),$$

$$A_{(2)}^{(k)}(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1-2\varepsilon x_{(2)1}^{(k)}(t)x_{(2)2}^{(k)}(t) & \varepsilon\left(1-\left(x_{(2)1}^{(k)}(t)\right)^2\right)\end{pmatrix},\quad t\in[\theta_1,\theta_2),$$

$x_{(1)}^{(k)}(t)=\lambda_{(1)}^{(k)}+u_{(1)}\left(t,\lambda_{(1)}^{(k)}\right)$ және $x_{(2)}^{(k)}(t)=\lambda_{(2)}^{(k)}+u_{(2)}\left(t,\lambda_{(2)}^{(k)}\right)$.

(1), (2) есепті сандық шешу Алгоритмі.

0-қадам. (20) - (23) сызықты периодты шеттік есепті шешіп $\lambda^{(0)}\in R^4$ векторын табамыз.

1-қадам.

а) (11), (13) және (12), (14) Коши есептерін сәйкесінше $[\theta_0,\theta_1]$ және $[\theta_1,\theta_2]$ тұйық ішкі интервалдарында төртінші ретті дәлдікті Рунге-Кутта әдісімен шешіп $u_{(1)}\left(t,\lambda_{(1)}^{(0)}\right), u_{(2)}\left(t,\lambda_{(2)}^{(0)}\right)$ табамыз және

$$Q_*\left(\Delta_2, \lambda^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^{(0)} - \lambda_{(2)}^{(0)} - u_{(2)}\left(\theta_2, \lambda_{(2)}^{(0)}\right) \\ \lambda_{(1)}^{(0)} + u_{(1)}\left(\theta_1, \lambda_{(1)}^{(0)}\right) - \lambda_{(2)}^{(0)} \end{pmatrix}$$

векторын құрамыз.

b) Әрбір тұйық ішкі интервалдар үшін (2×2)-өлшемді $A_{(1)}^{0}(t)$, $A_{(2)}^{(0)}(t)$ матрицаларын құрып, (30), (31) және (32), (33) матрицалық Коши есептерін $[\theta_0, \theta_1]$, $[\theta_1, \theta_2]$ тұйық ішкі интервалдарында төртінші ретті дәлдікті Рунге-Кутта әдісімен шешіп $z_{(1)}(\theta_1)$, $z_{(2)}(\theta_2)$ мәнін табамыз және (24) формулаға сәйкес

$$\frac{\partial Q_*\left(\Delta_2, \lambda^{(0)}\right)}{\partial \lambda} = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{I} + \dfrac{\partial u_{(2)}\left(\theta_2, \lambda_{(2)}^{(0)}\right)}{\partial \lambda_{(2)}} \\ \mathrm{I} + \dfrac{\partial u_{(1)}\left(\theta_1, \lambda_{(1)}^{(0)}\right)}{\partial \lambda_{(1)}} & -\mathrm{I} \end{pmatrix}$$

Якоби матрицасын құрамыз.

c) (25) сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін $n = 0$ болғанда шешіп $\Delta\lambda^{(0)}$ табамыз.

d) $\lambda^{(1)} = \lambda^{(0)} + \Delta\lambda^{(0)}$ теңдігімен $\lambda^{(1)}$ векторын анықтаймыз.

Ньютон әдісі итерациялық әдіс болғандықтан, біз $\Delta\lambda^{(k)} < \delta,\ \ \delta \in R$ болғанша әрбір n қадамда $\lambda^{(n)}$ табудың бірдей процесін қайталаймыз, мұндағы δ – біз таңдайтын мәні алдын ала анықталған шама. Жалпы, бұл өте аз сан болуы керек. Ньютон әдісінің нәтижесі λ^* векторы болып табылады, ол шеттік есеп шешімінің ішкі интервалдардың бастапқы нүктелеріндегі сәйкес мәндерінен құралады.

