

БӨЛІКТІ-ТҰРАҚТЫ АРГУМЕНТТІ КВАЗИСЫЗЫҚТЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕРДІҢ ПУАССОН БОЙЫНША ОРНЫҚТЫ ШЕШІМДЕРІ

ТЛЕУБЕРГЕНОВА М.А. , ТУЛЕГЕНОВА А.Е. 

Тлеубергенова Мадина Альмухановна — Физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент, Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан

E-mail: mtleubergenova@zhubanov.edu.kz, <https://orcid.org/0000-0002-5572-2305>

*Тулегенова Алия Ерболқызы — Магистрант, Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан

E-mail: a.e.tabildi00@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0000-6438-5833>

Аңдатпа. Мақалада бөлікті-тұрақты аргументті квазисызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесінің Пуассон бойынша орнықты шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығы зерттеледі. Бөлікті-тұрақты аргументтің енгізілуі жүйе шешімдерінің құрылымына әсер етеді. Яғни, шешім үзіліссіз болғанымен, оның туындысы аргументтің ауысу нүктелерінде үзіліске ұшырауы мүмкін. Зерттеудің негізгі мақсаты — жүйеге енетін сыртқы әсер функциясы мен бөлікті-тұрақты аргументтің Пуассон бойынша орнықтылық қасиеттері негізінде сәйкес шешімнің Пуассон бойынша орнықтылығын қамтамасыз ететін жеткілікті шарттарды анықтау. Алдымен бөлікті-тұрақты аргумент үшін Пуассон бойынша орнықтылық ұғымы қарастырылып, оның жинақтылық тізбектерінің қасиеттері талданады. Әрі қарай осы қасиеттер квазисызықтық дифференциалдық жүйенің шешімін зерттеуде қолданылады. Пуассон бойынша орнықты шешімнің бар болуын негіздеуде кіріктірілген интервалдар әдісі қолданылады. Аталған әдіс уақыттық ығысулар мен сәйкес енгізілген аралықтарды таңдау арқылы функциялар мен шешімдердің қажетті жинақтылық қасиеттерін анықтауға мүмкіндік береді. Зерттеу барысында жүйенің сызықтық бөлігінің орнықтылық қасиеттері мен сызықты емес мүшесі мен сыртқы әсер функциясына қойылатын шарттар ескеріліп, Пуассон бойынша орнықты шешімнің бар болуы, жалғыздығы және орнықтылығы үшін жеткілікті шарттар тұжырымдалады. Алынған нәтижелер бөлікті-тұрақты аргументтің қайтарымды қасиеттері мен квазисызықтық дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің динамикасы арасындағы байланысты сипаттайды және күрделі қайтарымды қозғалыстарды зерттеудің теориялық негіздерін кеңейтеді.

Түйін сөздер: Пуассон бойынша орнықтылық, бөлікті-тұрақты аргумент, квазисызықтық дифференциалдық теңдеу, кіріктірілген интервалдар әдісі, Пуассон бойынша орнықты шешім, экспоненциалды орнықтылық.

Кіріспе

Табиғи және жасанды жүйелердің динамикасын зерттеуде уақыт бойынша қайталанатын және күрделі қозғалыстарды сипаттау мәселесі динамикалық жүйелер теориясының негізгі бағыттарының бірі болып табылады. Тербелмелі процестер механикада, аспан әлемінің механикасында, нейрондық желілер теориясы мен басқа да қолданбалы салаларда кеңінен кездеседі. Күнделікті өмірде кездесетін тербелмелі қозғалыстардың болжамды және басқарылатын қасиеттері ерекше маңызға ие болса, аспан әлемінде ондағы денелер қозғалысының уақыт өте белгілі бір күйлерге қайта оралуын сипаттайтын рекурренттілік ұғымы маңызды орын алады. Осыған байланысты периодтық, квазипериодтық, периодты дерлік және одан да күрделі қайтарымды қозғалыстарды математикалық тұрғыдан зерттеу дифференциалдық теңдеулер мен динамикалық жүйелер теориясының маңызды міндетіне айналды.

Тарихи тұрғыдан сызықты емес динамикада негізгі назар периодты қозғалыстарға аударылған [1,51-52; 2,65-68]. Кейін периодтылықтың белгілі бір қасиеттерін сақтай отырып, анағұрлым күрделі динамиканы сипаттайтын квазипериодтық функциялар зерттелді [3]. Периодты дерлік функциялар теориясының іргетасы Н. Бордың еңбектерінде қаланып [4, 32], кейін Н.Н. Боголюбов [5] пен А.С. Бесиковичтің [6, 130-140] зерттеулерінде дамытылды. Алайда көптеген күрделі жүйелердің динамикасын тек периодты немесе периодты дерлік функциялар арқылы сипаттау жеткіліксіз. Осы тұрғыдан алғанда қайтарымды қозғалыстардың жалпы түрі болып табылатын Пуассон бойынша орнықтылық ерекше маңызға ие.

Пуассон бойынша орнықты қозғалыстың негіздерін [7, 85-89] жұмыстан көруге болады.

Пуассон бойынша орнықты нүктелерді А. Пуанкаре аспан динамикасының күрделілігін сипаттаудың негізгі элементі ретінде қарастырды [8, 109-116; 9, 140-141]. Егер А. Пуанкаре Пуассон бойынша орнықтылық теориясының негізін қалаушы болса [8, 109-116], ал Дж.Биркгоф қайтарымды қозғалыстарды енгізу арқылы [10, 198-199] қайтарымды қозғалыстар мен қайтарымдылықтың ең күрделі түрі — Пуассон бойынша орнықтылықпен байланысын орнатты. Қайтарымды қозғалыстар мен Пуассон бойынша орнықтылықты ұғымдары дифференциалдық теңдеулер мен динамикалық жүйелер теориясына бағытталған қалыпты ұғымдар болып табылады. М. Ахмет пен оның әріптестерінің [11-14] мақалаларда және [15; 19, 57] кітаптарында Пуассон бойынша орнықтылықты дәлелдеудің жаңа әдістері дамыды.

Үзіліссіз және дискретті динамикалық жүйелердің қасиеттерін өзара ұштастыратын бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулерді зерттеу, дифференциалдық теңдеулер теориясының маңызды бағыттарының бірі болып табылады. Мұндай теңдеулер жәй және функционалдық дифференциалдық теңдеулер арасындағы аралық орынды алады және олардың динамикасында дифференциалдық әрі айырымдық теңдеулерге тән қасиеттер қатар көрінеді. Осы ерекшеліктеріне байланысты бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулер математикада ғана емес, биологияда, инженерияда, электроникада, басқару теориясында және нейрондық желілерді модельдеуде де кеңінен қолданылады [16, 66-78; 17].

Бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулер теориясы 1980-жылдарының басында қалыптаса бастады. Бөлікті-тұрақты аргументі бар математикалық модельдердің алғашқы үлгілерінің бірін С. Бузенберг пен К. Кук тікелей таралатын жұқпалы аурулардың динамикасын сипаттау мақсатында ұсынды [18]. Кейіннен мұндай теңдеулердің шешімдерін дискреттік теңдеулерге келтіру әдісі кеңінен қолданылып, олардың әртүрлі типтері жүйелі түрде зерттелді. Жалпыланған түрдегі бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулер теориясының негізгі ұғымдары мен әдістері [19, 21-24; 20; 21, 8-11; 22] еңбектерінде қалыптастырылды. Бұл бағыттың одан әрі дамуына профессор М. Ахметтің зерттеулері елеулі үлес қосты. Ол 2005 жылы бөлікті-тұрақты аргументті сызықтық емес дифференциалдық теңдеулерді оларға балама интегралдық теңдеулер негізінде неғұрлым жалпы түрде зерттеу тәсілін алғаш рет ұсынды. Аталған тәсіл бөлікті-тұрақты аргументті жүйелердегі жаңа динамикалық құбылыстарды анықтауға, олардың функционалдық дифференциалдық теңдеулер ретіндегі ерекшеліктерін ашуға және жәй дифференциалдық теңдеулер теориясымен байланысын тереңірек түсінуге мүмкіндік берді. Осыған байланысты бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулер қазіргі уақытта гибридті динамикалық процестерді сипаттаудың маңызды математикалық құралы ретінде қарастырылады.

Зерттеу материалдары мен әдістері

Пуассон бойынша орнықтылықты зерттеуде негізгі тәсілдердің бірі ретінде М. Ахмет және оның бірлескен авторлары ұсынған кіріктірілген интервалдар әдісі қолданылады [23; 24]. Бұл әдіс дифференциалдық теңдеулер шешімдерінің қайталанғыштық қасиеттерін зерттеуге және олардың Пуассон бойынша орнықтылығын дәлелдеуге мүмкіндік береді [23]. Әдістің теориялық негіздері [15, 25, 59; 23; 25] еңбектерде дамытылып, оның әртүрлі дифференциалдық жүйелерге қолданылу аясы кеңейтілген.

