

МРНТИ 29.01.05; 29.01.45

## ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ В СЛАБО ПРОВОДЯЩИХ ОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

**И.Ф. СПИВАК-ЛАВРОВ, М.С. КУРМАНБАЙ, С.У. ШАРИПОВ**

*Актюбинский региональный государственный университет им. К. Жубанова, г. Актюбе*

**Аннотация.** В задачнике Иродова И.Е. имеется несколько задач на нахождение сопротивления системы электродов, находящихся в однородной слабо проводящей среде. Рассмотрена задача о нахождении сопротивления между двумя металлическими шарами. Показано, что потенциалы металлических шаров, находящихся в слабо проводящей однородной среде, влияют друг на друга. Это влияние удалось учесть путем введения зарядов изображений. С помощью метода изображений для сферы найдена зависимость сопротивления системы от расстояния между шарами. Ранее был рассмотрен лишь предельный случай, когда расстояние между шарами гораздо больше радиуса шаров.

**Ключевые слова:** слабо проводящая среда, расчет сопротивления, метод изображений

**Abstract.** In the exercises of Irodov I.E. there are several tasks for finding the resistance of a system of electrodes located in a uniform weakly conducting medium. The problem of finding resistance between two metal balls is considered. It has been shown that the potentials of metal balls located in a weakly conducting homogeneous medium influence each other. This effect was taken into account by introducing image charges. Using the image method for a sphere, the dependence of the system resistance on the distance between the balls is found. Previously, only the limiting case was considered when the distance between the balls is much larger than the radius of the balls.

**Key words:** weakly conductive medium, resistance calculation, image method

**Аннотация.** И.Е. Иродовтың оқулығында біртекті әлсіз өткізгіш ортада орналасқан электродтар жүйесінің кедергісін табу туралы бірнеше есеп келтірілген. Осы мақалада екі металл шардың арасындағы кедергіні анықтау мәселесі қарастырылады. Біртекті әлсіз өткізгіш ортада орналасқан металл шарлардың потенциалы бір-біріне әсер ететіні көрсетілген. Бұл әсер зарядтар кескіндерін енгізу арқылы ескерілді. Сфера үшін кескіндер әдісін қолдана отырып, жүйенің кедергісінің шарлар арасындағы қашықтыққа тәуелділігі анықталды. Бұдан бұрын шарлар арасындағы қашықтық шарлардың радиусынан едәуір үлкен болған кезде ғана шектеу жағдайы қарастырылды.

**Түйінді сөздер:** әлсіз өткізгіш орта, кедергіні есептеу, кескіндер әдісі.

### Введение

Многие авторы считают, что для повышения стандартов преподавания физики в университетах и других высших учебных заведениях необходимо делать упор на решение физических задач на практических занятиях [1-4]. Кроме знания теоретического материала для решения задач необходимы дополнительные навыки развивающие креативность. Решение задач вызывает у студентов живой интерес к физике, побуждает их анализировать физические явления, развивает способность мыслить самостоятельно и готовить ответы на нестандартные вопросы, а также прививает вкус к оригинальным решениям. Известно

несколько популярных задачникков по общей физике [5-8], среди которых книга И.Е. Иродова [7-8] занимает особое место. С 1979 года она переиздавалась более 10 раз и неоднократно переводилась на английский язык [8].

Книга содержит около 2000 задач по всем разделам курса общей физики. Разнообразие и оригинальность многих задач в сочетании с краткой теоретической информацией и обширными справочными таблицами делают этот сборник полезным и удобным для данного курса. Все задачи снабжены правильными ответами. Задачник рекомендован студентам вузов физического и инженерного профиля.

Расчет сопротивления сложных резисторных соединений всегда привлекал внимание физиков. Были разработаны оригинальные методы расчета бесконечных цепей сопротивлений [9]. Такие задачи также рассматриваются в книге И.Е. Иродова [7,8]. В настоящее время в связи с развитием нанотехнологий, с использованием графена [10] и тонких пленок [10], задачи расчета сопротивлений бесконечных резисторных сетей стали особенно актуальными. Так, в нашей работе [12] рассмотрены задачи о нахождении сопротивления бесконечных сеточных систем.

**Известные решения некоторых задач.** В задачнике Иродова И.Е. [6,7] имеется также несколько задач на нахождение сопротивления системы электродов, находящихся в однородной слабо проводящей среде. Наше внимание привлекли некоторые из этих задач, которые допускают интересные обобщения доступные студентам бакалавриата. Вот одна из этих задач (см. [6], зад. 2.164):

**Задача 1.** Два металлических шарика, одинакового радиуса  $a$ , находятся в однородной слабо проводящей среде с удельным сопротивлением  $\rho$ . Найти сопротивление среды между шариками при условии, что расстояние между ними значительно больше  $a$ . Мы предлагаем следующее решение этой задачи.

