ҒТАМР 27.29.197

ПАРАМЕТРЛІ КВАЗИСЫЗЫҚТЫ МАТЬЕ ТЕҢДЕУІ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПТІ ШЕШУДІҢ САНДЫҚ ӘДІСТЕРІ

С.Т. МЫНБАЕВА[0000-0001-6266-9357]**, Г. ЕРБОЛАТҚЫЗЫ**[0000-0002-2410-1426],*

Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

*e-mail: forever.94@bk.ru

Аңдатпа. Мақалада параметрлі квазисызықты Матье дифференциалдық теңдеуі үшін шекаралық және қосымша шартпен берілген есеп қарастырылады. Есептің шешімі функция мен параметрден тұратын жұп болып табылады. Ізделінді функцияның есеп қарастырылатын аралықтың бастапқы нүктесіндегі мәні қосымша параметр ретінде енгізіледі және ізделінді функция жаңа белгісіз функция мен енгізілген параметрдің қосындысымен алмастырылады. Квазисызықты жай дифференциалдық теңдеулер үшін Коши шарты пайда болады. Коши есебінің шешімін шекаралық шартқа қою нәтижесінде параметрлерге қатысты квазисызықты алгебралық теңдеулер жүйесі құрылады. Құрылған жүйенің шешімін табу үшін Ньютон итерациялық әдісі қолданылады. Қарастырылып отырған есепті шешудің Д.С. Джумабаев параметрлеу әдісіне негізделген алгоритмі ұсынылады және сол алгоритмді сандық жүзеге асыруға әртүрлі әдістер қолданылады. Алгоритмнің қадамдары векторлық және матрицалық Коши есептерін шешуді қамтиды. Коши есептерін шешуге Булирш-Штер әдісі, төртінші ретті Рунге-Кутта әдісі және Адамс әдісі қолданылады және алынған нәтижелер салыстырылады. Әртүрлі сандық немесе жуық әдістерді қолданып, алгоритмнің жаңа сандық немесе жуық орындалуын аламыз. Есептің бөліктеу нүктелерінен басқа нүктелеріндегі мәндерін анықтау үшін кубтық интерполяция қолданылады. Сандық шешімінің дәлдігі Коши есептерін шешу әдістерін таңдап алудан тәуелділігі анықталды.

Түйін сөздер. Матье дифференциалдық теңдеуі, квазисызықты шеттік есеп, Коши есебі, Ньютон әдісі, Д.С. Джумабаев параметрлеу әдісі, алгоритм, сандық шешім.

Матье теңдеуі теориялық физикада көптеген жағдайларда пайда болды [1]. Матье теңдеуі параметрлік қозу құбылыстарын сипаттайтын математикалық модельдердің өкілі болып табылады. Қазіргі уақытта шеттік есептердің мейлінше толық игерілген саласы екі нүктелі шеттік есептер теориясы болып табылады. Жәй дифференциалдық теңдеулер үшін параметрлі шеттік есептер әртүрлі әдістермен [2-8] және басқаларының жұмыстарында зерттелді. Мұндай шеттік есептерді зерттеу және шешудің көптеген әдістері болуына қарамастан оларға деген қызығушылық осы күнге дейін бәсеңдеген емес. Есептеу техникасын қолданбалы есептерді шешуде қолдану ұсынылған әдістерге берілген дәлдік бойынша ізделінді шешімді табуды мүмкін ететін, конструктивтілік талабын қояды.

Жұмыстың мақсаты Джумабаев параметрлеу әдісі [9] негізінде квазисызықты Матье дифференциалдық теңдеуі үшін параметрлі шеттік есептерді шешудің сандық әдістерін жасақтау.