Бұл жұмыста бөлікті-тұрақты аргументті квазисызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесінің Пуассон бойынша орнықты шешімдерінің бар болуын зерттеу үшін кіріктірілген интервалдар әдісі қолданылады. Пуассон бойынша орнықтылық функцияның белгілі бір уақыттық ығысулар тізбегі бойынша өзінің бастапқы күйіне қайта жақындау қасиетін сипаттайды. Үзіліссіз функциялар жағдайында бұл қасиет ығысқан функциялардың бастапқы функцияға нақты сандар осінің әрбір компактiлi iшкi жиынында бiрқалыпты жинақталуы арқылы анықталады. Алайда жүйе құрамындағы бөлікті-тұрақты функцияның үзілісті құрылымы бұл ұғымды тікелей қолдануға мүмкіндік бермейді. Себебі аргументті уақыт бойынша ығыстыру барысында функцияның ауысу нүктелері де орын ауыстырады. Нәтижесінде бастапқы және ығысқан функциялардың үзіліс нүктелері бір-біріне жеткілікті жақын болғанымен, олардың осы нүктелер маңындағы мәндері айтарлықтай ерекшеленуі

мүмкін. Сондықтан әдеттегі бірқалыпты жинақтылық үзілісті функциялардың жақындығын сипаттауға жеткіліксіз. Осыған байланысты жұмыста үзіліс нүктелерінің орналасу жақындығын және олардың арасындағы аралықтарда функция мәндерінің жақындығын бір мезгілде ескеретін *B-топология* маңайы қолданылады [26, 63].

Бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулер үшін шешімдердің бар болуы мен жалғыздығы, периодтылығы және әртүрлі орнықтылық қасиеттері кеңінен зерттелген. Дегенмен мұндай жүйелер шешімдерінің қайтарымдық қасиеттеріне, оның ішінде Пуассон бойынша орнықты шешімдердің бар болуы мен орнықтылығына қатысты мәселелер әлі де жеткілікті дәрежеде зерттелмеген. Осы зерттеулерді жалғастыру және аталған мәселені толықтыру мақсатында бұл жұмыста бөлікті-тұрақты аргументті квазисызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесі қарастырылып, оның Пуассон бойынша орнықты шешімдерінің бар болуы мен орнықтылығы зерттеледі. Зерттеу барысында бөлікті-тұрақты аргументтің құрылымдық ерекшеліктері ескеріліп, жүйені эквивалентті интегралдық теңдеуге келтіру және сәйкес оператордың қасиеттерін зерттеу арқылы Пуассон бойынша орнықты жалғыз шешімнің бар болуын қамтамасыз ететін жеткілікті шарттар анықталады.

Нәтижелер және оларды талқылау

Жұмыста $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ және $\mathbb{R}$ арқылы сәйкесінше натурал, бүтін және нақты сандар жиынын белгілейміз.

Зерттеудің негізгі нысаны – бөлікті-тұрақты аргументті квазисызықтық дифференциалдық теңдеулердің Пуассон бойынша орнықты шешімдері. Мұндай шешімдерді алу үшін дифференциалдық теңдеудің оң жағындағы функция мен бөлікті-тұрақты аргументті Пуассон бойынша орнықтылық қасиетке ие функция ретінде аламыз. Бұған қоса, бөлікті-тұрақты аргументтің ауысу нүктелерінің тізбегі де Пуассон бойынша орнықты тізбек болсын. Демек бізге, келесі негізгі ұғымдар қажет болады.

Зерттеуде $u = (u_1, \dots, u_m)$ векторы үшін $\|u\|_1 = \max_{1 \leq i \leq m} |u_i|$ нормасы, ал $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, m$ квадрат матрицасы үшін $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$ нормасы қолданылады, мұндағы $|\cdot|$ – абсолют шаманың белгісі.

Анықтама 1 [7, 85]. Шенелген $k_i = (k_i^1, k_i^2, \dots, k_i^p)$, $i \in \mathbb{Z}$ тізбегі берілсін. Егер әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін $\max_{i_1 < i < i_2} \|k_{i+l_n} - k_i\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, теңсіздігі орындалатындай $l_n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}$, тізбегі табылатын болса, онда k_i тізбегі Пуассон бойынша орнықты деп аталады.

Анықтама 2 [7, 85]. Бірқалыпты үзіліссіз шенелген $\phi(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ функциясы берілсін. Егер әрбір шенелген интервалда $\phi(t + t_n) \rightarrow \phi(t)$ шарты орындалатындай $t_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ тізбегі бар болса, онда ол *Пуассон бойынша орнықты функция* деп аталады.

Анықтамадағы t_n тізбегі Пуассон тізбегі немесе жинақтылық тізбегі деп аталады.

Пуассон бойынша орнықтылық ұғымы функцияның белгілі бір ығысудан кейін өзінің бастапқы күйіне жақындау қасиетін сипаттайды. Яғни t_n жинақтылық тізбегіне қатысты ығысқан функцияның, $\phi(t + t_n)$ функциясының, бастапқы $\phi(t)$ функциясына бірқалыпты жинақтылығы қарастырылады. Бұл анықтама үзіліссіз функциялар үшін орындалады, себебі бірқалыпты жинақтылық қарастырылып отырған функциялардың бүкіл анықталу облысындағы өзара жақындығын сипаттайды. Дифференциалдық теңдеудің оң жағына бөлікті-тұрақты функцияның болуы Пуассон бойынша орнықтылықты үзілісті функциялар класына бейімдеуді талап етеді. Бұл жағдайда классикалық анықтаманы тікелей қолдану тиімсіз. Функция аргументін ығыстырған кезде бөлікті-тұрақты аргументтің ауысу нүктелеріне сәйкес келетін үзіліс мезеттері де ығысады. Сондықтан, $\phi(t + t_n)$ және $\phi(t)$ функцияларының θ_i , $i \in \mathbb{Z}$ ауысу нүктелерінің маңайындағы мәндері сәйкес келмеуі мүмкін. Осы себепті бірқалыпты жинақтылық үзілісті функциялардың жақындасу сипатын толық бейнелей алмайды. Бұл ерекшелікті ескеру үшін *B-топология* ұғымы қажет болады [26, 63], ол үзіліс нүктелері арасындағы функция мәндерінің жақындығын және үзіліс нүктелерінің өздерінің жақындығын бір уақытта басқаруға мүмкіндік береді.

Бұған қоса, Пуассон бойынша орнықтылық анықтамасы $t_n, n \in \mathbb{N}$ жинақтылық тізбегіне

негізделгендіктен, ал бөлікті-тұрақты функция $\theta_i, \xi_i, i \in \mathbb{Z}$ тізбектерімен анықталатындықтан, үш тізбектің де үйлесімді әрекетін ескеру қажет болады. Осы мақсатта Пуассон жұбы және Пуассон үштігі ұғымдары қажет.

Индекстері бойынша қатаң өспелі t_n, θ_i және $\xi_i, n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z}$, нақты сандар тізбектерін бекітейік. θ_i және $\xi_i, i \in \mathbb{Z}$ тізбектері екі бағытта да шенелмеген болсын. Сонымен қатар, $\underline{\theta} \leq \theta_{i+1} - \theta_i \leq \bar{\theta}$ оң $\underline{\theta}$ және $\bar{\theta}$ сандар болсын.

Анықтама 3 [25]. Үзіліс нүктелері $\theta_i, i \in \mathbb{Z}$ болатын, шенелген және бөлікті үзіліссіз $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ функциясы берілсін. Егер әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін

$$\max_{i_1 < i < i_2} \|\theta_{i+l_n} - t_n - \theta_i\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

шарты орындалатындай бүтін сандардың $l_n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}$ тізбегі табылса, онда $t_n, \theta_i, n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z}$ тізбектерінен құралған (t_n, θ_i) жұбы Пуассон жұбы деп аталады.

Анықтама 4 [25]. Үзіліс нүктелері $\xi_i, i \in \mathbb{Z}$ болатын, шенелген және бөлікті үзіліссіз $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ функциясы берілсін. Егер (1) шартпен қатар әрбір бүтін $i_1 < i_2$ үшін

$$\max_{i_1 < i < i_2} \|\xi_{i+l_n} - t_n - \xi_i\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

шарты орындалатындай бүтін сандардың $l_n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}$ тізбегі табылса, онда $t_n, \theta_i, \xi_i, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$ тізбектерінен құралған (t_n, θ_i, ξ_i) үштікті Пуассон үштігі деп атаймыз.

Анықтама 5 [25]. Бірқалыпты үзіліссіз, шенелген $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ функциясы берілсін. Ауысу сәттері $\theta_i, i \in \mathbb{Z}$ болатын $\mathcal{F}$ жиынының $v(t)$ элементі болсын. Егер $(t_n, \theta_i), n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z}$, Пуассон жұбы болатындай және нақты сандардың әрбір шенелген интервалындағы B – топология маңайында $v(t + t_n) \rightarrow v(t)$ шарты орындалатындай $t_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ нақты сандар тізбегі табылса, онда $v(t)$ үзілісті Пуассон бойынша орнықты функция деп аталады.

Бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулердің неғұрлым жалпы класы төмендегідей беріледі [21, 8-11]:

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(\gamma(t)))$$

мұндағы $t \in R, x \in R^n$ және $\gamma(t) = \xi_i, \theta_i \leq t < \theta_{i+1}$ – бөлікті-тұрақты аргумент, θ_i және $\xi_i, i \in \mathbb{Z}$ тізбектері $\theta_i \leq \xi_i \leq \theta_{i+1}$ шарты орындалатындай екі бағытта да шенелмеген тізбектер. Бөлікті-тұрақты $\gamma(t)$ функциясының анықтамасы мен негізгі қасиеттері [21, 8-11] жұмыста жан-жақты қарастырылған.

Дифференциалдық теңдеулердің жүйесіне бөлікті-тұрақты аргумент функция енуі жүйе шешімінің динамикалық қасиеттеріне тікелей әсер етеді. Жәй дифференциалдық теңдеулердің шешімдері қарастырылатын уақыт аралығында үзіліссіз дифференциалданатын қисықтармен сипатталса, бөлікті-тұрақты аргументті дифференциалдық теңдеулер жағдайында шешімнің құрылымы өзгеше болады. Мұнда шешімнің өзі үзіліссіз болғанымен, оның туындысы бөлікті-тұрақты аргумент мәнінің ауысу нүктелерінде үзіліске ұшырайды. Бұған қоса, жұмыста бөлікті-тұрақты аргумент Пуассон бойынша орнықтылық қасиетіне ие деп ұйғарылады. Сондықтан алдымен бөлікті-тұрақты аргументтің Пуассон бойынша орнықтылық қасиетін қарастырайық.

Пуассон бойынша орнықты бөлікті-тұрақты аргументтің сипаттамасы. θ_i, ξ_i тізбектеріне қосымша $t_n, n \in \mathbb{Z}$ тізбегін (t_n, θ_i, ξ_i) – Пуассон үштігі болатындай етіп бекітеміз. $\gamma(t) = \xi_i$ бөлікті-тұрақты аргументпен қоса, бекітілген $n \in \mathbb{Z}$ үшін $\gamma(t + t_n)$ функциясын қарастырайық. Егер $\theta'_i \leq t < \theta'_{i+1}$ болса онда $\gamma(t + t_n) = \xi_{i+l_n}$ екендігін көруге болады, мұндағы $\theta'_i = \theta_{i+l_n} - t_n, i \in \mathbb{Z}$.

Бөлікті-тұрақты аргументтің Пуассон бойынша орнықтылық қасиетіне ие екенін

көрсетеміз.

Ол үшін, $b > a$ болатын $[a, b]$ шенелген интервалы және осы интервалда $2\epsilon < \theta$ теңсіздігі орындалатындай кез келген оң ϵ санын бекітейік. Әрі қарай, $\theta_i \leq \theta_{i+l_n} - t_n$ деп ұйғарып, $[a, b]$ аралығының ауысу сәттері $\theta_i, i = l + 1, l + 2, \dots, l + p - 1$, үшін келесіні қарастырайық:

$$\theta_l \leq a < \theta_{l+1} < \theta_{l+2} < \dots < \theta_{l+p-1} < b \leq \theta_{l+p}.$$

Жалғастыра отырып жеткілікті үлкен n мен барлық $i = l, l + 1, \dots, l + p$ үшін

$$|\theta'_i - \theta_i| < \epsilon \quad (3)$$

шарты және кез келген i үшін θ_i және θ'_i нүктелерінің аралығын қоспағандағы $t \in [a, b]$ аралығы үшін

$$|\gamma(t + t_n) - \gamma(t)| < \epsilon, \quad (4)$$

шарты орындалатындығын көрсетеміз.

Ол үшін, i -ны бекітіп алайық, мұндағы $i = l, l + 1, \dots, l + p$, болсын. Бекітілген i үшін $\gamma(t) = \xi_i, t \in [\theta_i, \theta'_i)$ және $\gamma(t + t_n) = \xi_{i+l_n}, t \in [\theta'_i, \theta'_{i+1})$ теңдіктерін аламыз. Демек, жеткілікті үлкен n үшін $(\theta'_i, \theta'_{i+1})$ интервалы бос емес. Пуассон жұбының анықтамасына сүйенсек, (3) шарты орындалады. Сонымен қатар, (2) шартынан жеткілікті үлкен n үшін

$$|\gamma(t + t_n) - \gamma(t)| = |\xi_{i+l_n} - \xi_i| < \epsilon \quad (5)$$

$t \in [\theta'_i, \theta'_{i+1})$ екендігі шығады. Осылайша (3), (4) теңсіздіктері орындалады.

Егер (3),(4) шарттар кез келген ϵ үшін орындалатын болса, онда $\gamma(t + t_n)$ бөлікті-тұрақты функциясы шенелген аралықтың B -топология маңайында $\gamma(t)$ функциясына ұмтылады. Яғни $\gamma(t)$ үзілісті Пуассон бойынша орнықты функция.

Алынған нәтижелерді негізге ала отырып, енді жұмыста зерттелетін негізгі жүйені қарастыруға көшейік. Келесі түрдегі квазисызықты бөлікті-тұрақты аргументті жүйені қарастырайық:

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(x(\gamma(t))) + h(t), \quad (6)$$

мұндағы $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$; $A(t)$ матрицасы – m – өлшемді үзіліссіз квадрат матрица; $\gamma(t) = \xi_i$ егер $\theta_i \leq t < \theta_{i+1}, i \in \mathbb{Z}$ – бөлікті-тұрақты аргумент. Жұмыста, $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| < H\}$, мұндағы H – бекітілген оң сан, облысында үзіліссіз функциялар деп қабылдайық. $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ – бірқалыпты үзіліссіз және шенелген функция болсын.

Жұмыстың мақсаты — бөлікті-тұрақты аргументті квазисызықтық дифференциалдық теңдеулердің Пуассон бойынша орнықты шешімдерінің бар болуы мен орнықтылығын зерттеу. Осы мақсатта Пуассон бойынша орнықты функциялар кеңістігінде анықталған оператор енгізіледі. Зерттеу аталған оператордың осы кеңістікті өзіне бейнелеу, яғни оның инварианттылығын сақтау қасиетін анықтауға және сәйкес шарттар орындалғанда оператордың сығушы бейнелеу болатынын көрсетуге негізделеді. Пуассон бойынша орнықты функциялар кеңістігінің толықтығын пайдаланып, қозғалмайтын нүкте туралы теорема негізінде оператордың жалғыз қозғалмайтын нүктесінің бар болуы дәлелденеді.

Алдымен, $t_n \rightarrow \infty, n = 1, 2, \dots$ жинақтылық тізбегі ортақ барлық m – өлшемді Пуассон бойынша орнықты $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t))$, $\varphi_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ функцияларының кеңістігін еңгізіп, оны Ω_0 арқылы белгілейік. Ондағы норманы $\|\varphi\|_1 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varphi(t)\|$ арқылы анықтайық және кеңістіктегі барлық φ функциялары үшін $\|\varphi\|_1 < H$ шарты орындалсын.

(6) теңдеумен байланысты біртекті жүйені қарастырайық

$$x'(t) = A(t)x(t), \quad (7)$$

$X(t)$ – матрицасы, $X(0) = E$ шарты орындалатындай (7) жүйенің фундаменталдық матрицасы болсын, мұндағы $E - m \times m$ бірлік матрица. Сондай ақ, (7) жүйенің Коши матрицасы $X(t, u)$ келесідей қасиеттерге ие болсын $X(t)X^{-1}(u)$ және $X(t + w, u + w) = X(t, u)$, $t, u \in \mathbb{R}$.

Келесі шарт орындалсын делік.

(C1) (7)-жүйенің характеристикалық көбейткіштерінің модулі бірден кіші.

Бұдан

$$\|X(t, u)\| \leq Ke^{-\alpha(t-u)}, t \geq u \quad (8)$$

шарты орындалатындай $K \geq 1$ және $\alpha > 0$ сандары бар болатындығы шығады [29].

Лемма 1 [24]. Егер (8) теңсіздік орындалатын болса, онда келесі бағалау орынды:

$$\|X(t + \tau, u + \tau) - X(t, u)\| \leq \max_{t \in \mathbb{R}} \|A(t + \tau) - A(t)\| \frac{2K^2}{\alpha^2 e} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-u)}, t \geq u, \tau \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Лемманың дәлелдеуі [24] жұмыста берілген.