Келесі Коши есептерін

$$\frac{dx_{(1)}}{dt} = f\left(t, x_{(1)}(t)\right), \quad t \in [\theta_0, \theta_1),$$

$$x_{(1)}(\theta_0) = \lambda^*{}_{(1)},$$

$$\frac{dx_{(2)}}{dt} = f\left(t, x_{(2)}(t)\right), \quad t \in [\theta_1, \theta_2),$$

$$x_{(2)}(\theta_1) = 0,$$

шеше отырып $x^*[t] = \left(x^*{}_{(1)}(t), x^*{}_{(2)}(t)\right)$ векторлық функциясын тұрғыза аламыз, бұл бастапқы (1), (2) периодты шеттік есептің шешімі болып табылады.

Мысалы. (1), (2) шеттік есепте $T = 2,\quad \omega = 1,\quad \alpha = \dfrac{\pi}{2},\quad p = 1,\quad \varepsilon = 0.1,$ $g(t) = \sin \pi t - \pi^2 \sin \pi t + \varepsilon p \cos(t + \alpha) - \varepsilon\pi \cos \pi t\left(1 - \sin^2 \pi t\right)$ және дәл шешімі $y^*(t) = \sin \pi t$ болсын.

Есептің шешімін табу үшін жоғарыда баяндалған Д.С. Джумабаев параметрлеу әдісін қолданамыз. Ол үшін $\theta_0 = 0, \theta_1 = \frac{1}{2}, \theta_2 = 1$ және $\lambda^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.02745908215951154 \\ 3.141592653633239 \\ -0.02745908215951398 \\ -3.141592653633239 \end{pmatrix}$ деп аламыз. $\delta = 10^{-14}$ деп алып, төрт итерация жасап есептеулер жүргізгенде келесі нәтижелер алынды:

$$\Delta\lambda^{(0)} = \begin{pmatrix} -0.0274780061335964 \\ -2.5516720606193375\cdot 10^{-7} \\ 0.02747800613359521 \\ 2.551672065378985\cdot 10^{-7} \end{pmatrix}, \qquad \Delta\lambda^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.892396546224261\cdot 10^{-5} \\ 2.5512608016676444\cdot 10^{-7} \\ -1.8923965456796576\cdot 10^{-5} \\ -2.551607857160434\cdot 10^{-7} \end{pmatrix},$$

$$\Delta\lambda^{(2)} = \begin{pmatrix} 9.109303956126677\cdot 10^{-12} \\ 4.669508855901172\cdot 10^{-13} \\ -9.11567411175807\cdot 10^{-12} \\ -4.687735467834923\cdot 10^{-13} \end{pmatrix}, \qquad \Delta\lambda^{(3)} = \begin{pmatrix} 2.0604713800958648\cdot 10^{-15} \\ 2.9464804229018324\cdot 10^{-15} \\ 2.140929828095490\cdot 10^{-15} \\ -8.450137182814697\cdot 10^{-16} \end{pmatrix},$$

$\left\| x^*(\hat{t}) - x^{(4)}(\hat{t}) \right\| \le 10^{-11}$, мұндағы $\hat{t}-$ тор түйіндері.

Қорытынды. Қорытындылай келе, параметрлеу әдісі дәлдік, жылдамдық және ресурстық болжам бойынша сызықты емес және сызықты шеттік есептердің сандық шешімін табу үшін қолданбалы математикада өзекті әдістермен бәсекелесе алады. Бұл әдістің басты артықшылығы - дәлдік пен ептілік. Пайдаланушы бөліктеу санын таңдай алады, осылайша ол алгоритм үшін қажетті қатені және уақытты өзгерте алады.

Әдебиеттер тізімі

1. Ebeling W. Strukturbildung bei irreversiblen Prozessen / W. Ebeling. – Leipzig: Teubner-Verlag, 1976. – 194 p.

2. Glass L. and Mackey M.C. From Clocks to Chaos, the Rhythms of Life / L. Glass and M.C. Mackey. – Princeton: Princeton University Press, 1998. – 272 p.

3. Schuster H.G. and Just W. Deterministic Chaos: An Introduction / H. G. Schuster and W. Just. - New York: Wiley, 1988. – 240 p.

