МРНТИ 27.29.15, 29.05.03, 33.15.02

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХ ИДЕНТИЧНЫХ ЗАДАЧ НА ВСТРЕЧУ

И.Ф. СПИВАК-ЛАВРОВ [0000-0002-2683-2425] *, А.А. КЕНЖЕГАРИН [0000-0002-0857-5971],
С.Е. ЖУБАНАЗАРОВ [0000-0002-3739-5638], Б.О. САРСЕНБАЕВ [0000-0002-1446-2690]
Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан
*e-mail: spivakif@rambler.ru

Аннотация. В работе получено аналитическое решение известной задачи о переправке катера через реку. Решена задача, в которой при движении катера его нос все время направлен на пристань, находящуюся на противоположном берегу реки. При переходе в систему отсчета, связанную с рекой, эта задача решается аналогично задаче о движении торпеды с инфракрасным наведением, которая выпущена, чтобы поразить корабль, движущийся равномерно и прямолинейно. Еще одна аналогичная задача о встрече приведена в известном задачнике по общей физике Иродова И.Г., где приведено оригинальное указание к ее решению. Ранее дифференциальные уравнения, описывающие движение катера и торпеды, были решены нами численно методом Эйлера.

Ключевые слова: переправка катера через реку, дифференциальные уравнения движения, аналитическое решение дифференциального уравнения.

Введение. В этой работе мы решаем достаточно известную задачу, аналитическое решение которой нам удалось найти. Катер переправляется через реку таким образом, что его нос все время направлен на пристань, находящуюся точно на противоположном берегу реки. В начальный момент катер стартует перпендикулярно берегу. Скорость течения реки $u = 0.8$ м/с, скорость катера $\upsilon = 3.2$ м/c, ширина реки $H = 540$ м. Определить какое количество бензина расходует катер на переправу, если при выбранной мощности он расходует 5 л бензина в час.

Ранее в работе [1] была получена система дифференциальных уравнений, описывающие движение катера через реку. Эти уравнения в [1] были решены численно методом Эйлера. В качестве среды программирования использовались электронные таблицы MS Excel, программа была написана на языке VBA (Visual Basic for Application).

В этой работе мы приводим аналитическое решение этой задачи. Найдена аналитическая формула, описывающая траекторию катера, а также формула, определяющая время его движения.

В случае переправки через реку катер затрачивает минимальное время, двигаясь по прямой, направленной на пристань, таким образом, чтобы его не сносило течением. При этом скорость катера должна образовывать угол α с прямой, направленной на пристань, причем

$$\sin\alpha = \frac{u}{\upsilon} \qquad (1)$$

В этом случае на переправу катер затрачивает минимальное время:

$$\tau_m = \frac{H}{\upsilon\cos\beta} = \frac{H}{\upsilon\sqrt{1-\frac{u^2}{\upsilon^2}}} \qquad (2)$$

Подставляя в формулу (2) числовые данные, найдем $\tau_m \cong 174.3$ с.

Решение Иродова И.Е.

Рассмотрим здесь также две другие задачи о встрече, которые имеют аналогичное решение. Первая задача о движении торпеды с инфракрасным наведением.

Найти траекторию движения торпеды с инфракрасным наведением, движущуюся с постоянной скоростью υ, если ее вектор скорости все время направлена на корабль, идущий прямолинейно с постоянной скоростью u. Торпеда выпущена в момент, когда скорости корабля и торпеды взаимно перпендикулярны, а расстояние между кораблем и торпедой равно l. Через какое время торпеда поразит корабль?

В задачнике Иродова И.Е. [2] имеется еще одна идентичная задача (1.13). Точка *A* движется равномерно со скоростью υ так, что вектор $\vec{\upsilon}$ все время нацелен на точку *B*, которая движется прямолинейно и равномерно со скоростью $u < \upsilon$. Через сколько времени точка *A* настигнет точку *B*.