Келесі шарттар орындалсын деп есептейік:

(C2) $A(t)$ -w периодты матрица болсын, мұндағы w – оң бекітілген сан және $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|A(t)\| = \lambda < \infty$;

(C3) $h(t)$ функциясы $t_n \rightarrow \infty, n = 1, 2, \dots$ ортақ жинақтылық тізбегімен үзілссіз Пуассон бойынша орнықты болсын;

(C4) $\gamma(t)$ функциясы $t_n \rightarrow \infty, n = 1, 2, \dots$ ортақ жинақтылық тізбегімен үзілісті Пуассон бойынша орнықты болсын;

(C5) t_n жинақтылық тізбегі мен $\gamma(t)$ функциясының ауысу сәттерін анықтайтын $\theta_i, i = 0, 1, 2, \dots$ тізбегінен құралған жұп (t_n, θ_i) Пуассон жұбы болсын;

(C6) барлық $t \in \mathbb{R}, v_1, v_2 \in H$ үшін $\|f(v_1) - f(v_2)\| \leq L_f \|v_1 - v_2\|$, орындалсын, мұндағы $L_f > 0$, Липшиц тұрақтысы;

(C7) $\sup_{\|x\| \leq H} \|f(x)\| \leq M_f$, орындалатындай оң M_f саны табылады;

(C8) $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|h(t)\| \leq M_h$, орындалатындай оң M_h саны табылады;

(C9) $\frac{K(M_f + M_h)}{H} < \alpha$;

(C10) $KL_f < \alpha$.

Дифференциалдық теңдеулер теориясынан белгілі [28, 8-10], бүкіл нақты осінде шенелген $x(t)$ функциясы мына интегралдық теңдеуді қанағаттандырғанда, сонда тек сонда ғана ол (6) жүйенің шешімі болады:

$$x(t) = \int_{-\infty}^t X(t, u) \left[f(x(\gamma(u))) + h(u) \right] du. \quad (10)$$

Теорема 1. Егер (C1)-(C10) шарттары орындалатын болса, онда (6) жүйенің жалғыз экспоненциалды орнықты, Пуассон бойынша орнықты шешімі бар болады.

Дәлелдеуі. Дәлелдеуді Ω_0 кеңістігінің толықтығын көрсетуден бастайық. $\mathbb{R}$ кеңістігінде $\phi(t)$ шектік функциясына ұмтылатын $\phi_{k'}(t) \in \Omega_0$ Коши тізбегін қарастырайық. $J \subset \mathbb{R}$ жабық әрі шенелген интервал берілсін. Ол келесідей жазылады

$$\begin{aligned} \|\phi(t + t_n) - \phi(t)\| &< \|\phi(t + t_n) - \phi_{k'}(t + t_n)\| + \|\phi_{k'}(t + t_n) - \phi_{k'}(t)\| \\ &+ \|\phi_{k'}(t) - \phi(t)\| < \epsilon. \end{aligned} \quad (11)$$

Кез келген $\epsilon > 0$ және $t \in J$ үшін (11) теңсіздігінің оң жағындағы әрбір мүше $\epsilon/3$ -тен кіші болатындай k' және n -нің жеткілікті үлкен сандарын таңдап алуға болады. (11) теңсіздігі J жиынында $\phi(t + t_n) \rightarrow \phi(t)$ бірқалыпты ұмтылатынын білдіреді. Ω_0 кеңістігі толық екені дәлелденді.

Ω_0 кеңістігіндегі Π операторын еңгізейік,

$$\Pi\phi(t) = \int_{-\infty}^t X(t, u) \left[f(\phi(\gamma(u))) + h(u) \right] du.$$

Лемма 2. Ω_0 кеңістігі Π операторына қатысты инвариантты.

Дәлелдеу. $\phi(t) \in \Omega_0$ бекітілген деп алсақ, онда

$$\begin{aligned} \|\Pi\phi(t)\| &\leq \int_{-\infty}^t \|X(t, u)\| \left[\|f(\phi(\gamma(u)))\| + \|h(u)\| \right] du \\ &\leq \int_{-\infty}^t K e^{-\alpha(t-u)} [M_f + M_h] ds \leq \frac{K}{\alpha} (M_f + M_h). \end{aligned}$$

Соңғы теңсіздік пен (C9) шартынан келесіні аламыз $\|\Pi\phi\|_1 < H$.

Әрі қарай, $\phi(t) \in \Omega_0$ функцияларының Пуассон бойынша орнықты екенін көрсетейік. Яғни, барлық жабық және шенелген нақты ось аралығында $\Pi\phi \in \Omega_0$ функциясы $\Pi\phi(t + t_n) \rightarrow \Pi\phi(t)$ бірқалыпты ұмтылатын t_n тізбегінің бар екенін көрсетуіміз керек. Ол үшін, $b \in \mathbb{R}$, $b > a$ болатын $[a, b]$ жабық интервалында кез келген $\epsilon_0 > 0$ санын бекітейік. $\|\Pi\phi(t + t_n) - \Pi\phi(t)\| < \epsilon_0$ жеткілікті үлкен n және $t \in [a, b]$ үшін көрсету жеткілікті. $c < a$ және $\varsigma > 0$ сандары келесідей болсын

$$\frac{4K^2(M_f + M_h)}{\alpha^3 e} \varsigma < \frac{\epsilon_0}{5}, \quad (12)$$

$$\frac{2K(L_f H + M_h)}{\alpha} e^{-\alpha(a-c)} < \frac{\epsilon_0}{5}, \quad (13)$$

$$\frac{K}{\alpha} \varsigma < \frac{\epsilon_0}{5}. \quad (14)$$

Біз жеткілікті үлкен n — ді келесі түрде таңдаймыз $\|A(t + t_n) - A(t)\| < \varsigma$, $\|\phi(t + t_n) - \phi(t)\| < \varsigma$ және $\|h(t + t_n) - h(t)\| < \varsigma$, $[c, b]$, және $\theta_j \in [c, b]$, $j \in \mathbb{Z}$ үшін $|\theta_{j-\eta_n} + t_n - \theta_j| < \varsigma$. Осыдан кейін теңсіздікті келесі түрде жаза аламыз.

$$\begin{aligned} &\|\Pi\phi(t + t_n) - \Pi\phi(t)\| \\ &= \left\| \int_{-\infty}^{t+t_n} X(t + t_n, u) \left[f(\phi(\gamma(u))) + h(u) \right] du - \int_{-\infty}^t X(t, u) \left(f(\phi(\gamma(u))) + h(u) \right) du \right\| \\ &= \left\| \int_{-\infty}^t X(t + t_n, u + t_n) \left[f(\phi(\gamma(u + t_n))) + h(u + t_n) \right] du - \int_{-\infty}^t X(t, u) \left(f(\phi(\gamma(u))) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + h(u) \right) du \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^t \|X(t+t_n, u+t_n) - X(t, u)\| \left[\|f(\phi(\gamma(u+t_n)))\| + \|h(u+t_n)\| \right] du \\
 &+ \int_{-\infty}^t \|X(t, u)\| \left[\|f(\phi(\gamma(u+t_n))) - f(\phi(\gamma(u)))\| + \|h(u+t_n) - h(u)\| \right] du \\
 &= \int_{-\infty}^c \|X(t+t_n, u+t_n) - X(t, u)\| \left[\|f(\phi(\gamma(u+t_n)))\| + \|h(u+t_n)\| \right] du \\
 &+ \int_{-\infty}^t \|X(t, u)\| \left[\|f(\phi(\gamma(u+t_n))) - f(\phi(\gamma(u)))\| + \|h(u+t_n) - h(u)\| \right] du \\
 &+ \int_c^t \|X(t, u)\| \left[\|f(\phi(\gamma(u+t_n))) - f(\phi(\gamma(u)))\| + \|h(u+t_n) - h(u)\| \right] du.
 \end{aligned}$$

Енді интегралды есептесек

$$\begin{aligned}
 \|\Pi\phi(t+t_n) - \Pi\phi(t)\| &\leq \int_{-\infty}^t \frac{2K^2\zeta}{\alpha^2 e} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-u)} [M_f + M_h] du \\
 &+ \int_{-\infty}^c K e^{-\alpha(t-u)} [L_f \|\phi(\gamma(u+t_n)) - \phi(\gamma(u))\| + \|h(u+t_n) - h(u)\|] du \\
 &+ \int_c^t K e^{-\alpha(t-u)} [L_f \|\phi(\gamma(u+t_n)) - \phi(\gamma(u))\| + \|h(u+t_n) - h(u)\|] du \\
 &\leq \frac{2K^2\zeta(M_f + M_h)}{\alpha^2 e} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{\alpha}{2}(t-u)} du + 2K(L_f H + M_h) \int_{-\infty}^c e^{-\alpha(t-u)} du \\
 &+ K\zeta \int_c^t e^{-\alpha(t-u)} du + KL_f \int_c^t e^{-\alpha(t-u)} \|\phi(\gamma(u+t_n)) - \phi(\gamma(u))\| du \\
 &\leq \frac{4K^2(M_f + M_h)}{\alpha^3 e} \zeta + \frac{2K(L_f H + M_h)}{\alpha} e^{-\alpha(a-c)} \\
 &+ \frac{K\zeta}{\alpha} + KL_f \int_c^t e^{-\alpha(t-u)} \|\phi(\gamma(u+t_n)) - \phi(\gamma(u))\| du.
 \end{aligned}$$

Біз ендігі интегралдық мүшенің үлесін бағалау арқылы жалғастырамыз.

