ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ҒЫЛЫМДАРЫ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

МРНТИ 27.29.15

НЕПРЕДСКАЗУЕМОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. ЖАМАНШИН [0000-0003-4878-4927]*, **И. САФИУЛЛИНА** [0000-0003-0395-497X], **Р. СЕЙЛОВА** [0000-0002-4666-8001]

Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова, Актобе, Казахстан

*e-mail: arguaktobe@gmail.com

Аннотация. В данной статье исследуется непредсказуемое решение системы квазилинейных дифференциальных уравнений. Доказано существование и единственность асимптотически устойчивого непредсказуемого решения. Приведен численный пример с графическими иллюстрациями, подтверждающий полученные теоретические результаты.

Ключевые слова: квазилинейные дифференциальные уравнения, непредсказуемая функция, устойчивость по Пуассону, асимптотическая устойчивость.

Введение. Несколько лет назад профессор М. Ахмет со своими коллегами ввели понятия непредсказуемых точек и непредсказуемых функций [1,2], и тем самым значительно расширили границы классической теории динамических систем, основанной А. Пуанкаре [3] и Дж. Биркгофом [4]. Непредсказуемая точка является модернизированной устойчивой по Пуассону точкой. Они доказали, что квазиминимальное множество является хаотическим, если устойчивая по Пуассону точка допускает свойство непредсказуемости. Таким образом, наличие хаоса в динамической системе определяется присутствием только одной точки - непредсказуемой. Непредсказуемые функции были определены как непредсказуемые точки в динамической системе Бебутова с той лишь разницей, что вместо метрического пространства используется топология сходимости на компактных множествах вещественной оси. Использование такой сходимости позволяет значительно упростить задачу доказательства существования непредсказуемых решений для дифференциальных уравнений. И можно полностью оставаться в области теории дифференциальных уравнений, не упоминая исходные или родственные результаты в теории динамических систем или хаоса. На диаграмме показаны множества функций.

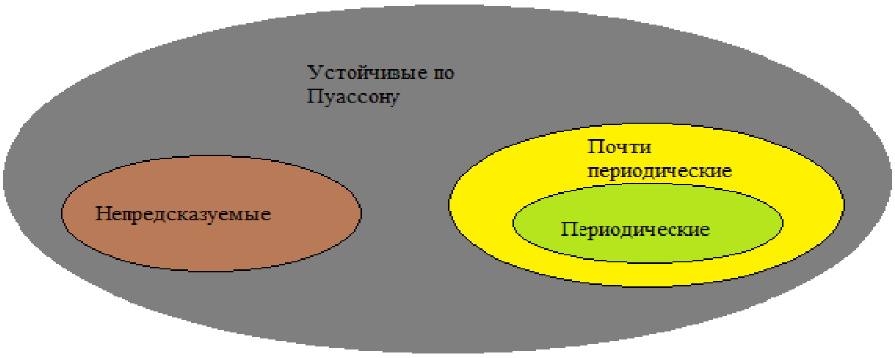

Рисунок 1. **Множества функций**

Предварительные сведения. В данной статье будет использоваться норма $\|u\|_1 = sup_{t\in \mathbb{R}}\|u(t)\|$, где $\|u\| = \max\limits_{1\le i\le p}|u_i|$, $u = (u_1, \dots, u_p), u_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, p$. Соответственно, для квадратной матрицы $\{a_{ij}\}, i, j = 1,2, \dots, p$, будет использована норма $\|\mathrm{A}\| = \max\limits_{i=1,\dots,p} \sum_{j=1}^{p}|a_{ij}|$.

Приведем основные определения.

Определение 1. [5] Непрерывная и ограниченная функция $\vartheta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ положительно устойчива по Пуассону, если существует последовательность $\{t_n\}, t_n \to \infty$ при $n \to \infty$ такая, что $\|\vartheta(t + t_n) - \vartheta(t)\| \to 0$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R}$.

Определение 2. [1] Равномерно непрерывная и ограниченная функция $\vartheta: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ называется непредсказуемой, если существуют положительные числа ϵ_0, δ и последовательности $\{t_n\}, \{u_n\}, n \in \mathbb{N}$, которые стремятся к бесконечности, такие что $\|\vartheta(t + t_n) - \vartheta(t)\| \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно на ограниченных вещественных интервалах и $\|\vartheta(t + t_n) - \vartheta(t)\| \ge \epsilon_0$ для каждого $t \in [u_n - \delta, u_n + \delta]$.