В [2] приведено также оригинальное указание к решению этой задачи. Обозначим через β угол между направлением движения цели и направлением движения торпеды. Угол $\beta(t)$ изменяется со временем t. Из рис. 1 видно, что скорость сближения точек *A* и *B* равна $(\upsilon - u\cos\beta)$.

Теперь можно записать два очевидных интегральных равенства:

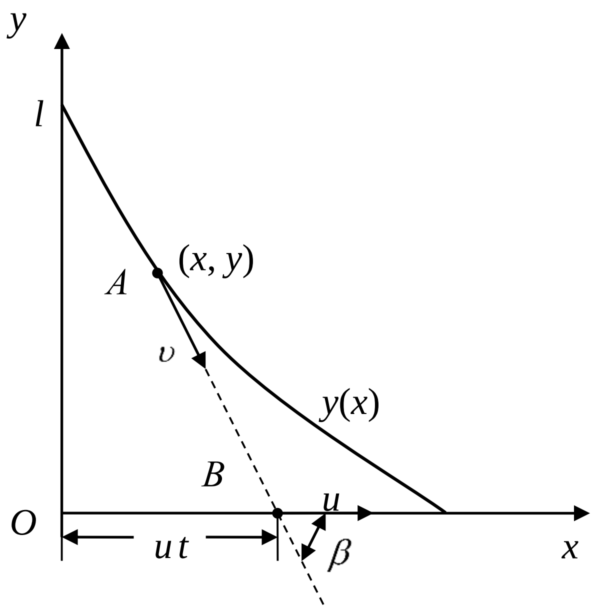

Рисунок 1. **Движение торпеды, $y(x)$ – траектория торпеды**

$$\int_0^{\tau}\left(\upsilon - u\cos\beta\right)dt = l\,, \tag{3}$$

$$\int_0^{\tau}\upsilon\cos\beta\,dt = u\tau \tag{4}$$

В последних формулах τ – время движения торпеды до встречи с кораблем. Расписывая соотношение (3) и используя формулу (4), получим:

$$\upsilon\int_0^{\tau}dt - \frac{u}{\upsilon}\upsilon\int_0^{\tau}\cos\beta\,dt = \upsilon\tau - \frac{u}{\upsilon}u\tau = l \tag{5}$$

Откуда найдем время поражения цели:

$$\tau = \frac{l\,\upsilon}{\upsilon^2 - u^2} = \frac{l}{\upsilon\left(1 - \frac{u^2}{\upsilon^2}\right)} \tag{6}$$

Подставляя в (6) числовые данные предыдущей задачи, найдем:

$$\tau = \frac{540\cdot 3.2}{3.2^2 - 0.8^2} = 180 \text{ (с)} \tag{7}$$

Этот результат совпадает с результатом, полученным в [1] численно. Однако приведенное решение позволяет найти только время движения торпеды, но не ее траекторию. Ниже приведено полное аналитическое решение задачи.

Полное аналитическое решение

Пусть корабль движется вдоль оси x со скоростью u, а торпеда движется по траектории, описываемой функцией $y(x)$, и в донный момент находится в точке (x, y). Используя рис. 1, запишем уравнение:

$$y' = \frac{y}{x - ut}, \tag{8}$$

С другой стороны за время dt торпеда пройдет расстояние $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$, откуда

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2}dx}{\upsilon} \tag{9}$$

Интегрируя (9), запишем:

$$t(x) = \frac{1}{\upsilon}\int_0^x \sqrt{1 + y'^2}dx, \tag{10}$$

Дифференцируя (8) по x и использя (9), получим:

$$y'' = \frac{y'(x - ut) - y\left(1 - u\dfrac{dt}{dx}\right)}{(x - ut)^2} = \frac{y'(x - ut) - y\left(1 - \dfrac{u}{\upsilon}\sqrt{1 + y'^2}\right)}{(x - ut)^2}, \tag{11}$$

Используя (8), преобразуем (11) к виду:

$$y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'^2}{y}\left(1 - \frac{u}{\upsilon}\sqrt{1 + y'^2}\right), \tag{12}$$