Бекітілген $t \in [a, b]$ үшін, жалпылықты жоғалтпай $[c, t]$ интервалында l үзіліс сәттері бар екенін көрсетіп, келесіні тұжырымдайық, $\theta_i \leq \theta_{i-\eta_n} + t_n$ деп аламыз және $\theta_i \leq \theta_{i-\eta_n} + t_n = c < \theta_{i+1} < \theta_{i+2} < \dots < \theta_{i+l} \leq \theta_{i+l-\eta_n} + t_n \leq t < \theta_{i+l+1}$ екендігін көреміз.

Келесі теңсіздіктерді қарастырайық

$$KL_f \frac{2lH}{\alpha} (e^{\alpha\zeta} - 1) < \frac{\varepsilon_0}{5}, \quad (15)$$

$$KL_f \frac{2(l+1)\zeta}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\theta}) < \frac{\varepsilon_0}{5} \quad (16)$$

берілген $\zeta > 0$ үшін қанағаттанарлық болуы қажет.

Біздің мақсатымыз соңғы интегралды жоғарыдан бағалау,

$$I = \int_c^t e^{-\alpha(t-u)} \|\phi(\gamma(u + t_n)) - \phi(\gamma(u))\| du.$$

Жоғарыда келтірілген аралықтардың әрқайсысында I интегралын есептеу керек.

$$\begin{aligned} I &= \int_c^{\theta_{k+1}} e^{-\alpha(t-u)} \|\phi(\gamma(u + t_n)) - \phi(\gamma(u))\| du \\ &+ \int_{\theta_{k+1}-\eta_n+t_n}^{\theta_{k+1}} e^{-\alpha(t-u)} \|\phi(\gamma(u + t_n)) - \phi(\gamma(u))\| du \\ &+ \int_{\theta_{k+2}}^{\theta_{k+1}-\eta_n+t_n} e^{-\alpha(t-u)} \|\phi(\gamma(u + t_n)) - \phi(\gamma(u))\| du \\ &+ \int_{\theta_{k+2}-\eta_n+t_n}^{\theta_{k+1}-\eta_n+t_n} e^{-\alpha(t-u)} \|\phi(\gamma(u + t_n)) - \phi(\gamma(u))\| du \\ &+ \int_{\theta_{k+3}}^{\theta_{k+2}-\eta_n+t_n} e^{-\alpha(t-u)} \|\phi(\gamma(u + t_n)) - \phi(\gamma(u))\| du \\ &\vdots \\ &+ \int_{\theta_{k+l-\eta_n+t_n}}^t e^{-\alpha(t-u)} \|\phi(\gamma(u + t_n)) - \phi(\gamma(u))\| du \\ &= \sum_{i=k}^{k+l-1} \int_{\theta_{i-\eta_n+t_n}}^{\theta_{i+1}} e^{-\alpha(t-u)} \|\phi(\gamma(u + t_n)) - \phi(\gamma(u))\| du \\ &+ \sum_{i=k}^{k+l-1} \int_{\theta_{i+1}}^{\theta_{i+1}-\eta_n+t_n} e^{-\alpha(t-u)} \|\phi(\gamma(u + t_n)) - \phi(\gamma(u))\| du \\ &+ \int_{\theta_{k+l-\eta_n+t_n}}^t e^{-\alpha(t-u)} \|\phi(\gamma(u + t_n)) - \phi(\gamma(u))\| du. \end{aligned}$$

Шыққан қосынданы берілуіне байланысты топтап, ыңғайлылық үшін оларды

I_i^1 және I_i^2 арқылы келесідей белгілеп алайық

$$I_i^1 = \int_{\theta_{i-\eta_n+t_n}}^{\theta_{i+1}} e^{-\alpha(t-u)} \|\phi(\gamma(u + t_n)) - \phi(\gamma(u))\| du,$$

және $i = k, k + 1, \dots, k + l - 1$ үшін

$$I_i^2 = \int_{\theta_{i+1}}^{\theta_{i+1}-\eta_n+t_n} e^{-\alpha(t-u)} \|\phi(\gamma(u + t_n)) - \phi(\gamma(u))\| du$$

осы белгілеулерді қолдансақ қосындыны келесідей түрде ықшамдап жаза аламыз

$$I = \sum_{i=k}^{k+l-1} I_i^1 + \sum_{i=k}^{k+l-1} I_i^2 + \int_{\theta_{k+l-\eta_n}+t_n}^t e^{-\alpha(t-u)} \|\phi(\gamma(u+t_n)) - \phi(\gamma(u))\| du,$$

$t \in [\theta_{i-\eta_n} + t_n, \theta_{i+1})$, $i \in \mathbb{Z}$ үшін $\gamma(t) = \xi_i$ екені анық, ал (2) шартынан $\gamma(t+t_n) = \xi_{i+\eta_n}$ екені шығады. Осы нәтижені пайдалана отырып, біз келесі бағалауға жетеміз:

$$\begin{aligned} I_i^1 &= \int_{\theta_{i-\eta_n}+t_n}^{\theta_{i+1}} e^{-\alpha(t-u)} \|\phi(\xi_{i+\eta_n}) - \phi(\xi_i)\| du \\ &= \int_{\theta_{i-\eta_n}+t_n}^{\theta_{i+1}} e^{-\alpha(t-u)} \|\phi(\xi_i + t_n + o(1)) - \phi(\xi_i)\| du \\ &= \int_{\theta_{i-\eta_n}+t_n}^{\theta_{i+1}} e^{-\alpha(t-u)} \|\phi(\xi_i + t_n) - \phi(\xi_i) + \phi(\xi_i + t_n + o(1)) - \phi(\xi_i + t_n)\| du \\ &\leq \int_{\theta_{i-\eta_n}+t_n}^{\theta_{i+1}} e^{-\alpha(t-u)} [\|\phi(\xi_i + t_n) - \phi(\xi_i)\| + \|\phi(\xi_i + t_n + o(1)) - \phi(\xi_i + t_n)\|] du \\ &\leq \int_{\theta_{i-\eta_n}+t_n}^{\theta_{i+1}} e^{-\alpha(t-u)} [\zeta + \|\phi(\xi_i + t_n + o(1)) - \phi(\xi_i + t_n)\|] du. \end{aligned}$$

Әрі қарай, ϕ бірқалыпты үзіліссіз функция екендігін қолданып, $\zeta > 0$ және жеткілікті үлкен n үшін $\rho > 0$ келесідей табуға болады $\|\phi(\xi_i + t_n + o(1)) - \phi(\xi_i + t_n)\| < \zeta$ егер $|\xi_{i+\eta_n} - \xi_i - t_n| < \rho$ болса. Бұл өз кезегінде мынаны білдіреді

$$I_i^1 \leq 2\zeta \int_{\theta_{i-\eta_n}+t_n}^{\theta_{i+1}} e^{-\alpha(t-u)} du \leq \frac{2\zeta}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\theta}).$$

Екінші жағынан, 4 анықтамаға сүйеніп, келесідей нәтиже шығады:

$$I_i^2 \leq 2H \int_{\theta_{i+1}}^{\theta_{i+1-\eta_n}+t_n} e^{-\alpha(t-u)} du \leq \frac{2H}{\alpha} (e^{\alpha\zeta} - 1).$$

Егер біз I_i^1 интегралын бағалау үшін қолданылған ұқсас тәсілді қолдансақ, онда келесі нәтиже шығады

$$\int_{\theta_{k+l-\eta_n}+t_n}^t e^{-\alpha(t-u)} \|\phi(\gamma(s+t_n)) - \phi(\gamma(s))\| du \leq \frac{2\zeta}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\theta}).$$

Осыдан, келесіні көреміз

$$I \leq \frac{2(l+1)\zeta}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\theta}) + \frac{2lH}{\alpha} (e^{\alpha\zeta} - 1).$$

Осы есептеулер нәтижесінен келесіні аламыз

$$\begin{aligned} \|\Pi\phi(t+t_n) - \Pi\phi(t)\| &\leq \frac{4K^2(M_f + M_h)}{\alpha^3 e} \zeta + \frac{2K(L_f H + M_h)}{\alpha} e^{-\alpha(a-c)} \\ &+ \frac{K\zeta}{\alpha} + KL_f \frac{2(l+1)\zeta}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\theta}) + KL_f \frac{2lH}{\alpha} (e^{\alpha c} - 1) \end{aligned}$$

барлық $t \in [a, b]$ үшін. Сондықтан (12)–(16) теңсіздіктері келесіні көрсетеді:

$$\|\Pi\phi(t+t_n) - \Pi\phi(t)\| < \varepsilon_0, t \in [a, b].$$

Осылайша, Ω_0 кеңістігі Π операторына қатысты инвариантты екені анықталды.