Квазисызықты Матье дифференциалдық теңдеуі үшін шеттік есепті қарастырамыз:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -y + \varepsilon\left[\alpha\cos(2t)y + \beta y^3\right] + \mu\sin(2t) + g(t), \quad t \in (0,T), \quad y \in R, \tag{1}$$

$$y(0) = y(T), \tag{2}$$

$$y'(0) = y'(T), \tag{3}$$

$$y'(0) = a, \tag{4}$$

мұндағы $\varepsilon > 0, \alpha, \beta$ және a берілген сандар, $g(t) - [0,T]$ кесіндісінде үзіліссіз функция.

(1)-(4) есепті $x_1(t) = y(t), x_2(t) = y'(t)$ алмастыруын қолданып келесі есепке келтіреміз:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad t \in (0,T), \tag{5}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 + \varepsilon\left[\alpha\cos(2t)x_1 + \beta x_1^3\right] + \mu\sin(2t) + g(t), \quad t \in (0,T), \tag{6}$$

$$x_1(0) = x_1(T), \tag{7}$$

$$x_2(0) = x_2(T) \tag{8}$$

$$x_2(0) = a \tag{9}$$

(5)-(9) есептің шешімі деп $\mu^* \in R,$ $[0,T]$ кесіндісінде үзіліссіз, $(0,T)$ интервалында үзіліссіз дифференциалданатын $x_1^*(t), x_2^*(t)$ функцияларынан тұратын (5), (6) теңдеулерді және (7)-(9) шарттарды қанағаттандыратын $\left(\mu^*, x_1^*(t), x_2^*(t)\right)$ үштігін айтады.

(5)-(9) шеттік есепті шешуге [9, 10] жұмыстарда ұсынылған профессор Д.С. Джумабаев параметрлеу әдісін қолданамыз.

$\lambda = x_1(0)$ қосымша параметрін енгіземіз және $u_1(t) = x_1(t) - \lambda,\ u_2(t) = x_2(t) - a$ алмастыруларын жасап (5)-(9) есебін келесі есепке келтіреміз:

$$\frac{du_1}{dt} = u_2 + a, \quad t \in (0,T), \tag{10}$$

$$\frac{du_2}{dt} = -(u_1 + \lambda) + \varepsilon\left[\alpha\cos(2t)(u_1 + \lambda) + \beta(u_1 + \lambda)^3\right] + \mu\sin(2t) + g(t), \quad t \in (0,T), \tag{11}$$

$$u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = 0, \tag{12}$$

$$u_1(T) = 0, \quad u_2(T) = 0. \tag{13}$$

(10)-(13) есебінің шешімі $\left(\mu^*, \lambda^*, u_1^*(t), u_2^*(t)\right)$ төрттігі болып табылады, мұндағы $\mu^* \in R,$ $\lambda^* \in R,$ $u_1^*(t), u_2^*(t)$ функциялары (10), (11) теңдеулерді және (12), (13) шарттарды қанағаттандырады. Егер $\left(\mu^*, \lambda^*, u_1^*(t), u_2^*(t)\right)$ төрттігі (10)-(13) есептің шешімі болса, онда элементтері $x_1^*(t)=u_1^*(t)+\lambda^*,\quad x_2^*(t)=u_2^*(t)+a$ теңдіктерімен анықталатын $\left(\mu^*, x_1^*(t), x_2^*(t)\right)$ үштігі (5)-(9) есептің шешімі болады.

(10)-(12) параметрлі Коши есептерінің жалғыз шешімдері $u_1(t,\lambda,\mu)$, $u_2(t,\lambda,\mu)$ болсын. Коши есебінің $t=T$ нүктесіндегі мәнін (13) шекаралық шартқа қойып келесі алгералық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$u_1(T,\lambda,\mu)=0, \tag{14}$$

$$u_2(T,\lambda,\mu)=0. \tag{15}$$

Егер (14), (15) алгебралық теңдеулер жүйесінің шешімі бар болса, онда (10)-(13) есеп шешілімді болады.