Раскрывая скобки, получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка [3-15]:

$$y'' = \alpha\frac{y'^2}{y}\sqrt{1 + y'^2}, \tag{13}$$

где

$$\alpha = \frac{u}{\upsilon} < 1 \tag{14}$$

Уравнение (13) будем решать при следующих граничных условиях:

$$y(0)=l, \qquad y'(0)=tg\frac{\pi}{2}=\infty \tag{15}$$

Вводя обозначение $y'=p$, запишем:

$$y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy} \tag{16}$$

Используя (16), запишем уравнение (13) в виде:

$$p\frac{dp}{dy}=\alpha\frac{p^2}{y}\sqrt{1+p^2} \tag{17}$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{p\,dp}{p^2\sqrt{1+p^2}}=\alpha\frac{dy}{y} \tag{18}$$

Введем новую переменную

$$w^2=1+p^2 \tag{19}$$

В результате выражение (18) запишется в виде:

$$\frac{dw}{w^2-1}=\alpha\frac{dy}{y} \tag{20}$$

Интегрируя последнее уравнение, получим:

$$\sqrt{\frac{w-1}{w+1}}=C\,y^{\alpha}. \tag{21}$$

Удовлетворив граничным условиям (15), найдем постоянную интегрирования C, в результате получим:

$$\sqrt{\frac{w-1}{w+1}}=\left(\frac{y}{l}\right)^{\alpha}. \tag{21}$$

Откуда найдем:

$$w = \frac{1 + \left(\frac{y}{l}\right)^{\alpha}}{1 - \left(\frac{y}{l}\right)^{\alpha}} \tag{22}$$

Теперь определим:

$$y'^2 = w^2 - 1 = \frac{4\left(\frac{y}{l}\right)^{2\alpha}}{\left[1 - \left(\frac{y}{l}\right)^{2\alpha}\right]^2} \tag{23}$$

Из выражения (23) найдем:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{l}\right)^{-\alpha} - \left(\frac{y}{l}\right)^{\alpha}\right] \tag{24}$$

Интегрируя последнее выражение по y, найдем обратную функцию:

$$x(y) = \frac{l}{2}\left[\frac{\left(\frac{y}{l}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\left(\frac{y}{l}\right)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] + C_1 \tag{25}$$

Удовлетворив граничному условию $x(l) = 0$, определим постоянную интегрирования:

$$C_1 = \frac{\alpha l}{1-\alpha^2}\,. \tag{26}$$

Таким образом, найдем окончательно:

$$x(y) = \frac{\alpha l}{1-\alpha^2} + \frac{l}{2}\left[\frac{\left(\frac{y}{l}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\left(\frac{y}{l}\right)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] \tag{27}$$

На рис. 2 приведены траектории торпеды, полученные с помощью формулы (27) для четырех значений $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, значения x и y на графике даны в единицах l.