Лемма 3. *Π операторы $\mathcal{P}$ кеңістігінің ішінде сығушы оператор.*

Дәлелдеуі. Айталық, φ және ψ функциялары Ω_0 кеңістігінен алынған деп есептейік. Онда барлық $t \in \mathbb{R}$ үшін

$$\begin{aligned} &\|\Pi\varphi(t) - \Pi\psi(t)\| \\ &\leq \left\| \int_{-\infty}^t X(t, u) [f(\varphi(\gamma(u))) + h(u)] du - \int_{-\infty}^t X(t, u) [f(\psi(\gamma(u))) + h(u)] du \right\| \\ &\leq \int_{-\infty}^t \|X(t, u)\| [\|f(\varphi(\gamma(u))) - f(\psi(\gamma(u)))\|] du \\ &\leq \int_{-\infty}^t K e^{-\alpha(t-u)} [L_f \|\varphi(\gamma(u)) - \psi(\gamma(u))\|] du \\ &\leq \int_{-\infty}^t K e^{-\alpha(t-u)} [L_f \|\varphi(u) - \psi(u)\|_1] du \leq \frac{KL_f}{\alpha} \|\varphi(t) - \psi(t)\|_1. \end{aligned}$$

Осыдан барлық $t \in \mathbb{R}$ үшін $\|\Pi\varphi(t) - \Pi\psi(t)\|_1 = \frac{KL_f}{\alpha} \|\varphi - \psi\|_1$ орындалады.

Осылайша, (C10) шарты $\Pi: \Omega_0 \rightarrow \Omega_0$ сығушы оператор екендігін көрсетеді. Лемма дәлелденді.

2 және 3-леммаларға сәйкес, Π операторының Ω_0 жиынындағы инварианттылығы мен сығушылық қасиетінен Π операторының $z(t) \in \Omega_0$ жалғыз қозғалмайтын нүктесінің бар екендігі шығады, сонымен қатар ол (6) жүйесінің Пуассон бойынша орнықты жалғыз шешімі болып табылады.

Әрі қарай, $z(t)$ Пуассон бойынша орнықты шешімнің экспоненциалды орнықтылығын зерттейміз.

Әрі қарай, келесі шарттар қажет.

$$(C11) \quad \bar{\theta} [\lambda(1 + L_f \bar{\theta}) e^{\lambda \bar{\theta}} + L_f] < 1,$$

$$(C12) \quad BL_f K < \alpha, \text{ мұндағы } B = (1 - \bar{\theta} [\lambda(1 + L_f \bar{\theta}) e^{\lambda \bar{\theta}} + L_f])^{-1}.$$

Орнықтылықты дәлелдеу үшін келесі тұжырым қажет болады.

Лемма 4. (C6), (C11) шарттары орындалсын және $\|y(t)\|_1 < H$ шарты орындалатындай $y(t)$ функциясы болсын делік. Егер $\pi(t)$ келесі жүйенің

$$\pi'(t) = A(t)\pi(t) + f(\pi(\gamma(t)) + y(\gamma(u))) - f(y(\gamma(u))) \quad (17)$$

шешімі болса, онда $t \in \mathbb{R}$ үшін келесі теңсіздік орындалады:

$$\|\pi(\gamma(t))\| \leq B \|\pi(t)\|. \quad (18)$$

Дәлелдеуі. Біріншіден, $t \in [\theta_i, \theta_{i+1})$ болатындай $i \in \mathbb{Z}$ бекітіп, екі жағдайды қарастырамыз: (а) $\theta_i \leq \xi_i \leq t < \theta_{i+1}$ және (б) $\theta_i \leq t < \xi_i < \theta_{i+1}$
(а) $t \geq \xi_i$ үшін мына түрде жазуға болады:

$$\begin{aligned}\|\pi(t)\| &\leq \|\pi(\xi_i)\| + \int_{\xi_i}^t (\|A(u)\| \|\pi(u)\| + L_f \|\pi(\xi_i)\|) du \\ &\leq \|\pi(\xi_i)\| + \int_{\xi_i}^t (\lambda \|\pi(u)\| + L_f \|\pi(\xi_i)\|) du \\ &\leq \|\pi(\xi_i)\| (1 + L_f \bar{\theta}) + \int_{\xi_i}^t \lambda \|\pi(u)\| du.\end{aligned}$$

Егер Гронуолл-Беллман леммасын [30] қолдансақ, онда:

$$\|\pi(t)\| \leq \|\pi(\xi_i)\| (1 + L_f \bar{\theta}) e^{\lambda \bar{\theta}}.$$

Екінші жағынан, мына теңсіздік дұрыс болады:

$$\begin{aligned}\|\pi(\xi_i)\| &\leq \|\pi(t)\| + \int_{\xi_i}^t (\|A(u)\| \|\pi(u)\| + L_f \|\pi(\xi_i)\|) du \\ &\leq \|\pi(t)\| + \int_{\xi_i}^t [\lambda \|\pi(u)\| + L_f \|\pi(\xi_i)\|] du \\ &\leq \|\pi(t)\| + \int_{\xi_i}^t [\lambda (1 + L_f \bar{\theta}) e^{\lambda \bar{\theta}} \|\pi(\xi_i)\| + L_f \|\pi(\xi_i)\|] du \\ &\leq \|\pi(t)\| + \bar{\theta} [\lambda (1 + L_f \bar{\theta}) e^{\lambda \bar{\theta}} + L_f] \|\pi(\xi_i)\|.\end{aligned}$$

Сәйкесінше, (C11)-шарттан, $t \in [\theta_i, \theta_{i+1})$, $i \in \mathbb{Z}$ үшін $\|\pi(\xi_i)\| \leq B \|\pi(t)\|$ екендігі шығады. Демек, барлық $\theta_i \leq \xi_i \leq t < \theta_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$ үшін (18) орындалады. Екінші (б) жағдайы да $\theta_i \leq t < \xi_i < \theta_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$ осыға ұқсас дәлелденеді.

Сонымен, барлық $t \in \mathbb{R}$ үшін (18) теңсіздігі орындалады. Лемма дәлелденді.

Соңында $y(t)$ шешімінің орнықтылығын талдауға назар аударайық. $\pi(t) = y(t) - z(t)$ деп белгілейік, мұндағы $z(t)$ — (6) жүйесінің басқа бір шешімі. Онда $\pi(t)$ функциясы (17) жүйесінің шешімі болады, демек келесі қатынас орындалады:

$$\pi(t) = X(t, t_0) \pi(t_0) + \int_{t_0}^t X(t, u) L_f \|\pi(\gamma(u))\| du.$$

Бұдан келесіні аламыз

$$\begin{aligned}\|\pi(t)\| &\leq \|X(t, t_0)\| \|\pi(t_0)\| + \int_{t_0}^t X(t, u) B L_f \|\pi(u)\| du \\ &\leq K e^{-\alpha(t-t_0)} \|\pi(t_0)\| + \int_{t_0}^t K e^{-\alpha(t-u)} B L_f \|\pi(u)\| du \\ &\leq K e^{-\alpha(t-t_0)} \|\pi(t_0)\| + B L_f K \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-u)} \|\pi(u)\| du.\end{aligned}$$

Соңғы теңсіздіктен келесіні көреміз

$$e^{\alpha t} \|\pi(t)\| \leq K e^{\alpha t_0} \|\pi(t_0)\| + B L_f K \int_{t_0}^t e^{\alpha u} \|\pi(u)\| du.$$

$$\|\pi(t)\| \leq K \|\pi(t_0)\| e^{(-\alpha + BL_f K)(t-t_0)}. \quad (19)$$

Сонымен, (C12) шарты бойынша Пуассон бойынша орнықты шешімі $z(t)$ функциясы (6)-жүйенің бірқалыпты экспоненциалды орнықты екендігі шығады. Теорема дәлелденді.

Қорытынды

Бұл жұмыста бөлікті-тұрақты аргументті квазисызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесінің Пуассон бойынша орнықты шешімдері қарастырылды. Мұндай жүйелердің ерекшелігі – шешімнің өзі үзіліссіз болғанымен, оның туындысы бөлікті-тұрақты аргументтің ауысу нүктелерінде үзілісті функция болады. Жұмыстың негізгі нәтижесі ретінде жүйенің Пуассон бойынша орнықты шешімінің бар болуы, жалғыздығы және экспоненциалды орнықтылығы үшін жеткілікті шарттар анықталып, дәлелденді. Пуассон бойынша орнықты функциялар кеңістігінің толықтығы пайдаланылып, сығушы бейнелеу принципі арқылы оператордың жалғыз қозғалмайтын нүктесінің бар екендігі көрсетілді. Ұсынылып отырған әдістеме үзіліс сәттері тұрақты және айнымалы импульстік дифференциалдық теңдеулер, функционалдық дифференциалдық теңдеулер және басқару жүйелерін зерттеуде тиімді қолданыла алады.