(14), (15) жүйені векторлық формада жазып аламыз

$$Q_*(\lambda,\mu)=0. \tag{16}$$

Бұл теңдеуді Ньютон итерациялық әдісімен [11, 12] шешеміз. Енді сұрақ туындайды: нақты шешімге жақын болатын «жақсы» бастапқы жуықтауды қалай таңдауға болады? $\varepsilon>0$ саны кішкентай сан екенін ескеріп, (10)-(13) есебін $\varepsilon=0$ үшін шешіп анықтаймыз. Бұл жағдайда келесі сызықты шеттік есепті аламыз:

$$\frac{du}{dt}=A(t)\left(u+\hat{\lambda}\right)+B(t)\mu+f(t),\quad t\in(0,T), \tag{17}$$

$$u(0)=0, \tag{18}$$

$$u(T)=0, \tag{19}$$

мұндағы $\hat{\lambda}=\begin{pmatrix}\lambda\\ a\end{pmatrix},\quad A(t)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad B(t)=\begin{pmatrix}0\\ \sin(2t)\end{pmatrix},\quad f(t)=\begin{pmatrix}0\\ g(t)\end{pmatrix}.$

(17), (18) Коши есебінің шешімін келесі түрде жазуға болады:

$$u(t,\hat{\lambda},\mu)=\Phi(t)\int_0^t\Phi^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau\hat{\lambda}+\Phi(t)\int_0^t\Phi^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau\mu+\Phi(t)\int_0^t\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,\quad t\in[0,T], \tag{20}$$

мұндағы $\Phi(t)$ матрицасы $\dfrac{dz}{dt}=A(t)x,\quad t\in[0,T]$ дифференциалдық теңдеуінің фундаменталды матрицасы.

$$\frac{dz}{dt}=A(t)z+P(t),\quad t\in[0,T],\quad z(0)=0, \tag{21}$$

Коши есебінің жалғыз шешімін келесі түрде жазуға болады:

$$a(P,t)=\Phi(t)\int_0^t\Phi^{-1}(\tau)P(\tau)d\tau,\quad t\in[0,T],$$

мұндағы $P(t)$- (2×2) өлшемді матрица немесе 2 өлшемді вектор. Олай болса, (17), (18) Коши есебінің (20) түрдегі шешімін $a(P,t)$ арқылы келесі түрде жазуға болады:

$$u(t,\hat{\lambda},\mu)=a(A,t)\hat{\lambda}+a(B,t)\mu+a(f,t),\quad t\in[0,T]. \tag{22}$$

(22) шешімді (19) шекаралық шартқа қою нәтижесінде

$$a(A,T)\hat{\lambda}+a(B,T)\mu+a(f,T)=0, \tag{23}$$

λ,μ белгісіздеріне қатысты сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз. Осы жүйенің $\left(\lambda^{(0)},\mu^{(0)}\right)$ шешімін (16) теңдеудің бастапқы жуықтауы ретінде таңдап аламыз.

Бастапқы жуықтауды таңдап алдық, енді Ньютон итерациялық процесін жалғастыра аламыз. (16) теңдеу шешімінің келесі жуықтаулары

$$\begin{pmatrix}\lambda^{(n+1)}\\ \mu^{(n+1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^{(n)}\\ \mu^{(n)}\end{pmatrix}-\left(\frac{\partial Q_*\left(\lambda^{(n)},\mu^{(n)}\right)}{\partial y}\right)^{-1}Q_*\left(\lambda^{(n)},\mu^{(n)}\right),\quad n=0,1,\ldots, \tag{24}$$

формуласы бойынша анықталады, мұндағы

$$\frac{\partial Q_*\left(\lambda^{(n)},\mu^{(n)}\right)}{\partial y}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u_1\left(T,\lambda^{(n)},\mu^{(n)}\right)}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial u_1\left(T,\lambda^{(n)},\mu^{(n)}\right)}{\partial\mu}\\ \dfrac{\partial u_2\left(T,\lambda^{(n)},\mu^{(n)}\right)}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial u_2\left(T,\lambda^{(n)},\mu^{(n)}\right)}{\partial\mu}\end{pmatrix}.$$