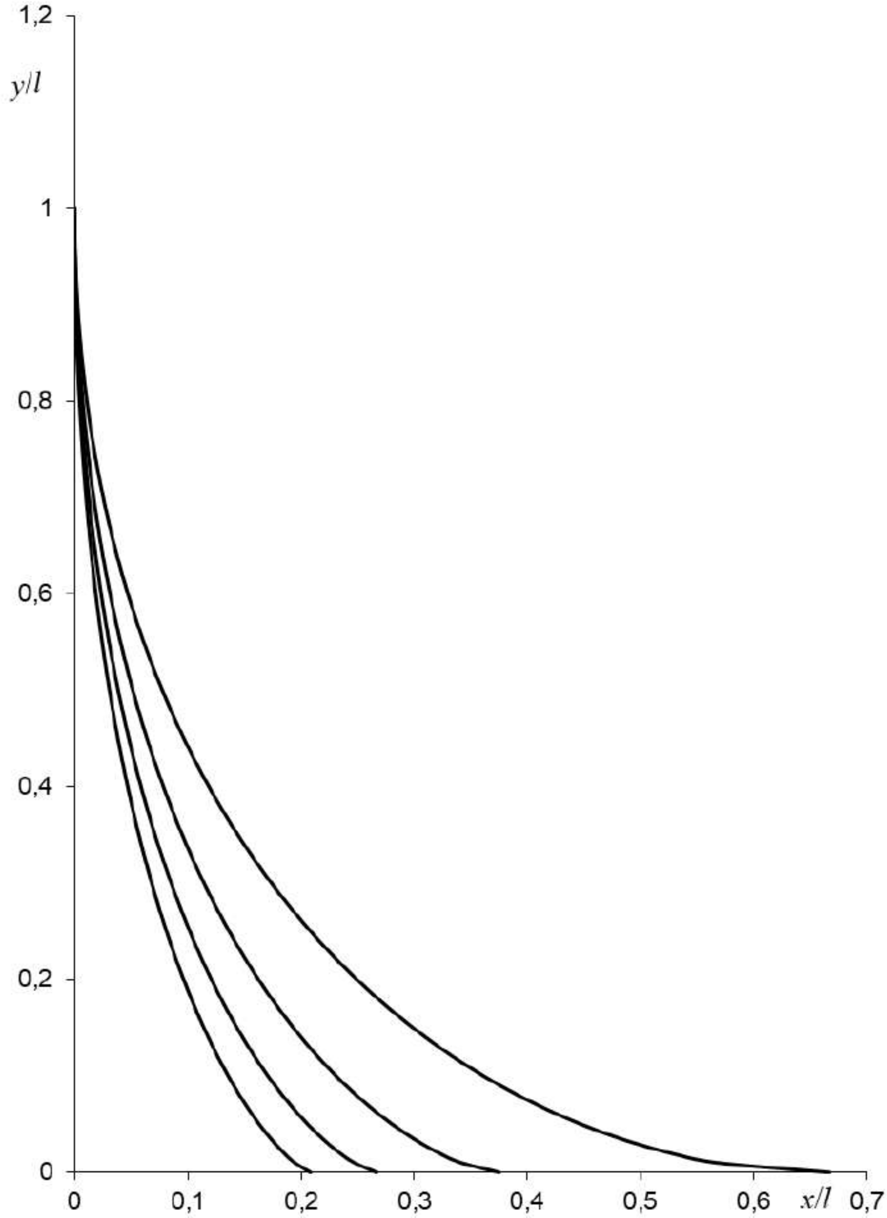

Рисунок 2. **Траектории торпеды для четырех значений** $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

Теперь можно найти *x*-координату точки, в которой торпеда поразит корабль:

$$x_k = x(0) = \frac{\alpha l}{1-\alpha^2} \tag{28}$$

Время движения торпеды определяется по формуле:

$$\tau = \frac{x_k}{u} = \frac{l\upsilon}{\upsilon^2 - u^2} \tag{29}$$

Можно также найти длину траектории торпеды:

$$s = \int_0^{x_k} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \frac{l}{1-\alpha^2} \tag{30}$$

Заключение

Таким образом в работе получено аналитическое решение задачи, которое полностью совпадает с найденным ранее численным решением. Это совпадение говорит о правильности полученных результатов. Безусловно, найденное аналитическое решение дает исчерпывающую информацию о рассматриваемой проблеме.

Список литературы

1. Спивак-Лавров И.Ф., Кенжегарин А.А., Шарипов С.У., Жубаназаров С.Е. About moving the boat through a river // American Journal of Engineering Research (AJER), vol. 10(5), 2021, pp. 19-23.

2. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. Учеб. пособие для вузов. 4-е изд. Исправленное. – М.: Лаб. Баз. Знаний, 2001. – 432 с.

3. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения: Учебник / Л.Э. Эльсгольц. – М.: ЛКИ, 2014. – 312 с.

4. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Издательство ЛКИ, 2019. – 312 с.