Әдебиеттер тізімі

1. Farkas M. Periodic Motions. — New York: Springer-Verlag, 1994. — 577 p. — DOI: [10.1007/978-1-4757-4211-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4211-4)
2. Burton T. A. Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. — Orlando: Academic Press, 1985. — 348 p.
3. Bohl P. Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie. // Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 1906. — Bd. 131. — S. 268–321.
4. Bohr H.A. Almost Periodic Functions. — New York : Chelsea Publishing Company, 1947. — 114 p.
5. Bogolyubov N.N. On Some Arithmetic Properties of Almost Periods. — Kiev: Akademiya Nauk Ukrainian SSR, 1939. — P. 185-205.
6. Besicovitch A.: Almost Periodic Functions. Dover: Cambridge, UK, 1954. — XIII, 180 p.
7. Sell G. Topological Dynamics and Ordinary Differential Equations. — London: Van Nostrand Reinhold Company, 1971. — 199 p.
8. Poincaré H. Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste; Gauthier-Villars: Paris, France, 1892. Volume I–II.
9. Poincaré H. Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste; Gauthier-Villars: Paris, France, 1899. Volume III. — 414 p.
10. Birkhoff G.D. Dynamical Systems. — USA: American Mathematical Society, 1927. 305 p.
11. Akhmet M., Tleubergenova M., Zhamanshin A. Poincare chaos for a hyperbolic quasilinear system. Miskolc Mathematical Notes. — 2019. — Vol. 20, No. 1. — P. 33–44. DOI: [10.18514/MMN.2019.2826](https://doi.org/10.18514/MMN.2019.2826)
12. Akhmet M., Tleubergenova M., Zhamanshin A.: Quasilinear differential equations with strongly unpredictable solutions. Carpathian Journal of Mathematics. — 2020. — Vol. 36, No. 3. — P. 341–349. DOI: [10.37193/CJM.2020.03.02](https://doi.org/10.37193/CJM.2020.03.02)
13. Akhmet M., Çiңçin D.A., Tleubergenova M., Nugayeva Z., Unpredictable oscillations for Hopfield-type neural networks with delayed and advanced arguments. Mathematics. — 2021. — Vol. 9, No. 5. — Article 571. — 19 p. <https://doi.org/10.3390/math9050571>
14. Akhmet M., Tleubergenova M., Nugayeva Z., Unpredictable Solutions of Impulsive Quasi-Linear Systems, Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. — 2022. Vol. 11, No. 1. — P. 73–89. DOI: [10.5890/DNC.2022.03.006](https://doi.org/10.5890/DNC.2022.03.006)
15. Akhmet M., Tleubergenova M., Zhamanshin A., Nugayeva Z., Artificial Neural Networks: Alpha Unpredictability and Chaotic Dynamics. — Cham: Springer, 2025. — XIII, 251 p. DOI:

[10.1007/978-3-031-68966-6](https://doi.org/10.1007/978-3-031-68966-6)

16. Gopalsamy K., Stability and Oscillation in Delay Differential Equations of Population Dynamics. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. — XII, 501 p. — DOI: [10.1007/978-94-015-7920-9](https://doi.org/10.1007/978-94-015-7920-9) Akhmet, M. Domain Structured Dynamics: Unpredictability, Chaos, Randomness, Fractals, Differential Equations and Neural Networks. — Bristol: IOP Publishing, 2021. — 202 p. DOI [10.1088/978-0-7503-3507-2](https://doi.org/10.1088/978-0-7503-3507-2).

17. Li X. and Wang Z. Global attractivity for a logistic equation with piecewise constant arguments. Differences and differential equations. — Providence, RI: American Mathematical Society, 2004. — Vol. 42. — P. 215–222.

18. Busenberg S., Cooke K. L. / Models of vertically transmitted diseases with sequential continuous dynamics // Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences, — New York: Academic Press, 1982. — P. 179–187. DOI: [10.1016/B978-0-12-434170-8.50028-5](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-434170-8.50028-5).

19. Akhmet M.U., Yilmaz E.: Neural Networks with Discontinuous/Impact Activations. — New York: Springer, 2014. — XI, 168 p. DOI: [10.1007/978-1-4614-8566-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8566-7).

20. Akhmet M.U.: Stability of differential equations with piecewise constant arguments of generalized type. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. — 2008. — Vol. 68, no. 4. — P. 794–803. DOI: [10.1016/j.na.2006.11.037](https://doi.org/10.1016/j.na.2006.11.037).

21. Akhmet M.: Nonlinear Hybrid Continuous/Discrete-Time Models. — Paris: Atlantis Press, 2011. — 216 p. DOI: [10.2991/978-94-91216-40-8](https://doi.org/10.2991/978-94-91216-40-8)

22. Akhmet M.U.: Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument of generalized type. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. — 2007. — Vol. 66, no. 2. — P. 367–383. DOI: [10.1016/j.na.2005.11.032](https://doi.org/10.1016/j.na.2005.11.032)

23. Akhmet M., Tleubergenova M., Seilova R., Nugayeva Z.: Poisson stability in symmetrical impulsive shunting inhibitory cellular neural networks with generalized piecewise constant argument. Symmetry. — 2022. — Vol. 14, no. 9. 1754. —22p. DOI: [10.3390/sym14091754](https://doi.org/10.3390/sym14091754).

24. Akhmet M., Tleubergenova M., Zhamanshin A.: Modulo periodic Poisson stable solutions of quasilinear differential equations. Entropy. — 2021. — Vol. 23, No. 11. — Article 1535. — 17 p. DOI: [10.3390/e23111535](https://doi.org/10.3390/e23111535).

25. Akhmet M., Tleubergenova M., Nugayeva Z. Unpredictable and Poisson stable oscillations of inertial neural networks with generalized piecewise constant argument. Entropy. — 2023. — Vol. 25, No. 4. — Article 620. — 22 p. DOI: [10.3390/e25040620](https://doi.org/10.3390/e25040620)

26. Akhmet M. Principles of Discontinuous Dynamical Systems. Springer. — New York: Springer, 2010. — XI, 176 p. DOI: [10.1007/978-1-4419-6581-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6581-3).

27. Driver R.D. Ordinary and Delay Differential Equations. Springer Science Business Media. — New York: Springer, 2012. — 501 p. DOI: [10.1007/978-1-4684-9467-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9467-9).

28. Hartman P., Ordinary differential equations. — Boston: Birkhäuser, 1982. — XIV, 612 p. DOI: [10.1007/978-1-4612-9732-5](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9732-5)

References

1. Farkas M. Periodic Motions. — New York: Springer-Verlag, 1994. — 577 p. — DOI: [10.1007/978-1-4757-4211-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4211-4)

2. Burton T. A. Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations. — Orlando: Academic Press, 1985. — 348 p.

3. Bohl P. Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie. // Journal für die reine und angewandte Mathematik. — 1906. — Bd. 131. — S. 268–321.

4. Bohr H.A. Almost Periodic Functions. — New York : Chelsea Publishing Company, 1947. —114 p.

5. Bogolyubov N.N. On Some Arithmetic Properties of Almost Periods. — Kiev: Akademiya Nauk Ukrainian SSR, 1939. — P. 185-205.

6. Besicovitch A.: Almost Periodic Functions. Dover: Cambridge, UK, 1954. — XIII, 180 p.

7. Sell G. Topological Dynamics and Ordinary Differential Equations. — London: Van Nostrand Reinhold Company, 1971. — 199 p.