$Q_*\left(\lambda^{(n)},\mu^{(n)}\right)$ матрицасының элементтерін (10)-(12) Коши есептерін $\lambda=\lambda^{(n)}$, $\mu=\mu^{(n)}$ үшін шешіп келесі түрде анықтаймыз:

$$Q_*\left(\lambda^{(n)},\mu^{(n)}\right)=\begin{pmatrix}u_1\left(T,\lambda^{(n)},\mu^{(n)}\right)\\ u_2\left(T,\lambda^{(n)},\mu^{(n)}\right)\end{pmatrix}.$$

$\dfrac{\partial Q_*\left(\lambda^{(n)},\mu^{(n)}\right)}{\partial y}$ Якоби матрицасының элементтерін анықтау үшін (10)-(12) теңдіктердің екі жағын λ және μ бойынша дифференциалдап келесі есептерді аламыз:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_1(t,\lambda,\mu)}{\partial\lambda}\right)=\frac{\partial u_2(t,\lambda,\mu)}{\partial\lambda},\quad t\in[0,T],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_2(t,\lambda,\mu)}{\partial\lambda}\right)=\left(-1+\varepsilon\left[\alpha\cos(2t)+3\beta\left(u_1(t,\lambda,\mu)+\lambda\right)^2\right]\right)\left(\frac{\partial u_1(t,\lambda,\mu)}{\partial\lambda}+1\right),\quad t\in[0,T],$$

$$\frac{\partial u_1(0,\lambda,\mu)}{\partial\lambda}=0,\quad \frac{\partial u_2(0,\lambda,\mu)}{\partial\lambda}=0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_1(t,\lambda,\mu)}{\partial\mu}\right)=\frac{\partial u_2(t,\lambda,\mu)}{\partial\mu},\quad t\in[0,T],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_2(t,\lambda,\mu)}{\partial\mu}\right)=\left(-1+\varepsilon\left[\alpha\cos(2t)+3\beta\left(u_1(t,\lambda,\mu)+\lambda\right)^2\right]\right)\frac{\partial u_1(t,\lambda,\mu)}{\partial\mu}+\sin(2t),\quad t\in[0,T],$$

$$\frac{\partial u_1(0,\lambda,\mu)}{\partial\mu}=0,\quad \frac{\partial u_2(0,\lambda,\mu)}{\partial\mu}=0.$$

$$v_1^{(n)}(t) = \frac{\partial u_1\left(t, \lambda^{(n)}, \mu^{(n)}\right)}{\partial \lambda}, \quad v_2^{(n)}(t) = \frac{\partial u_2\left(t, \lambda^{(n)}, \mu^{(n)}\right)}{\partial \lambda}, \quad w_1^{(n)} = \frac{\partial u_1\left(t, \lambda^{(n)}, \mu^{(n)}\right)}{\partial \mu}, \quad w_2^{(n)} = \frac{\partial u_2\left(t, \lambda^{(n)}, \mu^{(n)}\right)}{\partial \mu}$$

функциялары сәйкесінше

$$\frac{dv_1}{dt} = v_2, \quad t \in [0, T], \tag{25}$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \left(-1 + \varepsilon\left[\alpha \cos(2t) + 3\beta\left(u_1\left(t, \lambda^{(n)}, \mu^{(n)}\right) + \lambda^{(n)}\right)^2\right]\right)(v_1 + 1), \quad t \in [0, T], \tag{26}$$

$$v_1(0) = 0, \quad v_2(0) = 0, \tag{27}$$

$$\frac{dw_1}{dt} = w_2, \quad t \in [0, T], \tag{28}$$

$$\frac{dw_2}{dt} = \left(-1 + \varepsilon\left[\alpha \cos(2t) + 3\beta\left(u_1\left(t, \lambda^{(n)}, \mu^{(n)}\right) + \lambda^{(n)}\right)^2\right]\right)w_1 + \sin(2t), \quad t \in [0, T], \tag{29}$$

$$w_1(0) = 0, \quad w_2(0) = 0. \tag{30}$$

матрицалық Коши есептерінің жалғыз шешімдері болсын. Олай болса, Якоби матрицасы келесі түрде анықталады

$$\frac{\partial Q_*\left(\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}\right)}{\partial y} = \begin{pmatrix} v_1^{(n)}(T) & v_2^{(n)}(T) \\ w_1^{(n)}(T) & w_2^{(n)}(T) \end{pmatrix}.$$