Существование последовательности t_n называют *устойчивостью по Пуассону*, а существование последовательности u_n, и постоянных ϵ_0, δ *свойством непредсказуемости.*

Определение 3. [6] Непрерывная и ограниченная функция $f(t, x): \mathbb{R} \times G \to \mathbb{R}^p, f = (f_1, f_2, \dots, f_p)$, где $G \times \mathbb{R}^p$ ограниченная область, называется непредсказуемой по t если оно непрерывно по t и существуют положительные числа ϵ_0, σ и последовательности t_n, u_n, которые стремятся к бесконечности, такие что $\sup\limits_{G} \|f(t + t_n, x) - f(t, x)\| \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно в компактах из $\mathbb{R}$ и $\inf\limits_{G} \|f(t + t_n, x) - f(t, x)\| \ge \epsilon_0$ для $t \epsilon [u_n - \sigma, u_n + \sigma]$ и $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим систему квазилинейных дифференциальных уравнений

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x), \qquad (1)$$

где $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^p$, p - фиксированное натуральное число, действительные части собственных значений постоянной матрицы $A \in \mathbb{R}^{p\times p}$ -отрицательные, $f: \mathbb{R} \times G \to \mathbb{R}^p, f =$

$(f_1, f_2, \dots, f_p), G = \{x \in \mathbb{R}^p, \|x\| < H\}, H$-положительное число. Известно, что найдутся числа $K \geq 1$ и $\gamma > 0$ такие, что $\|e^{At}\| \leq Ke^{-\gamma t}$ для всех $t \geq 0$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

(C1) функция $f(t, x)$ непредсказуема в смысле определения 3;

(C2) существует положительная константа L, такая, что функция $f(t, x)$ удовлетворяет неравенству $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$ для всех $t \in \mathbb{R}, x_1, x_2 \in G$;

(C3) $\gamma > \frac{KM}{H}$;

(C4) $\gamma > KL$.

Из Определения 3 следует, что существует положительное число M такое, что

$$\sup_{\mathbb{R} \epsilon G} \|f(t, x)\| = M < \infty.$$

Обозначим через U пространство всех равномерно непрерывных функций $\psi(t) = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p)$, $\psi \epsilon \mathbb{R}, i = 1,2, \dots, p$, такие что $\|\psi\|_1 < H$, и $\psi(t + t_n) \to \psi(t)$ при $n \to \infty$ равномерно на каждом замкнутом и ограниченном интервале вещественной оси, где последовательность t_n, такая же, как для функции $f(t, x)$ в системе (1).

Согласно теории дифференциальных уравнений [7], функция $\omega(t) = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p)$, ограниченная на всей вещественной оси, является решением системы (1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)} f(s, \omega(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Лемма 1. Если условия (C1) - (C4) выполнены, тогда система (1) имеет единственное ограниченное решение $\omega(t)$.

Доказательство. Введем оператор Π на U такой, что

$$\Pi\psi(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-s)} f(s, \psi(s))\, ds, t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Зафиксируем произвольную функцию $\psi(t)$, которая принадлежит пространству U. Тогда получаем, что

$$\|\Pi\psi(t)\| \leq \int_{-\infty}^{t} \|e^{A(t-s)}\| \, \|f(s, \psi(s))\| ds \leq \frac{KM}{\gamma},$$

для всех $t \in \mathbb{R}$. Из условия (C3) следует, что $\|\Pi\psi\|_1 < H$.