5. Филипс, Г. Дифференциальные уравнения. Пер. с англ. / Г. Филипс. – М.: Издательство ЛКИ, 2017. – 112 с.

6. Понтрягин, Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения / Л.С. Понтрягин. – М.: Едиториал УРСС, 2018. – 208 с.

7. Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – М.: Ленанд, 2019. – 336 с.

8. Сабитов, К.Б. Функциональные, дифференциальные и интегральные уравнения. / К.Б. Сабитов. – М.: Высшая школа, 2005. – 671 с.

9. Самойленко, А.М. Дифференциальные уравнения: Практический курс / А.М. Самойленко. – М.: Высшая школа, 2006. – 383 с.

10. Аносов, Д.В. Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем / Д.В. Аносов. – М.: МЦНМО, 2016. – 200 с.

11. Аполлонский, С.М. Дифференциальные уравнения математической физики в электронике. / С.М. Аполлонский. – СПб.: Питер, 2012. – 352 с.

12. Аполлонский, С.М. Дифференциальные уравнения математической физики в электротехнике / С.М. Аполлонский. – СПб.: Питер, 2019. – 320 с.

13. Арнольд, В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2012. – 344 с.

14. Демидович, Б.П. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие / Б.П. Демидович, В.П. Моденов. - СПб.: Лань, 2006. - 288 с.

15. Гордин, В.А. Дифференциальные и разностные уравнения. Какие явления они описывают и как их решать / В.А. Гордин. – М.: ИД ВШЭ, 2016. – 531 с.

References

1. Spivak-Lavrov I.F., Kenzhegarin A.A., Sharipov S.U., Zhubanazarov S.E. (2021) [About moving the boat through a river]// American Journal of Engineering Research (AJER).

2. Irodov I.E. (2001) Zadachi po obshhej fizike. Ucheb. posobie dlya vuzov. 4-e izd. Ispravlennoe. – M.: Lab. Baz. Znanij. [Problems in general physics. Proc. allowance for universities. 4th ed. Corrected.] – M.: Lab. Base Knowledge. [in Russian]

3. Elsgolts, L.E. (2014) Differencial'nye uravneniya: Uchebnik / L.E'. E'l'sgol'c. – M.: LKI [Differential Equations]: Textbook / L.E. Elsholtz. – M.: LKI. [in Russian]

4. Elsgolts, L.E. (2019) Differencial'nye uravneniya. – M.: Izdatel'stvo LKI. [Differential Equations] / L.E. Elsholtz. – M.: Publishing house LKI. [in Russian]

5. Philips, G.(2017) Differencial'nye uravneniya. Per. s angl. / G. Filips. – M.: Izdatel'stvo LKI. [Differential equations. Per. from English]. - M.: Publishing house LKI. [in Russian]

6. Pontryagin, L.S. (2018) Differencial'nye uravneniya i ix prilozheniya / L.S. Pontryagin. – M.: Editorial URSS, [Differential equations and their applications]. [in Russian]

7. Pontryagin, L.S. (2019). Obyknovennye differencial'nye uravneniya / L.S. Pontryagin. – M.: Lenand [Ordinary differential equations]. – M.: Lenand. [in Russian]

8. Sabitov, K.B. (2005) Funkcional'nye, differencial'nye i integral'nye uravneniya. / K.B. Sabitov. – M.: Vysshaya shkola [Functional, differential and integral equations]. - M.: Higher School. [in Russian]

9. Samoilenko, A.M. (2006) Differencial'nye uravneniya: Prakticheskij kurs/. – M.: Vysshaya shkola, [Differential equations: Practical course. M.: Higher School. [in Russian]

10. Anosov, D.V. (2016). Differencial'nye uravneniya: to reshaem, to risuem / D.V. Anosov. – M.: MCNMO. [Differential equations: sometimes we solve, sometimes we draw]. [in Russian]