Жоғарыда айтылғандарды қорытындылай келе, (1)-(4) параметрлі квазисызықты шеттік есепті шешудің келесі сандық алгоритмі ұсынылады.

0- қадам.

a) (21) Коши есептерін шешу арқылы (23) сызықты алгебралық теңдеудің коэффициенттерін анықтау;

b) (23) сызықты алгебралық теңдеуді шешу, $\left(\lambda^{(0)}, \mu^{(0)}\right)$ табу.

1- қадам.

a) $\lambda = \lambda^{(0)}, \quad \mu = \mu^{(0)}$ үшін (10)-(12) Коши есептерін шешу, $u_1\left(t, \lambda^{(0)}, \mu^{(0)}\right), u_2\left(t, \lambda^{(0)}, \mu^{(0)}\right)$ табу, $Q_*\left(\lambda^{(0)}, \mu^{(0)}\right)$ векторын құру;

b) $\lambda = \lambda^{(0)}, \quad \mu = \mu^{(0)}$ үшін (25)-(27), (28)-(30) Коши есептерін шешу, $v_1^{(0)}(t), v_2^{(0)}(t)$ табу, $\frac{\partial Q_*\left(\lambda^{(0)}, \mu^{(0)}\right)}{\partial y} = \begin{pmatrix} v_1^{(0)}(T) & v_2^{(0)}(T) \\ w_1^{(0)}(T) & w_2^{(0)}(T) \end{pmatrix}$ Якоби матрицасын құру.

c) $\begin{pmatrix} \lambda^{(1)} \\ \mu^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{(0)} \\ \mu^{(0)} \end{pmatrix} - \left(\frac{\partial Q_*\left(\lambda^{(0)}, \mu^{(0)}\right)}{\partial y}\right)^{-1} Q_*\left(\lambda^{(0)}, \mu^{(0)}\right)$ формуласы арқылы (16) теңдеу шешімінің келесі жуықтауын анықтау.