Зафиксируем произвольное положительное число ε и замкнутый интервал $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$ из действительной оси. Мы покажем, что для достаточно больших n последовательность $\|\Pi\psi(t + t_n) \to \Pi\psi(t)\|$ на $[a, b]$. Выберем $c < a$ и $\xi > 0$ удовлетворяющие

$$\frac{2KM}{\gamma} e^{-\gamma(a-c)} < \frac{\epsilon}{2} \tag{4}$$

и

$$\frac{K}{\gamma} \xi (L + 1)\left[1 - e^{-\gamma(b-c)}\right] < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5}$$

Рассмотрим достаточно большое n такое, что $\|f(t+t_n,x)-f(t,x)\|<\xi$ и $\|\psi(t+t_n)-\psi(t)\|<\xi$ для всех $t\in[c,b]$ и $x\in G$. Тогда неравенство

$$\|\Pi\psi(t+t_n)-\Pi\psi(t)\|$$
$$\leq \int_{-\infty}^{c}\|e^{A(t-s)}\|\|f(s+t_n,\psi(s+t_n))-f(s,\psi(s))\|ds$$
$$+\int_{c}^{t}\|e^{A(t-s)}\|\|f(s+t_n,\psi(s+t_n))-f(s,\psi(s))\|ds$$
$$\leq \int_{-\infty}^{c}2KMe^{-\gamma(a-s)}ds+\int_{c}^{t}\xi(L+1)Ke^{-\gamma(t-s)}ds\leq\frac{2}{\gamma}KMe^{-\gamma(a-c)}$$
$$+\frac{K}{\gamma}\xi(L+1)\left[1-e^{-\gamma(b-c)}\right] \qquad (6)$$

верно для всех $t\in[a,b]$.

Из неравенств (4) и (5) следует, что $\|\Pi\psi(t+t_n)-\Pi\psi(t)\|<\varepsilon$ при $t\in[a,b]$, и следовательно, $\Pi\psi(t+t_n)\to\Pi\psi(t)$ равномерно при $n\to\infty$ в каждом замкнутом и ограниченном интервале из $\mathbb{R}$.

Не трудно проверить, что $\Pi\psi(t)$ является равномерно непрерывной функцией. Таким образом, множество U является инвариантным для оператора Π.

Покажем, что оператор $\Pi: U\to U$ является сжимающим. Пусть $u(t)$ и $v(t)$ принадлежат пространству U. Тогда мы получим, что

$$\|\Pi u(t)-\Pi v(t)\|\leq\int_{-\infty}^{t}\|e^{A(t-s)}\|\|f(s,u(s))-f(s,v(s))\|\,ds$$
$$\leq\int_{-\infty}^{t}Ke^{-\gamma(t-s)}\,L\|u(s)-v(s)\|ds\leq\frac{KL}{\gamma}\|u(t)-v(t)\|_1$$

для всех $t\in\mathbb{R}$. Поэтому, неравенство $\|\Pi u-\Pi v\|_1\leq\frac{KL}{\gamma}\|u-v\|_1$ выполняется, и в соответствии с условием (C4) оператор $\Pi: U\to U$ является сжимающим.

Теперь покажем полноту пространства U. Рассмотрим фундаментальную последовательность $\phi_k(t)$ в U, которая сходится к предельной функции $\phi(t)$ в $\mathbb{R}$. Зафиксируем замкнутый и ограниченный интервал $I\subset\mathbb{R}$. Мы имеем

$$\|\phi(t+t_p)-\phi(t)\|<\|\phi(t+t_n)-\phi_k(t+t_n)\|+$$
$$+\|\phi_k(t+t_n)-\phi_k(t)\|+\|\phi_k(t)-\phi(t)\|. \qquad (7)$$

Теперь, можно взять достаточно большие n и k, чтобы каждый член в правой части (7) был меньше, чем $\frac{\epsilon}{3}$ для произвольно малого ϵ и $t\in I$. Тогда из неравенства (7) получим, что

$\|\phi(t+t_n)-\phi(t)\|<\epsilon$ в I. То есть последовательность $\phi(t+t_n)$ равномерно сходится к $\phi(t)$ в I.

По принципу сжатых отображений существует единственная неподвижная точка $\omega(t) \in U$ оператора П, которая является ограниченным решением системы (1). Лемма доказана. □

Теорема 1. Если выполняются условия (C1) - (C4), то система (1) имеет единственное асимптотически устойчивое непредсказуемое решение.

Доказательство. Согласно Лемме 1, система (1) имеет единственное решение $\omega(t) \in U$. Остается доказать, что решение $\omega(t)$ удовлетворяет свойству непредсказуемости. То есть существует последовательность $\{\bar{u}_n\}, \bar{u}_n \to \infty$ при $n \to \infty$, и положительные числа $\bar{\varepsilon}_0, \bar{\delta}$, такие что $||\omega(t+t_n)-\omega(t_n)|| \geq \bar{\varepsilon}_0$ при $t \in [\bar{u}_n-\bar{\delta}, \bar{u}_n+\bar{\delta}]$.