Пусть на один из шариков подано напряжение  $+\frac{U}{2}$ , а на другой  $-\frac{U}{2}$ . Тогда на первом шарике будет находиться положительный заряд

$$q = 2\pi\epsilon_0 aU. \quad (1)$$

Окружив этот заряд замкнутой поверхностью, запишем теорему Гаусса для напряженности электрического поля  $\vec{E}$ :

$$\oint_S E_n dS = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (2)$$

Используя закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}, \quad (3)$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление среды, перепишем (2) в виде:

$$\rho \oint_S j_n dS = \frac{q}{\varepsilon_0}. \quad (4)$$

Учитывая, что ток  $I$ , протекающий между шариками равен:

$$I = \oint_S j_n dS, \quad (5)$$

перепишем (4) в виде

$$\rho I = \frac{q}{\varepsilon_0}. \quad (6)$$

Подставляя (1) в (6), получим

$$\rho I = 2\pi a U. \quad (7)$$

Откуда найдем сопротивление

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\rho}{2\pi a}. \quad (8)$$

А вот другая задача (см. [6], зад. 2.162).

**Задача 2.** Металлический шар радиуса  $a$  окружен концентрической тонкой металлической оболочкой радиуса  $b$ . Пространство между этими электродами заполнено однородной слабо проводящей средой с удельным сопротивлением  $\rho$ . Найти сопротивление межэлектродного промежутка. Рассмотреть также случай  $b \rightarrow \infty$ .

Найдем сопротивление сферического слоя толщиной  $dr$ :

$$dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}. \quad (9)$$

Интегрируя это выражение от  $a$  до  $b$  найдем сопротивление межэлектродного промежутка:

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \quad (10)$$

В случае, когда  $b \rightarrow \infty$ , получим

$$R = \frac{\rho}{4\pi} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi a}. \quad (11)$$

При этом можно считать, что второй электрод находится на бесконечности и имеет нулевой потенциал. Тогда решение первой задачи (8) можно получить из формулы (11), рассматривая ее, как задачу о двух, соединенных последовательно шарах радиуса  $a$ , считая, что нулевой потенциал имеет плоскость, находящаяся посередине между шарами.

**Более общее решение задач.** Теперь попробуем определить, каким образом сопротивление может зависеть от расстояния между шарами. Можно считать, что положительный заряд  $q$  (1) находится в центре первого шара и создает на нем потенциал  $+\frac{U}{2}$ , тогда в центре второго шара находится заряд  $-q$ , который создает потенциал  $-\frac{U}{2}$ .

Этот заряд создаст на первом шаре заряд изображения  $q' = q\frac{a}{l}$ , где  $l$  – расстояние между центрами шаров. Заряд изображения совместно с отрицательным зарядом  $-q$  на втором шаре обеспечит нулевой потенциал на поверхности первого шара. Таким образом, для потока напряженности электрического поля вместо формулы (2) получим:

$$\oint_S E_n dS = \frac{q+q'}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} \left(1 + \frac{a}{l}\right). \quad (12)$$

Соответственно вместо формулы (6) получим

$$\rho I = \frac{q+q'}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0} \left(1 + \frac{a}{l}\right). \quad (13)$$

Подставляя в (13) выражение (1) для  $q$ , получим

$$\rho I = 2\pi a U \left(1 + \frac{a}{l}\right). \quad (14)$$

Откуда с точностью до членов первого порядка по  $\frac{a}{l}$ :

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\rho}{2\pi a \left(1 + \frac{a}{l}\right)} \cong \frac{\rho}{2\pi a} \left(1 - \frac{a}{l}\right). \quad (15)$$

В действительности мы будем иметь бесконечный ряд изображений, и вместо поправки  $\left(1 + \frac{a}{l}\right)$  в знаменателе выражения (15), пренебрегая небольшим различием в расположении зарядов, получим геометрическую прогрессию, сумма которой:

$$\left(1 + \frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2} + \frac{a^3}{l^3} + \dots\right) = \frac{1}{1 - \frac{a}{l}}. \quad (16)$$

В результате приходим к выводу, что формула (15) является точной:

$$R = \frac{\rho}{2\pi a} \left(1 - \frac{a}{l}\right). \quad (17)$$

Сделаем еще одно обобщение формулы (17). Рассмотрим случай, когда радиусы шаров различны: радиус одного равен  $a$ , а другого равен  $b$ . Можно попробовать угадать результирующую формулу. Во-первых, она должна переходить в формулу (17) при  $b = a$ , а во-вторых, она должна быть симметрична относительно  $a$  и  $b$ :

$$R = \frac{\rho(a+b)}{4\pi ab} \left(1 - \frac{2ab}{l(a+b)}\right). \quad (18)$$