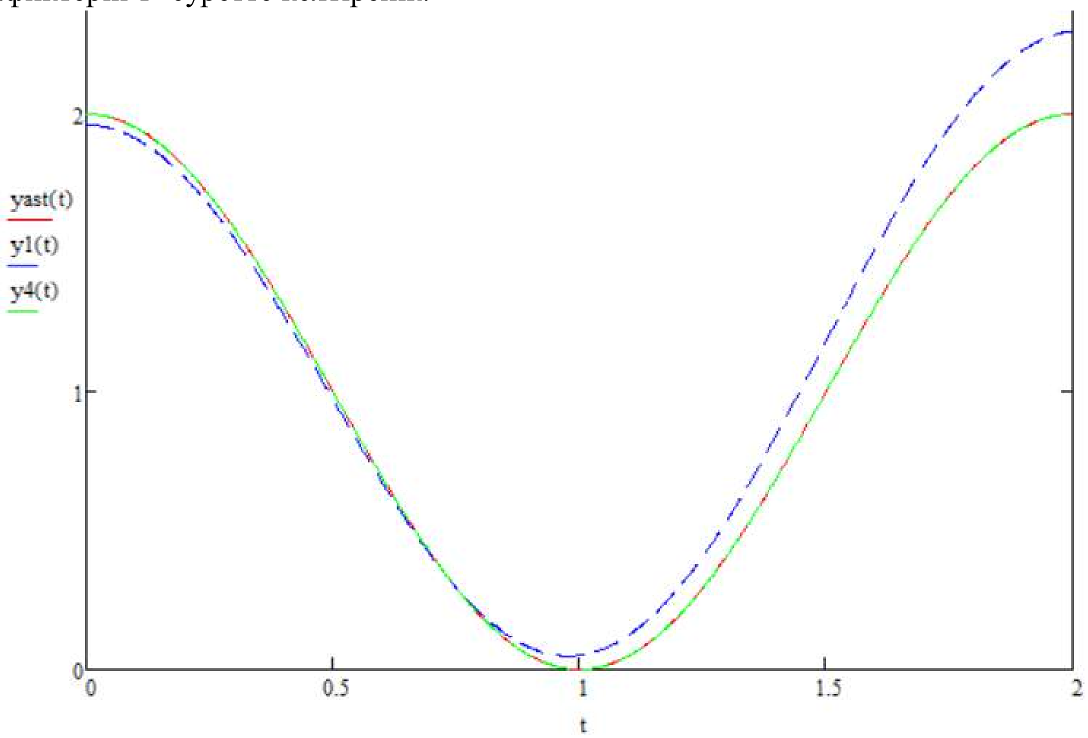
Осы процесті жалғастыра отырып, n- қадамда $\left(\lambda^{(n)},\mu^{(n)}\right)$, $u_1\left(t,\lambda^{(n)},\mu^{(n)}\right)$ және $u_1\left(t,\lambda^{(n)},\mu^{(n)}\right)$ табамыз. Итерациялық процестің жинақтылық шарттары $Q_*(\lambda,\mu)$ векторы және оның Якоби матрицасы терминінде 4.1 теоремада келтірілген [10, 1019 б.].

Алгоритмді орындау барысында Коши есептерін шешуге әртүрлі сандық немесе жуық әдістерді қолданып, алгоритмнің жаңа сандық немесе жуық орындалуын аламыз. Есептің бөліктеу нүктелерінен басқа нүктелеріндегі мәндерін анықтау үшін кубтық интерполяция қолданылады. Сандық шешімінің дәлдігі Коши есептерін шешу әдістерін таңдап алудан тәуелді болады.

Мысалы. (1), (2) шеттік есепте $T=2$, $\alpha=1$, $\beta=1$, $\varepsilon=0.1$, $g(t)=-2\sin(2t)+\left(1-\pi^2\right)\cos(\pi t)-0.1(\cos(\pi t)+1)^3-0.1\cos(2t)(\cos(\pi t)+1)$ және дәл шешімі $\left(y^*(t),\mu^*\right)=(\cos\pi t,2)$ болсын.

Осы есептің жуық сандық шешімін ұсынылған алгоритм бойынша табу үшін аралық Коши есептерін Булирш-Штер әдісін қолданғанда $\left|\mu^*-\mu^{(4)}\right|\le 1.143\cdot 10^{-9}$, $\left\|y^*(\hat{t})-y^{(4)}(\hat{t})\right\|\le 3.351\cdot 10^{-7}$, төртінші ретті дәлдікті Рунге-Кутта әдісін қолданғанда $\left|\mu^*-\mu^{(4)}\right|\le 7.366\cdot 10^{-9}$, $\left\|y^*(\hat{t})-y^{(4)}(\hat{t})\right\|\le 2.939\cdot 10^{-7}$ және Адамс әдісін қолданғанда $\left|\mu^*-\mu^{(4)}\right|\le 4.473\cdot 10^{-6}$, $\left\|y^*(\hat{t})-y^{(4)}(\hat{t})\right\|\le 6.754\cdot 10^{-6}$.

Көрнекі болу үшін есептің дәл шешімідегі функция, сондай-ақ осы функцияның Булирш-Штер әдісін қолданған жағдайдағы бірінші және төртінші жуықтауларының графиктерін 1- суретте келтірейік.



1-Сурет. Шеттік есептің дәл және жуық шешімдерінің графиктері. Мұндағы $yast-$ дәл шешім, $y1(t)-$ шешімнің бірінші жуықтауы, $y4(t)-$ шешімнің төртінші жуықтауы.