4. Zhang W.B. Synergetic Economics / W.B. Zhang. – Berlin Heidelber: Springer-Verlag, 1991 – 246 p.

5. Anishchenko V.S. Dynamical Chaos. Models and Experiments / V.S. Anishchenko. – World Scientific, 1995. – 400 p.

6. Aziz A. Numerical solutions for ordinary differential equations / A. Aziz. – New York: Academic Press, 1975. – 369 p.

7. Ascher U.M., Mattheij R.M., Russel R.D. Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations / U.M. Ascher, R.M. Mattheij, R.D. Russel. – Philadelphia: SIAM Classics in Applied Mathematics 13, – 1995. – 595 p. https://doi.org/10.1137/1.9781611971231.

8. Babenko K.I. Fundamentals of numerical analysis / K.I. Babenko. – Moscow: Nauka, 1986 – 744 p.

9. Bakhvalov N.S. Numerical methods: Analysis, Algebra, Ordinary Differential Equations / N.S. Bakhvalov. – Moscow: Mir, 1977 - 665 p.

10. Bellman R., Kalaba R. Quasilinearization and nonlinear boundary value problems / R. Bellman, R. Kalaba. – New York: American Elsevier, 1965 - 208 p. https://doi.org/10.1137/1008091.

11. Bernfeld S.R., Lakshmikantham V. An introduction to nonlinear boundary value problems, Mathematics in Science and Engineering 109 / S.R. Bernfeld, V. Lakshmikantham. – New York: Academic Press, 1974. – 386 p.

12. Brugnano L., Trigiante D. Solving differential problems by multistep initial and boundary value methods / L. Brugnano, D. Trigiante. – Amsterdam: Gordon and Breach, 1998. – 412 p.

13. Deuflhard P. Newton methods for nonlinear problems / P Deuflhard. – Springer, 2004. – 430 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-23899-4.

14. Lampert J.D. Computational methods in ordinary differential equations / J.D. Lampert. – New York: Wiley, 1973. – 278 p. https://doi.org/10.1002/zamm.19740540726.

15. Ronto M., Samoilenko A.M. Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems / M. Ronto, A.M. Samoilenko. – New York: Word Scientific, River Edge, 2000. – 468 p. https://doi.org/10.1142/3962.

16. Shampine L.F. Numerical solution of ordinary differential equations / L.F. Shampine. – New York: Chapman & Hall, 1994. – 632 p. https://doi.org/10.1137/1037026.

17. Dzhumabaev D.S. A method for solving nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations / D.S. Dzhumabaev // Mathematical Journal – 2018. – №3. – P. 43-51.

References

1. Ebeling W. (1976). Strukturbildung bei irreversiblen Prozessen. Leipzig: Teubner-Verlag.

2. Glass L. and Mackey M.C. (1998). From Clocks to Chaos, the Rhythms of Life. Princeton: Princeton University Press.

3. Schuster H.G. and Just W. (1988). Deterministic Chaos: An Introduction. New York: Wiley.

4. Zhang W.B. (1991). Synergetic Economics. Berlin Heidelber: Springer-Verlag.

5. Anishchenko V.S. (1995). Dynamical Chaos. Models and Experiments. World Scientific.

6. Aziz A. (1975). Numerical solutions for ordinary differential equations. New York: Academic Press.

7. Ascher U.M., Mattheij R.M., Russel R.D. (1995). Numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations. Philadelphia: SIAM Classics in Applied Mathematics. https://doi.org/10.1137/1.9781611971231.

8. Babenko K.I. (1986). Fundamentals of numerical analysis. Moscow: Nauka.

9. Bakhvalov N.S. (1977). Numerical methods: Analysis, Algebra, Ordinary Differential Equations. Moscow: Mir.

10. Bellman R., Kalaba R. (1965). Quasilinearization and nonlinear boundary value problems. New York: American Elsevier. https://doi.org/10.1137/1008091.