Найдутся натуральные числа l, k, положительное число κ и $j=1,\dots,p$, такие что:

$$\kappa < \sigma, \tag{8}$$

$$\kappa(1/2-(\frac{1}{l}+\frac{2}{\kappa})(L+||A||)) > \frac{3}{2l}, \tag{9}$$

$$||\omega(t+s)-\omega(t)|| < \bar{\varepsilon}_0\, min\,(\frac{1}{k}+\frac{2}{4l}), t \in \mathbb{R}, |s|<\kappa. \tag{10}$$

Зафиксируем числа κ, l, k и произвольное $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $\Delta = |\omega(u_n+t_n)-\omega(t)|$ и рассмотрим два случая $(i)\ \Delta \geq \frac{\epsilon_0}{l}, (ii)\ \Delta < \frac{\epsilon_0}{l}$.

(i) Из неравенства (10) получим:

$$\begin{aligned}\left||\omega(t+t_n)-\omega(t)|\right| &\geq \left||\omega(t_n+u_n)-\omega(u_n)|\right| - \left||\omega(u_n)-\omega(t)|\right| - \\ &-||\omega(t+t_n)-\omega(t_n+u_n)|| \geq \frac{\varepsilon_0}{l}-\frac{\varepsilon_0}{4l}-\frac{\varepsilon_0}{4l}=\frac{\varepsilon}{2l},\end{aligned} \tag{11}$$

при $t \in [u_n-\kappa, u_n+\kappa]$.

(ii) В данном случае, из неравенства (10) следует, что

$$\left||\omega(t+t_n)-\omega(t)|\right| < \frac{\varepsilon_0}{l}+\frac{\varepsilon_0}{k}+\frac{\varepsilon_0}{k}=\varepsilon_0(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}), \tag{12}$$

если $t \in [u_n, u_n+\kappa]$.

Справедливо следующее равенство

$$\omega(t_n+t)-\omega(t)=\omega(u_n+t_n)-\omega(u_n)+\int_{u_n}^{t} A[\omega(s+t_n)-\omega(s)]ds + \int_{u_n}^{t}\left[f\left(t_n+s,\omega(s+t_n)\right)-f\left(s,\omega(t_n+s)\right)\right]ds, t \in \mathbb{R}.$$

Тогда из неравенств (8) - (10) и (12) получим:

$$\left|\omega_j(t+t_n)-\omega_j(t)\right| \geq \int_{u_n}^{t}\left|g_j(s+t_n)-g_j(s)\right|ds -$$

$$-\int_{u_n}^{t} |\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\,[\omega_i(s+t_n)-\omega_i(s)]|ds - \int_{u_n}^{t} \left|f_i\big(\omega(s+t_n)\big)-f_i\big(\omega(s)\big)\right|ds -$$

$$-|\omega_j(t_n+u_n)-\omega_j(u_n)| \geq \frac{\kappa}{2}\varepsilon_0 - \kappa||A||\varepsilon_0(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}) - \kappa L\varepsilon_0(\frac{1}{l}+\frac{2}{k}) - \frac{\varepsilon_0}{l} \geq \frac{\varepsilon_0}{2l},$$

при $t \in [u_n+\kappa/2, u_n+\kappa]$. Таким образом, $||\omega(t+t_n)-\omega(t)|| \geq \bar{\varepsilon}_0 = \frac{\varepsilon_0}{2l}$ для всех t из интервала $[\bar{u}_n-\bar{\delta}, \bar{u}_n+\bar{\delta}]$, где $\bar{u}_n = u_n + \frac{3\kappa}{4}, \bar{\delta} = \frac{\kappa}{4}, n \in \mathbb{N}$. Следовательно, ограниченное решение $\omega(t)$ – непредсказуемая. Асимптотическую устойчивость решения $\omega(t)$ можно проверить как устойчивость ограниченного решения [8]. Теорема доказана. □

Следующие леммы мы используем при построении примеров квазилинейных систем с непредсказуемыми решениями.

Лемма 2. Если функция $\phi(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непредсказуема, то функция $\phi(t)+C$, где C-константа, также непредсказуема.