11. Apollonsky, S.M. (2012) Apollonskij, S.M. Differencial'nye uravneniya matematicheskoj fiziki v e'lektronike. / S.M. Apollonskij. – SPb.: Piter. [Differential equations of mathematical physics in electronics]. / CM. Apollonian. – St. Petersburg: Piter. [in Russian]

12. Apollonsky, S.M. (2019) Apollonskij, S.M. Differencial'nye uravneniya matematicheskoj fiziki v e'lektrotexnike / S.M. Apollonskij. – SPb.: Piter. [Differential equations of mathematical physics in electrical engineering] / S.M. Apollonian. – St. Petersburg: Piter. [in Russian]

13. Arnold, V.I. (2012) Arnol'd, V.I. Obyknovennye differencial'nye uravneniya / V.I. Arnol'd. – M.: MCNMO. [Ordinary differential equations]. [in Russian]

14. Demidovich, B.P. (2006) Demidovich, B.P. Differencial'nye uravneniya: Uchebnoe posobie / B.P. Demidovich, V.P. Modenov. - SPb.: Lan'. [Differential Equations: Textbook]/ B.P. Demidovich, V.P. Modenov. – St. Petersburg: Lan. [in Russian]

15. Gordin, V.A. (2016) Gordin, V.A. Differencial'nye i raznostnye uravneniya. Kakie yavleniya oni opisyvayut i kak ix reshat' / V.A. Gordin. – M.: ID VShE'. [Differential and difference equations. What phenomena do they describe and how to solve them]. – M.: ID HSE. [in Russian]

КЕЗДЕСУДЕ ҮШ БІРДЕЙ ЕСЕПТІҢ АНАЛИТИКАЛЫҚ ШЕШІМІ

СПИВАК-ЛАВРОВ И.Ф.*, КЕНЖЕГАРИН А.А, ЖУБАНАЗАРОВ С.Е., САРСЕНБАЕВ Б.О.

Актюбинский региональный университет им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан

*e-mail: spivakif@rambler.ru

Аңдатпа. Жұмыста қайықты өзен арқылы өткізу туралы белгілі есептің аналитикалық шешімі алынды. Қайықтың қозғалысы кезінде оның мұрны әрдайым өзеннің қарама-қарсы жағасында орналасқан пирстерге бағытталған есеп шешілді. Өзенмен байланысты санақ жүйеге ауысқан кезде, бұл есеп бірқалыпты және түзусызықты қозғалатын кемеге соққы беру үшін шығарылған инфрақызыл торпедалық қозғалыс есебіне ұқсас шешіледі. Кездесу туралы тағы бір ұқсас есеп жалпы физика бойынша белгілі И. Г. Иродовтың есеп кітабында келтірілген, онда оны шешудің түпнұсқа нұсқауы келтірілген. Бұрын катер мен торпедалардың қозғалысын сипаттайтын дифференциалдық теңдеулерді біз Эйлердің сандық әдісімен шешкен болатынбыз.

Түйін сөздер: қайықты өзен арқылы өткізу, қозғалыстың дифференциалдық теңдеулері, дифференциалдық теңдеудің аналитикалық шешімі.

ANALYTICAL SOLUTION OF THREE IDENTICAL TASKS FOR A MEETING

SPIVAK-LAVROV I.F. *, KENZHEGARIN A.A., ZHUBANAZAROV S.E., SARSENBAYEV B.O.

K.Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan

*e-mail: spivakif@rambler.ru

Abstract. In this work, an analytical solution of the well-known problem of ferrying a boat across a river is obtained. A problem has been solved in which, when the boat is moving, its nose is always directed to the pier, located on the opposite bank of the river. When moving to a reference frame associated with the river, this problem is solved similarly to the problem of the motion of an infrared-guided torpedo, which is fired to hit a ship moving uniformly and rectilinearly. Another similar task about the meeting is given in the well-known problem book on general physics by I.G. Irodov, where an original indication for its solution is given. Earlier differential equations describing the motion of a boat and a torpedo were solved by us numerically by the Euler method.

Key words: boat crossing a river, differential equations of motion, analytical solution of a differential equation