11. Bernfeld S.R., Lakshmikantham V. (1974). An introduction to nonlinear boundary value problems, Mathematics in Science and Engineering 109. New York: Academic Press.

12. Brugnano L., Trigiante D. (1998). Solving differential problems by multistep initial and boundary value methods. Amsterdam: Gordon and Breach.

13. Deuflhard P. (2004). Newton methods for nonlinear problems. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-23899-4.

14. Lampert J.D. (1973). Computational methods in ordinary differential equations. New York: Wiley. https://doi.org/10.1002/zamm.19740540726.

15. Ronto M., Samoilenko A.M. (2000). Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems. New York: Word Scientific, River Edge. https://doi.org/10.1142/3962.

16. Shampine L.F. (1994). Numerical solution of ordinary differential equations. New York: Chapman & Hall. https://doi.org/10.1137/1037026.

17. Dzhumabaev D.S. (2018). A method for solving nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations. Mathematical Journal. Vol. 18, №3, 43-51.

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВАН ДЕР ПОЛА МЕТОДОМ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ Д.С. ДЖУМАБАЕВА

С.Т. МЫНБАЕВА, Н.С. АДИЛОВ*

Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан

*e-mail: adillov.n@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается периодическая краевая задача для дифференциального уравнения Ван дер Поля. Поскольку это уравнение является нелинейным простым дифференциальным уравнением, его решение не может быть найдено аналитически. В связи с этим для решения задачи используется метод параметризации Д.С. Джумабаева. Рассматриваемый интервал разбивается на две части, значения искомого решения на левых концах внутренних интервалов вводятся как дополнительные параметры. Искомая функция заменяется суммой новых неизвестных функций и дополнительных параметров в соответствующих подинтервалах, и данная задача сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами. Подставляя решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами в краевое условие и условие непрерывности в точке разбиения составляется система нелинейных алгебраических уравнений относительно введенных параметров. Эта система определяется в явном виде только в исключительных случаях. Следовательно, значения функций в системе и их производные по параметрам находятся путем решения векторных и матричных задач Коши на подинтервалах для обыкновенных дифференциальных уравнений. Задачи Коши решаются методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Составленная система решается методом Ньютона. Предлагается алгоритм нахождения приближенного решения поставленной задачи.

Ключевые слова: уравнение Ван дер Пола, нелинейная краевая задача, задача Коши, метод Ньютона, метод параметризации Д.С.Джумабаев, приближенное решение, метод Рунге-Кутта.

SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE VAN DER POL EQUATION BY D.S. DZHUMABAEV PARAMETRIZATION METHOD

S.T. MYNBAYEVA, N.S. ADILOV*
K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan
*e-mail: adillov.n@mail.ru

Abstract. In the paper a periodic boundary value problem for the Van der Pol differential equation is considered. Since this equation is a nonlinear ordinary differential equation, its solution cannot be found analytically accurately. In this regard, the D.S. Dzhumabaev parameterization method is used to solve the problem. The interval which the problem is considered is divided into two parts, and the values of the desired solution at the beginning points of the subintervals are introduced as additional parameters. The desired function is replaced by the sums of new unknown functions and additional parameters in the corresponding subintervals, and the original problem is reduced to a boundary value problem for a system of differential equations with parameters. Substituting a solutions of Cauchy problems for ordinary differential equations with parameters into the boundary condition and the continuity condition of the solution at the dividing point a system of nonlinear algebraic equations is constructed. This system is clearly defined only in exceptional cases. Therefore, the values of functions in the system and their derivatives with respect to parameters are found by solving vector and matrix Cauchy problems for differential equations on subintervals. Cauchy problems are solved by the fourth-order accuracy Runge-Kutta method. The solution to the system of algebraic equations is found by Newton's method. An algorithm for finding an approximate solution to this problem is proposed.

Key words: Van der Pol equation, nonlinear boundary value problem, Cauchy problem, Newton's method, D.S. Dzhumabaev parametrization method, approximate solution, Runge-Kutta method.