Доказательство. Существуют положительные числа ϵ_0, δ и последовательности $\{t_n\}, \{u_n\}$, которые стремятся к бесконечности, такие что $\|\phi(t+t_n)-\phi(t)\| \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R}$ и $\|\phi(t+t_n)-\phi(t)\| \geq \epsilon_0$ для каждого $t \in [u_n-\delta, u_n+\delta]$. Обозначим $\omega(t)=\phi(t)+C$. Тогда мы имеем, что $\|\omega(t+t_n)-\omega(t)\| = \|\phi(t+t_n)-\phi(t)\| \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R}$ и $\|\omega(t+t_n)-\omega(t)\| = \|\phi(t+t_n)-\phi(t)\| \geq \epsilon_0$ для каждого $t \in [u_n-\delta, u_n+\delta]$ и $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, функция $\phi(t)+C$ является непредсказуемым.

Лемма 3. Предположим, что $\phi(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ является непредсказуемой функцией. Тогда функция $\phi^3(t)$ непредсказуема.

Доказательство. Можно найти числа $\epsilon_0 > 0, \delta > 0$ и последовательности $\{t_n\}, \{u_n\}$ которые стремятся к бесконечности, такие что $\|\phi(t+t_n)-\phi(t)\| \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R}$ и $\|\phi(t+t_n)-\phi(t)\| \geq \epsilon_0$ для каждого $t \in [u_n-\delta, u_n+\delta]$ и $n \in \mathbb{N}$. Нетрудно проверить, что $\|\phi^3(t+t_n)-\phi^3(t)\| \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{R}$, поскольку это следует из равномерной непрерывности кубической функции на компактном множестве.

Зафиксируем натуральное число n. Покажем, что для $t \in [u_n-\delta, u_n+\delta]$ из неравенства $\|\phi(t+t_n)-\phi(t)\| \geq \epsilon_0$ следует, что $\|\phi^3(t+t_n)-\phi^3(t)\| \geq \epsilon_0^3/4$.

Имеем: $|\phi^3(t+t_n)-\phi^3(t)| = \frac{1}{2}|\phi(t+t_n)-\phi(t)|[\phi^2(t+t_n)+\phi^2(t)+(\phi(t+t_n)+\phi(t))^2] \geq \frac{1}{2}(\phi^2(t+t_n)+\phi^2(t))\epsilon_0$.

Рассмотрим функцию $F(a,b) = a^2 + b^2$ для $|a-b| \geq \epsilon_0$. Функция F достигает своего минимума в точках (a,b) при $|a| = |b| = \epsilon_0/2$. Следовательно, $\|\phi^3(t+t_n) - \phi^3(t)\| \geq \epsilon_0^3/4$ для $t \in [u_n - \delta, u_n + \delta]$.

Пример. Рассмотрим дискретное логистическое уравнение

$$\lambda_{i+1} = \mu(1-\lambda_i), \tag{13}$$

где $i \in \mathbb{Z}$. При $\mu \in [0,4]$ все решения логистического уравнения принадлежат интервалу [0,1]. В работе [6], было доказано, что при $\mu \in [3+\sqrt{\frac{2}{3}}, 4]$ уравнение имеет непредсказуемую последовательность решений ψ_i. Непредсказуемая функция $\Theta(t)$ была построена как решение дифференциального уравнения $\Theta'(\mathrm{t}) = -2.5\Theta(\mathrm{t}) + \Omega(\mathrm{t})$, где $\Omega(t)$ является кусочно-постоянной функцией, определяемой как $\Omega(t) = \psi_i$ для $t \in [i, i+1), i \in \mathbb{Z}$. Кроме того, функция $g(t,x) = (arctg(x) + 2)\Theta(\mathrm{t})$ является непредсказуемой по t функцией двух переменных.