**Заключение.** Данная работа должна побудить к поиску задач в известных учебниках, допускающих интересные обобщения, доступные студентам бакалавриата и магистратуры. Поиск более общих решений известных задач это один из путей улучшения физического образования, прививающий вкус к оригинальным решениям и дающий толчок к развитию креативности. В рассмотренной задаче потенциалы металлических шаров, находящихся в слабо проводящей однородной среде влияют друг на друга. Это влияние удалось учесть путем введения зарядов изображений. Использование метода изображений для сферы позволило найти зависимость сопротивления системы от расстояния между шарами, чем ранее пренебрегали, рассматривая лишь предельный случай, когда расстояние между шарами гораздо больше радиуса шаров  $l \gg a$ .

#### Список использованной литературы

1. Zhang P., Liu Y.X. The application of Peer-Instruction in the College Physics [J] // Physics and Engineering; 2012, 22(1): 41-43.
2. Kushal K.S. Methods for teaching traditional physics // Physics Today; 2016, 69(12): 12-14.
3. Ricardo H. How to teach me physics. Tradition is not always a virtue // Physics Today; 2017, 70(3): 10-11.
4. Jia G., Liu Y. The realization of "College Physics" Teaching for Non-Physics Major Students // American Journal of Physics and Applications; 2019, 7(2): 43-47.
5. Feynman R., Leyton R., Sands M. The Feynman Lectures on Physics. V. 10. Exercises. – Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachusetts, Palo-Alto. London, 1964–1965. – 113 p.
6. Заикин Д.А. Сборник задач по общему курсу физики. – М.: Наука, 1991. – 414 с.
7. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. Учебное пособие для вузов. 4-е изд., исправленное. – М.: Лаб. Баз. Знаний, 2001. – 432 с.
8. I.E. Irodov. Exercises in General Physics. Tutorial. 14<sup>th</sup> ed. – S.-Pt.–Msk.–Krs.: Izd. "Lan", 2016. – 416 p.

9. Bessonov LA (2002) Theoretical bases of electrical engineering. Electric circuits. – Moscow: Gardariki, 2002. – 638 p.
10. M.I. Katsneison. Carbon in Two Dimensions. – New York: Cambridge University Press, 2012. – 366 p.
11. Bhattarai, S.P. Shrestha. Construction of Sheet Resistance Measurement Setup for Tin Dioxide Film Using Four Probe Method. – American Journal of Physics and Applications; 2017, 5(5): 60-65.
12. Spivak-Lavrov I.F, Kurmanbai M.S., Mazhit A.N. About one method of calculation of resistance of two-dimensional infinite grid systems. – Вестник АРГУ. – № 1 (51), Ақтобе, 2018. – С. 43-51.

**ҒТАМР 20.53.01**

## **ОҚУ ҮРДІСІН ҰЙЫМДАСТЫРУДА ОНЛАЙН ПЛАТФОРМАЛАРДЫҢ ТИІМДІЛІГІ**

**А.М. БАЙГАНОВА, Н.К. НАУРЫЗОВА**

*Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік мемлекеттік университеті,*

*Ақтөбе, Қазақстан*

**Аңдатпа.** Қазіргі таңда жаңа инновациялық технологиялардың түрлері сан алуан. Оларды таңдау және оны қолданудан нәтиже шығару оқытушының кәсіби біліктілігіне тікелей байланысты. Жаңа инновациялық технологияның негізгі міндеттері: әрбір білім алушының білім алу, өз бетінше жұмыс істеу дағдыларын қалыптастыру, қабілетін дамыту және білім мен дағдысына сай келетін бағыт-бағдар таңдап алатындай дәрежеде тәрбиелеу.

**Түйін сөздер:** инновациялық технологиялар, онлайн платформалар, дәстүрлі әдіс, ақпараттық-коммуникациялық технологиялар, жеке тұлғаға бағытталған оқыту, ойын технологиялары, сабақты ұйымдастыру, қалыптастырушы бағалау, кері байланыс, Padlet, Kahoot, Socrative, Plickers, Quick key, QuizLet, Mentimeter.

**Аннотация.** Сегодня существует много видов новых инновационных технологий. Их выбор и результаты от его использования напрямую зависят от профессиональной компетентности учителя. Основными задачами новой инновационной технологии являются: получение знаний, формирование навыков самостоятельной работы, развитие способностей каждого обучающегося и воспитание в той степени, в которой выбирается ориентир, который соответствует знаниям и навыкам.

**Ключевые слова:** инновационные технологии, онлайн платформы, традиционные методы, информационные и коммуникационные технологии, личностно-ориентированное обучение, игровые технологии, организация урока, формирующая оценка, обратная связь, Padlet, Kahoot, Socrative, Plickers, Quick key, QuizLet, Mentimeter.