Бұдан итерациялар саны төртке тең болғанда, жуық шешімнің дәлдігі жоғары екенін көреміз.

Әдебиеттер тізімі

1. Wilkinson, S.A., Vogt, N., Golubev, D.S., Cole, J.H. (2018). Approximate solutions to Mathieu's equation. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 100, 24–30. https://doi.org/10.1016/j.physe.2018.02.019

2. Kovacic I., Rund R.H., Sah S.M. (2018). Mathieu's equation and its generalizations: overview of stability charts and their features. Appl. Mechanics Reviews, 70 (2). https://doi.org/10.1115/1.4039144

3. He T., Yang F., Chen C., Peng S. (2011). Existence and multiplicity of positive solutions for nonlinear boundary value problems with a parameter. Comput. Math. Appl., 61, 3355-3363. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.04.039

4. Feng X., Niu P., Guo Q. (2015). Multiple solutions of some boundary value problems with parameters. Nonlinear Anal: Theo., Meth. & Appl., 74, 1119-1131. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.09.043

5. Jankowski T. (2002). Application of the numerical-analytic method to systems of differential equations with parameter. Ukrainian Math. J., 54, 237-247. https://doi.org/10.1023/A:1021043629726.

6. Gadella M., Giacomini H., Lara L.P. (2015). Periodic analytic approximate solutions for the Mathieu equation. Appl. Math. and Comput., Vol. 271, 436-445.

7. Xi-LanLiu, Wan-TongLi. (2007). Existence and multiplicity of solutions for fourth-order boundary value problems with three parameters. Mathematical and Computer Modelling, Vol. 46, Iss. 3–4, 525-534.

8. Dzhumabaev D., Bakirova E., Mynbayeva S. (2020). A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation. Math. Meth. Appl. Sci., 43(4), 1788-1802. https://doi.org/10.1002/mma.6003.

9. Dzhumabaev D.S. (2018). A method for solving nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations. Math. J., 69, 43-51.

10. Dzhumabaev D.S. (2019). New general solutions of ordinary differential equations and the methods for the solution of boundary-value problems. Ukrainian Math. J., 71, 1006–1031. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01694-9

11. Deuflhard P. (2004). Newton methods for nonlinear problems. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-23899-4.

12. Ronto M., Samoilenko A.M. (2000). Numerical-analytic methods in the theory of

boundary-value problems. New York: Word Scientific, River Edge. https://doi.org/10.1142/3962.

References

1. Wilkinson, S.A., Vogt, N., Golubev, D.S., Cole, J.H. (2018). Approximate solutions to Mathieu's equation. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 100, 24–30. https://doi.org/10.1016/j.physe.2018.02.019

2. Kovacic I., Rund R.H., Sah S.M. (2018). Mathieu's equation and its generalizations: overview of stability charts and their features. Appl. Mechanics Reviews, 70 (2). https://doi.org/10.1115/1.4039144

3. He T., Yang F., Chen C., Peng S. (2011). Existence and multiplicity of positive solutions for nonlinear boundary value problems with a parameter. Comput. Math. Appl., 61, 3355-3363. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.04.039

4. Feng X., Niu P., Guo Q. (2015). Multiple solutions of some boundary value problems with parameters. Nonlinear Anal: Theo., Meth. & Appl., 74, 1119-1131. https://doi.org/10.1016/j.na.2010.09.043

5. Jankowski T. (2002). Application of the numerical-analytic method to systems of differential equations with parameter. Ukrainian Math. J., 54, 237-247. https://doi.org/10.1023/A:1021043629726.

6. Gadella M., Giacomini H., Lara L.P. (2015). Periodic analytic approximate solutions for the Mathieu equation. Appl. Math. and Comput., Vol. 271, 436-445.

7. Xi-LanLiu, Wan-TongLi. (2007). Existence and multiplicity of solutions for fourth-order boundary value problems with three parameters. Mathematical and Computer Modelling, Vol. 46, Iss. 3–4, 525-534.