Рассмотрим систему квазилинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} x_1' &= -4x_1 - x_2 + x_3 - 0{,}2g_1(t,x_2), \\ x_2' &= -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 0{,}4g_2(t,x_3), \\ x_3' &= -x_1 + x_2 - 2x_3 - 0.3g_3(t,x_2), \end{aligned} \tag{14}$$

где $g_1(t,x) = (arctg(x_2) + 2)\Theta(t), g_2(t,x) = (arctg(x_3) - 2)\Theta(\mathrm{t}), g_3(t,x) = -(arctg(x_2) + 1)\Theta(\mathrm{t})$ непредсказуемые по t функции. Собственные значения матрицы коэффициентов системы (14) равны -1, -3 и -5. Условия (C2-C4) выполняется, с $K = 1.5, \gamma = -1, M = 1.43, L = 0.2$ и $H = 2.3$. Согласно Теореме 1, система (14) имеет непредсказуемое решение. На Рисунках 1 и 2, показаны решение, $x(t)$, которое асимптотически стремится к непредсказуемому решению системы (14).

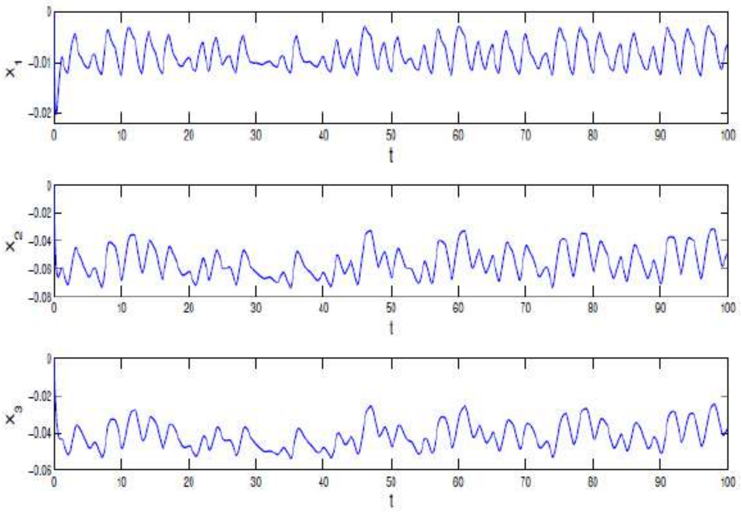

Рисунок 2. **Координаты решения $x(t)$, с начальными значениями $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$**

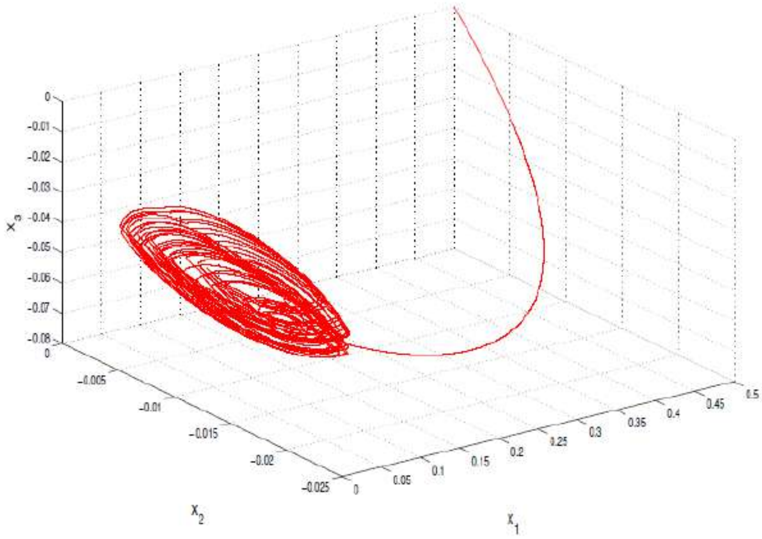

Рисунок 3. **График решения $x(t)$ системы (15).**

Работа над статьей выполнена при поддержке Комитета науки Министерства образования и науки РК, проект № AP09258737.

Список литературы:

1. Akhmet M., Fen M.O., Unpredictable points and chaos, / Akhmet M., Fen M.O. // Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation, - 2016, 40, 1-5.

2. Akhmet M., Fen M.O., Poincaré chaos and unpredictable functions, / Akhmet M., Fen M.O. // Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation, - 2017, 41, 85-94.

3. Poincaré H., (1892), Les methodes nouvelles de la mecanique celeste, // Poincaré H. / Paris: Gauthier-Villars, -1892, Vol. 1, 2.