8. Poincaré H. *Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste*; Gauthier-Villars: Paris, France, 1892. Volume I–II.
9. Poincaré H. *Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste*; Gauthier-Villars: Paris, France, 1899. Volume III. — 414 p.
10. Birkhoff G.D. *Dynamical Systems*. — USA: American Mathematical Society, 1927. 305 p.
11. Akhmet M., Tleubergenova M., Zhamanshin A. Poincare chaos for a hyperbolic quasilinear system. *Miskolc Mathematical Notes*. — 2019. — Vol. 20, No. 1. — P. 33–44. DOI: [10.18514/MMN.2019.2826](https://doi.org/10.18514/MMN.2019.2826)
12. Akhmet M., Tleubergenova M., Zhamanshin A.: Quasilinear differential equations with strongly unpredictable solutions. *Carpathian Journal of Mathematics*. — 2020. — Vol. 36, No. 3. — P. 341–349. DOI: [10.37193/CJM.2020.03.02](https://doi.org/10.37193/CJM.2020.03.02)
13. Akhmet M., Çiңçin D.A., Tleubergenova M., Nugayeva Z., Unpredictable oscillations for Hopfield-type neural networks with delayed and advanced arguments. *Mathematics*. — 2021. — Vol. 9, No. 5. — Article 571. — 19 p. <https://doi.org/10.3390/math9050571>
14. Akhmet M., Tleubergenova M., Nugayeva Z., Unpredictable Solutions of Impulsive Quasi-Linear Systems, Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. — 2022. Vol. 11, No. 1. — P. 73–89. DOI: [10.5890/DNC.2022.03.006](https://doi.org/10.5890/DNC.2022.03.006)
15. Akhmet M., Tleubergenova M., Zhamanshin A., Nugayeva Z., Artificial Neural Networks: Alpha Unpredictability and Chaotic Dynamics. — Cham: Springer, 2025. — XIII, 251 p. DOI: [10.1007/978-3-031-68966-6](https://doi.org/10.1007/978-3-031-68966-6)
16. Gopalsamy K., *Stability and Oscillation in Delay Differential Equations of Population Dynamics*. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992. — XII, 501 p. — DOI: [10.1007/978-94-015-7920-9](https://doi.org/10.1007/978-94-015-7920-9) Akhmet, M. *Domain Structured Dynamics: Unpredictability, Chaos, Randomness, Fractals, Differential Equations and Neural Networks*. — Bristol: IOP Publishing, 2021. — 202 p. DOI [10.1088/978-0-7503-3507-2](https://doi.org/10.1088/978-0-7503-3507-2).
17. Li X. and Wang Z. Global attractivity for a logistic equation with piecewise constant arguments. *Differences and differential equations*. — Providence, RI: American Mathematical Society, 2004. — Vol. 42. — P. 215–222.
18. Busenberg S., Cooke K. L. / *Models of vertically transmitted diseases with sequential continuous dynamics // Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences*, — New York: Academic Press, 1982. — P. 179–187. DOI: [10.1016/B978-0-12-434170-8.50028-5](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-434170-8.50028-5).
19. Akhmet M.U., Yilmaz E.: *Neural Networks with Discontinuous/Impact Activations*. — New York: Springer, 2014. — XI, 168 p. DOI: [10.1007/978-1-4614-8566-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8566-7).
20. Akhmet M.U.: Stability of differential equations with piecewise constant arguments of generalized type. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. — 2008. — Vol. 68, no. 4. — P. 794–803. DOI: [10.1016/j.na.2006.11.037](https://doi.org/10.1016/j.na.2006.11.037).
21. Akhmet M.: *Nonlinear Hybrid Continuous/Discrete-Time Models*. — Paris: Atlantis Press, 2011. — 216 p. DOI: [10.2991/978-94-91216-40-8](https://doi.org/10.2991/978-94-91216-40-8)
22. Akhmet M.U.: Integral manifolds of differential equations with piecewise constant argument of generalized type. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. — 2007. — Vol. 66, no. 2. — P. 367–383. DOI: [10.1016/j.na.2005.11.032](https://doi.org/10.1016/j.na.2005.11.032)
23. Akhmet M., Tleubergenova M., Seilova R., Nugayeva Z.: Poisson stability in symmetrical impulsive shunting inhibitory cellular neural networks with generalized piecewise constant argument. *Symmetry*. — 2022. — Vol. 14, no. 9. 1754. — 22p. DOI: [10.3390/sym14091754](https://doi.org/10.3390/sym14091754).
24. Akhmet M., Tleubergenova M., Zhamanshin A.: Modulo periodic Poisson stable solutions of quasilinear differential equations. *Entropy*. — 2021. — Vol. 23, No. 11. — Article 1535. — 17 p. DOI: [10.3390/e23111535](https://doi.org/10.3390/e23111535).
25. Akhmet M., Tleubergenova M., Nugayeva Z. Unpredictable and Poisson stable oscillations of inertial neural networks with generalized piecewise constant argument. *Entropy*. — 2023. — Vol. 25, No. 4. — Article 620. — 22 p. DOI: [10.3390/e25040620](https://doi.org/10.3390/e25040620)
26. Akhmet M. *Principles of Discontinuous Dynamical Systems*. Springer. — New York: Springer, 2010. — XI, 176 p. DOI: [10.1007/978-1-4419-6581-3](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6581-3).

27. Driver R.D. Ordinary and Delay Differential Equations. Springer Science Business Media. — New York: Springer, 2012. — 501 p. DOI: [10.1007/978-1-4684-9467-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9467-9).

28. Hartman P., Ordinary differential equations. — Boston: Birkhäuser, 1982. — XIV, 612 p. DOI: [10.1007/978-1-4612-9732-5](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9732-5)

УСТОЙЧИВЫЕ ПО ПУАССОНУ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ АРГУМЕНТОМ

ТЛЕУБЕРГЕНОВА М.А. , ТУЛЕГЕНОВА А.Е. 

Тлеубергенова Мадина Альмухановна — Кандидат физико-математических наук, доцент, Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова, г. Ақтөбе, Казахстан

E-mail: mtleubergenova@zhubanov.edu.kz, <https://orcid.org/0000-0002-5572-2305>

*Тулегенова Алия Ерболқызы — Магистрант, Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова, г. Ақтөбе, Казахстан

E-mail: a.e.tabildi00@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0000-6438-5833>

Аннотация. В данной статье исследуются вопросы существования и единственности устойчивых по Пуассону решений квазилинейной системы дифференциальных уравнений с кусочно-постоянным аргументом. Наличие кусочно-постоянного аргумента определяет специфику структуры решений рассматриваемой системы: решение является непрерывным, тогда как его производная имеет разрывы в точках переключения аргумента. Цель исследования состоит в установлении достаточных условий, обеспечивающих существование, единственность и устойчивость соответствующего устойчивого по Пуассону решения на основе свойств внешнего воздействия и кусочно-постоянного аргумента. В работе вводится понятие устойчивости по Пуассону для кусочно-постоянного аргумента и исследуются свойства связанных с ним последовательностей сдвигов на компактных промежутках. Полученные свойства применяются при анализе решений рассматриваемой квазилинейной дифференциальной системы. Для доказательства существования устойчивого по Пуассону решения используется метод вложенных интервалов, позволяющий посредством выбора подходящих временных сдвигов и соответствующих промежутков установить необходимые свойства компактности функций и решений. С учётом устойчивости линейной части системы, а также условий, налагаемых на нелинейную часть и функцию внешнего воздействия, сформулированы достаточные условия существования и единственности устойчивого по Пуассону решения. Полученные результаты описывают взаимосвязь между свойствами устойчивости по Пуассону кусочно-постоянного аргумента и динамикой решений квазилинейных дифференциальных уравнений, а также расширяют теоретические основы исследования сложных повторяющихся движений.

Ключевые слова: устойчивость по Пуассону, кусочно-постоянный аргумент, квазилинейное дифференциальное уравнение, метод включенных интервалов, устойчивое по Пуассону решение, экспоненциальная устойчивость.

POISSON STABLE SOLUTIONS OF QUASILINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PIECEWISE CONSTANT ARGUMENT

TLEUBERGENOVA M.A. , TULEGENOVA A.E. 

Tleubergenova Madina Almukhanovna — Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, K. Zhubanov Aktobe regional university, Aktobe, Kazakhstan

E-mail: mtleubergenova@zhubanov.edu.kz, <https://orcid.org/0000-0002-5572-2305>

*Tulegenova Aliya Erbolqyzy — Master's student, K. Zhubanov Aktobe regional university, Aktobe, Kazakhstan

E-mail: a.e.tabildi00@gmail.com, <https://orcid.org/0009-0000-6438-5833>

Abstract. The article investigates the existence and uniqueness of Poisson stable solutions to a system of quasilinear differential equations with a piecewise constant argument. The presence of a piecewise constant argument determines the specific structure of the solutions: although the solution itself is continuous, its derivative has discontinuities at the switching points of the argument. The principal objective of the study is to establish sufficient conditions for the Poisson stability of the corresponding solution based on the Poisson stability properties of the external forcing function and the piecewise constant argument. First, the concept of Poisson stability for a piecewise constant argument is introduced, and the properties of its sequences of shifts on compact intervals are examined. These properties are subsequently applied to the analysis of solutions to the quasilinear differential system. The included intervals method is employed to prove the existence of a Poisson stable solution. By selecting appropriate time shifts and corresponding

intervals, this method makes it possible to establish the required compactness properties of the functions and solutions under consideration. Taking into account the stability of the linear part of the system, together with the conditions imposed on the nonlinear term and the external input function, sufficient conditions for the existence and uniqueness of a Poisson stable solution are formulated. The results obtained reveal the relationship between the Poisson stability properties of the piecewise-constant argument and the dynamics of solutions to quasilinear differential equations, thereby extending the theoretical foundations for the investigation of complex recurrent motions.

Key words: Poisson stability, piecewise-constant argument, quasilinear differential equation, the method of included intervals, Poisson stable solution, exponential stability.