8. Dzhumabaev D., Bakirova E., Mynbayeva S. (2020). A method of solving a nonlinear boundary value problem with a parameter for a loaded differential equation. Math. Meth. Appl. Sci., 43(4), 1788-1802. https://doi.org/10.1002/mma.6003.

9. Dzhumabaev D.S. (2018). A method for solving nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations. Math. J., 69, 43-51.

10. Dzhumabaev D.S. (2019). New general solutions of ordinary differential equations and the methods for the solution of boundary-value problems. Ukrainian Math. J., 71, 1006–1031. https://doi.org/10.1007/s11253-019-01694-9

11. Deuflhard P. (2004). Newton methods for nonlinear problems. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-23899-4.

12. Ronto M., Samoilenko A.M. (2000). Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems. New York: Word Scientific, River Edge. https://doi.org/10.1142/3962.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ МАТЬЕ С ПАРАМЕТРОМ

С.Т. МЫНБАЕВА, Г. ЕРБОЛАТКЫЗЫ*

Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, Актобе, Казахстан

*e-mail: forever.94@bk.ru

Аннотация. В статье рассматривается задача, представленная граничным и дополнительным условием для квазилинейного дифференциального уравнения Матье с параметром. Решением задачи является пара, состоящая из функции и параметра. Значение искомой функции в начальной точке рассматриваемого интервала вводится как дополнительный параметр, а искомая функция заменяется суммой новой неизвестной функции и введенного параметра. Для квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений возникает условие Коши. В результате постановки решения задачи Коши на граничное условие строится система квазилинейных алгебраических уравнений относительно параметров. Для нахождения решения построенной системы используется итерационный метод Ньютона. Предложен алгоритм решения рассматриваемой задачи, основанный на методе параметризации Д. С. Джумабаева, и для численной реализации алгоритма используются различные методы. Шаги алгоритма включают решение векторных и матричных задач Коши. Для решения задач Коши используются метод Булирша-Штера, метод Рунге-Кутты четвертого порядка и метод Адамса и эти результаты сравниваются. Используя различные численные или приближенные методы, мы получаем новую числовую или приближенную реализацию алгоритма. Для определения значений задачи в других точках, кроме точек деления используется кубическая интерполяция. Выявлена зависимость точности численного решения от выбора методов решения задач Коши.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение Матье, квазилинейная краевая задача, задача Коши, метод Ньютона, метод параметризации Д.С. Джумабаева, алгоритм, численное решение.

NUMERICAL METHODS FOR SOLVING A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE QUASI-LINEAR MATHIEU EQUATION WITH A PARAMETER

S.T. MYNBAYEVA, G. YERBOLATKYZY*

K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan

*e-mail: forever.94@bk.ru

Abstract. The paper considers the problem given by the boundary and additional condition for the quasi-linear Mathieu differential equation with a parameter. The value of the desired function at the beginning point of the interval is considered as an additional parameter and the desired function is replaced by the sum of the new unknown function and the entered parameter. The Cauchy condition appears for quasi-linear ordinary differential equations. Employing the solution to the Cauchy problem to the boundary condition, a system of quasi-linear algebraic equations in parameters is formed. To find a solution for the system Newton's iterative method is used. An algorithm for solving the problem under consideration based on the D.S. Dzhumabaev parameterization method is proposed and various methods are applied to the numerical implementation of this algorithm. Steps of the algorithm include solving Cauchy problems. To solve Cauchy problems the Bulirsh-Shter method, the Runge-Kutta method of the fourth order, and the Adams method are used and these results are compared. Using various numerical or approximate methods, we get a new numerical or approximate implementation of the algorithm. The accuracy of numerical solutions depends on the choice of methods for solving Cauchy problems.

Key words: Mathieu differential equation, quasi-linear boundary value problem, Cauchy problem, Newton's method, D.S. Dzhumabaev parametrization method, algorithm, numerical solution.