4. Birkhoff G.D., Dynamical Systems. / Birkhoff G.D. // – Providence, RI: American Mathematical Society, - 1927, 319 p.

5. Sell G.R., Topological Dynamics and Ordinary Differential Equations. / Sell G.R // London, UK: Van Nostrand ReinholdCompany - 1971.

6. Akhmet M., Tleubergenova M., Zhamanshin A., Quasilinear differential equations with strongly unpredictable solutions. / Akhmet M., Tleubergenova M., Zhamanshin A. // Carpathian journal of mathematics, -2020, vol. 36. - № 3. – P. 341-349.

7. Немыцкий В.В., Степанов В.В., Качественная теория дифференциальных уравнений, / Немыцкий В.В., Степанов В.В. // Государственное издательство технико-теоретической литературы, -1949.

8. Демидович Б.П., Лекции по математической теории устойчивости, / Демидович Б.П. // Наука (Москва)-1967.

9. Akhmet M., Fen M.O., Non-autonomous equations with unpredictable solutions / Akhmet M., Fen M.O. // Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, -2018, №59. – P. 657-670.

References

1. Akhmet M., Fen M.O., Unpredictable points and chaos, / Akhmet M., Fen M.O. // Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation, - 2016, 40, 1-5.

2. Akhmet M., Fen M.O., Poincaré chaos and unpredictable functions, / Akhmet M., Fen M.O. // Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation, - 2017, 41, 85-94.

3. Poincaré H., (1892), Les methodes nouvelles de la mecanique celeste, // Poincaré H. / Paris: Gauthier-Villars, -1892, Vol. 1, 2.

4. Birkhoff G.D., Dynamical Systems. / Birkhoff G.D. // – Providence, RI: American Mathematical Society, - 1927, 319 p.

5. Sell G.R., Topological Dynamics and Ordinary Differential Equations. / Sell G.R // London, UK: Van Nostrand ReinholdCompany - 1971.

6. Akhmet M., Tleubergenova M., Zhamanshin A., Quasilinear differential equations with strongly unpredictable solutions. / Akhmet M., Tleubergenova M., Zhamanshin A. // Carpathian journal of mathematics, -2020, vol. 36. - № 3. – P. 341-349.

7. Nemyckij V.V., Stepanov V.V., (1949). Kachestvennaja teorija differencial'nyh uravnenij, / Nemyckij V.V., Stepanov V.V. // Gosudarstvennoe izdatel'stvo tehniko-teoreticheskoj literatury. Nemytsky V.V., Stepanov V.V., [Qualitative theory of differential equations] // State publishing house of technical and theoretical literature. [in Russian]

8. Demidovich B.P., (1967). Lekcii po matematicheskoj teorii ustojchivosti, / Demidovich B.P. // Nauka (Moskva)-1967. Demidovich B.P., [Lectures on the mathematical theory of stability,] // Science (Moscow). [in Russian]

9. Akhmet M., Fen M.O., Non-autonomous equations with unpredictable solutions / Akhmet M., Fen M.O. // Communications in Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, -2018, №59. – P. 657-670.

КВАЗИСЫЗЫҚТЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНІҢ БОЛЖАНБАЙТЫН ШЕШІМІ

А. ЖАМАНШИН*, И. САФИУЛЛИНА, Р. СЕЙЛОВА

Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе, Қазақстан

*e-mail: arguaktobe@gmail.com

Аңдатпа. Бұл мақалада квазисызықтық дифференциалдық теңдеулер жүйесінің болжанбайтын шешімі зерттелген. Асимптотикалық орнықты болжанбайтын шешімінің бар болуы және жалғыздығы дәлелденген. Теориялық нәтижелерді растайтын графикалық иллюстрациясы бар сандық мысал келтірілген.

Түйін сөздер: болжанбайтын функция, Пуассон бойынша орнықтылық, асимптотикалық орнықтылық.

UNPREDICTABLE SOLUTION OF QUASILINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. ZHAMANSHIN*, I. SAFIULLINA, R.SEILOVA

K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan

*e-mail: arguaktobe@gmail.com

Abstract. This article an unpredictable solution of a system of quasilinear differential equations are studied. The existence and uniqueness of an asymptotically stable unpredictable solution is proved. A numerical example with graphical illustrations to confirm the obtained theoretical results is given.

Keywords: quasilinear differential equation, unpredictable function, Poisson stability, asymptotic stability.